

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ**  
**ИНСТИТУТ ЗА ЯДРЕНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ И ЯДРЕНА ЕНЕРГЕТИКА**

---

**Ана Иванова Георгиева**

**Приложения на бозонни и фермионни  
реализации на симплектични алгебри в  
теорията на ядрената структура**

**Научна специалност**  
**Шифър 01.03.04 (Ядрена физика)**

**ДИСЕРТАЦИЯ**  
**За получаване на научната степен**  
**“ДОКТОР НА ФИЗИЧЕСКИТЕ НАУКИ”**

**СОФИЯ, 2006 г.**

## Съдържание

1. Увод . . . . .	1
<b>Част I Бозонни и фермионни представяния в симплектичен подход</b>	<b>11</b>
2. Класически и деформирани бозонни представяния на $sp(4, R)$ и нейните подалгебри . . . . .	13
2.1 Бозонно представяне на $sp(4, R)$ алгебрата . . . . .	14
2.2 Квантова $sp_q(4, R)$ алгебра . . . . .	18
2.2.1 $q$ -бозони . . . . .	18
2.2.2 Редукции по подалгебрите на $sp_q(4, R)$ . . . . .	20
3. Тензорна структура на $q$ -деформираната $sp(4, R)$ супералгебра . . . . .	25
3.1 Основни определения и означения . . . . .	26
3.2 Деформация в термини на $su_q(2)$ тензорни оператори . . . . .	28
3.2.1 Построяване на $q$ -тензорни оператори и техните свойства . . . . .	28
3.3 Алгебрична структура породена от тензорните оператори . . . . .	32
3.4 Базисни състояния на $sp_t(4, R)$ $q$ -тензорната алгебра . . . . .	35
4. Проекционен метод за конструиране на $q$ -деформираната версия на редукцията $so(3) \subset u(3)$ . . . . .	41
4.1 Изходната $q$ -деформираната $sp(4, R)$ . . . . .	43
4.2 $q$ -деформираната проекционна процедура . . . . .	44
4.3 $q$ -деформираната $su(3)$ алгебра . . . . .	47
5. Фермионна реализация на $sp(4)$ алгебрата и нейните подалгебри и деформациите им . . . . .	52
5.1 Фермионна реализация на $sp(4)$ алгебра . . . . .	52
5.1.1 Подалгебри на $sp(4)$ . . . . .	53
5.1.2 Пространство на действие на фермионната реализация на $sp(4)$ . . . . .	56
5.2 $q$ -Деформация на фермионната реализация на $sp(4)$ . . . . .	62
5.2.1 Трансформация за $q$ -деформиране на фермионните оператори . . . . .	62

5.2.2	$q$ -Деформация на антикомутиционните съотношения на фермионните оператори . . . . .	65
5.2.3	Пространство на действие на фермионната реализация на $sp_q(4)$	69
<b>6.</b>	<b>Обобщена <math>q</math>-деформирана <math>sp(4)</math> алгебра за приложение в множество слоеве . . . . .</b>	<b>73</b>
6.1	Обобщена $sp(4)$ алгебра и нейното $q$ -деформирано разширение . . . . .	73
6.2	Действие на операторите от първи и втори ред върху базисните вектори	77
6.2.1	Границата определена от $su_q^T(2)$ . . . . .	77
6.2.2	Действие на произведенията на два генератора върху базисните състояния . . . . .	78
6.2.3	Оператори от втори ред . . . . .	79
6.2.4	Бозонно приближение . . . . .	81
<b>Част II</b>	<b>Приложение на симплектичните алгебри за класификация на ядрени системи</b>	<b>83</b>
<b>7.</b>	<b>Единно описание на нисколежащите състояния от основните ивици на четно-четните ядра . . . . .</b>	<b>85</b>
7.1	$Sp(4, R)$ класификационна схема на четно-четните ядра . . . . .	86
7.2	Обобщено взаимодействие в ираст ивиците на класифицираните ядра	88
7.3	Определяне на динамичните коефициенти на взаимодействието . . . . .	91
7.4	Анализ на резултатите . . . . .	97
<b>8.</b>	<b>Определяне на ядрените маси като функция на параметъра <math>P</math> и <math>F</math>-спина в слоя с <math>Z=28-50</math>, <math>N=28-50</math> . . . . .</b>	<b>105</b>
8.1	Връзка между $P$ и $F_0$ като класификационни параметри . . . . .	106
8.1.1	Включване на ядра с нечетно $A$ . . . . .	107
8.1.2	Отчитане на частици и дупки . . . . .	108
8.2	Емпирично изследване на зависимостта на масите от $P$ и $F_0$ . . . . .	111
8.3	Формули за определяне на полуемпиричните микроскопични маси и сравняване на резултатите . . . . .	112
<b>9.</b>	<b>Систематика в структурата на главите на нисколежащите възбудени ивици в спектрите на силно деформираните ядра . . . . .</b>	<b>118</b>
9.1	Емпирично изследване на поведението на $K^\pi = 0_2^+$ и $2_\gamma^+$ . . . . .	119
9.2	Протон-неутронна версия на псевдо- $SU(3)$ модела . . . . .	122
9.3	Микроскопичната интерпретация на относителното положение на колективните ивици . . . . .	124

<b>10. Приложение на деформираната <math>sp(4, R)</math> алгебра</b> . . . . .	131
10.1 Двумерен $q$ -деформиран модел на взаимодействащите бозони . . . . .	131
10.2 Ротационна граница . . . . .	132
10.3 Вибрационна граница . . . . .	135
<b>Част III <math>Sp(4)</math> модел на сдвояване и деформираното му обобщение</b>	141
<b>11. Алгебричен модел на сдвояване с <math>Sp(4)</math> симетрия и деформираната му версия</b> . . . . .	143
11.1 Алгебрична структура на недеформираната и $q$ -деформираната $sp(4)$	145
11.2 Теоретичен модел с $Sp(4)$ динамична симетрия . . . . .	147
11.2.1 Модели на сдвояването: от $SU(2)$ до $Sp(4)$ . . . . .	147
11.2.2 Моделен хамилтониан . . . . .	150
11.2.3 Матрични елементи на хамилтониана . . . . .	154
11.3 Приложения в ядрената структура . . . . .	155
11.3.1 Параметри на силите на взаимодействията . . . . .	155
11.3.2 Деформиран нелинеен модел . . . . .	160
11.4 Енергетичен спектър на изобарово аналоговите $0^+$ състояния . . . . .	161
<b>12. Стагеринг на енергиите на <math>0^+</math> състоянията в <math>Sp(4)</math> модела на сдвояване</b>	167
12.1 $Sp(4)$ класификационна схема . . . . .	169
12.1.1 Свойства на сдвояващите взаимодействия . . . . .	171
12.2 Дискретни производни и ефекти на финната структура . . . . .	173
12.3 Дискретни производни по отношение на $N_{+1}$ и $N_{-1}$ . Областта с $N = Z$ .	175
12.4 Дискретни производни спрямо $n$ и $i$ . Стагерингово поведение. . . . .	177
12.4.1 Производни по една променлива от втори и по-висок порядък.	178
12.4.2 Сдвояващи процепи. . . . .	180
12.4.3 Смесени производни от втори порядък. . . . .	185
<b>13. Нарушаване на изоспиновата симетрия в алгебричния <math>Sp(4)</math> модел на сдвояване</b> . . . . .	189
13.1 Теоретичен подход: разумното приближение . . . . .	191
13.2 Нарушаване на изоспиновата инвариантност и смесване на изоспина .	194
13.2.1 Почти изоспинова симетрия на изобарно аналоговите $0^+$ състояния . . . . .	196
13.2.2 Неаналогови преходи на $\beta$ -разпад . . . . .	198

<b>14. Физически смисъл на <math>q</math>-деформацията и многочастични взаимодействия в ядрото</b>	207
14.1 Нови свойства произхождащи от $q$ -деформацията	208
14.2 Анализ на ролята на $q$ -деформацията	209
14.3 Аналитично моделиране на ядрените многочастични взаимодействия	213
<b>Част IV Симплектичното разширение на Модела на взаимодействащите векторни бозони</b>	217
<b>15. Модел на взаимодействащите векторни бозони за описание на колективните движения в ядрата</b>	219
15.1 Основни конструктивни елементи на модела	221
15.2 Алгебрична структура породена от тях	223
15.3 $U(6)$ подгрупа и редуциите ѝ	224
15.4 Формулировка на МВВБ	228
15.4.1 Моделен хамилтониан	228
15.4.2 Динамични симетрии в $U(6)$	231
<b>16. Описание на ивици с положителна и отрицателна четност в симплектичното разширение на <math>U(6)</math> границата на МВВБ</b>	234
16.1 Алгебрична реализация на базиса в симплектичното разширение на $U(6)$	235
16.2 Приложение на МВВБ за описание на енергиите на основната и първата възбудена ивица с отрицателна четност	240
16.2.1 Алгебрична дефиниция за ираст ивици	241
16.2.2 Четно-нечетен стагеринг между състоянията от двете ивици	244
<b>17. Матрични елементи на операторите на преход в симплектичното разширение на МВВБ</b>	246
17.1 Тензорни свойства на генераторите на групата $Sp(12, R)$ и на базиса ѝ	246
17.2 Матрични елементи на операторите на преход	251
17.3 $B(E2)$ вероятности за преход в основната и октуполната ивици	253
17.4 Приложение към реални ядра	254
<b>18. Енергетична систематика на нисколежащите колективни състояния в Модела на двата взаимодействащи векторни бозона</b>	258
18.1 Алгебрична структура на новата динамична симетрия	260
18.1.1 Реализация на представянията на $Sp(4, R)$	261
18.2 Енергетично разпределение на нисколежащите състояния	264

18.2.1	Определяне на моделните параметри в енергиите на състоянията с фиксиран ъглов момент . . . . .	264
18.2.2	Анализ на резултатите . . . . .	267
<b>19.</b>	<b>Шестмерен потенциал на Davidson, като динамична симетрия в теорията на ядрената структура . . . . .</b>	<b>272</b>
19.1	Алгебрични подходи използващи потенциали на Davidson в ядрената структура . . . . .	273
19.1.1	Тримерен и петмерен потенциали на Davidson . . . . .	273
19.1.2	Колективно поведение на многочастичните системи в симплектичната геометрия . . . . .	275
19.2	Динамична симетрия на МВВБ съдържаща шестмерен потенциал на Davidson . . . . .	277
19.2.1	Редукция на $Sp(12, R)$ през некомпактната $Sp(2, R)$ . . . . .	277
19.2.2	Редукция на $SO(6)$ за пълно означаване на базиса . . . . .	279
19.2.3	Включване на 6 - мерния потенциал на Davidson в динамичната симетрия определена от $Sp(2, R)$ . . . . .	280
19.3	Приложение към реални ядра и анализ на резултатите . . . . .	282
<b>20.</b>	<b>Връзка между Модела на взаимодействиящите векторни бозони и различни версии на Модела на взаимодействиящите бозони . . . . .</b>	<b>286</b>
20.1	Алгебрична конструкция на $sp(2d, R)$ . . . . .	287
20.2	Смесена Дайсонова бозонна реализация на $sp(2d, R)$ . . . . .	288
20.3	Духови състояния . . . . .	292
20.4	Възстановяване на ермитовостта след Дайсоновото проектиране . . . . .	296
20.5	Бозонно изображение на хамилтониана на МВВБ . . . . .	298
20.6	Заключителни бележки . . . . .	299
<b>21.</b>	<b>Заклучение . . . . .</b>	<b>301</b>
	<b>Приложение . . . . .</b>	<b>307</b>
<b>А.</b>	<b>Трансформации на <math>q</math>-подобие . . . . .</b>	<b>309</b>



## 1. Увод

В настоящия момент нашето познание излиза извън дискретизираната в атоми структура на материята, където всеки атом се състои от ядро и електрони. То се разпростира до самата природа на ядрената структура, която е резултат от сложното, силно взаимодействие между нуклоните – протони и неутрони. И то не приключва до тук, а вече дълбае и вътре в нуклоните, като ги преопределя като комплексна структура от кварки. Структурата на взаимодействието между нуклоните в този случай се описва от квантовата хромодинамика (QCD) на кварките и глюоните, но за съжаление тази най-съвременна теория среща твърде много трудности при решаването на проблемите на ядрената структура при ниски енергии. Все пак изучаването на последната се развива, тъй като при ниски енергии, в явленията, които разглеждаме в настоящата дисертация, кварковата субструктура на нуклоните може да се пренебрегне и протоните и неутроните да се разглеждат, като основни съставни елементи на атомните ядра.

Продължаващият интерес към физиката на ядрената структура се поддържа от разбирането, че нейният основен проблем, формулиран от многочастичното, нерелативистко уравнение на Schrödinger, не може да се реши точно, даже ако се ограничим само с разглеждането на двучастични взаимодействия между нуклоните. Съществуват две главни направления за изход от тази ситуация. Първото – създаването на опростени, феноменологични модели на ядрените системи, се основава на емпирически анализ на експерименталните данни. Вторият, основен и мощен подход се състои в откриването на съществуващите в тях симетрии, което води до разглеждането на възможни за обработка моделни пространства и точни аналитични решения.

Групово-теоретичният подход използва точните или почти точните симетрии в ядрената динамика и така става точно и елегантно средство за описание на определен кръг от явления по математически конкретен и изчислително сравнително лесен начин. Определянето на подходящите симетрии и тяхното конкретно приложение при описанието на различни аспекти на ядрената динамика изисква само по-себе известни математически усилия, главно за приспособяването на понякога твърде сложните и общи математически конструкции към спецификата на разглеждания физически проблем. Например, една нова математическа област – теорията на  $q$ -деформираните (квантовите) алгебри, привлече интереса на физиците от различни

клонове на физиката, при осъзнаването на две тяхни главни характеристики, които правят приложенията им много привлекателни. Първата от тях е, че в границата  $q \rightarrow 1$  параметърът на деформация на  $q$ -алгебрата, възстановява съдържащата се в нея “класическа” алгебра на Lie. Втората, че  $q$ -деформацията въвежда в теорията нелинейни членове, като в същото време запазва основната симетрия. Остава, обаче едно предизвикателство – въпроса за физическия смисъл и роля на  $q$ -деформацията особено при приложенията в теорията на ядрената структура, който все още очаква своя отговор.

Групово-теоретичния подход може да се използва от една страна традиционно, като във физиката на елементарните частици за класификация на изследваните физически обекти, което създава условия за систематично емпирично определяне на основни закономерности при разглежданите явления.

От друга страна, много съществено във физиката на ядрената структура е разработването на модели, основани на този подход, което дава огромни възможности за описание на наблюдаваните експериментално явления и разбиране на предопределящите ги ядрени взаимодействия.

При прилагането на теорията на групите в ядрената структура по същество се изследват системи от идентични частици. В природата те се делят на две категории – *бозони* с цял спин и *фермиони* с полуцял. Въпреки, че “истинските” структурни елементи на ядрото, нуклоните са фермиони, множество от колективните модели в теорията на ядрената структура използват бозони. Например, в колективния модел на Bohr-Mottelson се работи с фонони, а в алгебричния модел на взаимодействащите бозони (МВБ) въведените елементарни възбуждания са  $s$  и  $d$  бозоните. Въпреки разнообразието от алгебрични модели, даже основани на различни обекти, групово-теоретичният подход ги обединява поради приложимостта на един и същи математически апарат към различни физически явления, което определя и разнообразните им физически приложения.

В основата на нашето разбиране на ядрената структура и съответно на терминологията, която използваме при нейното описание, до настоящия момент е модела на хармоничния осцилатор, който възпроизвежда слоестата структура и преди всичко затварянето на главните слоеве при магическите протонни (неутронни) числа ( $Z(N) = 2, 8, 20, 28, 50, 82, \dots$ ). В модела се предполага независимо движение на нуклоните, които запълват едночастичните  $j$ -нива. Според слоестия модел остатъчните взаимодействия в ядрата се доминират от късодействащите сдвояващи корелации и дълго-действащите квадрупол-квадруполни взаимодействия. Първите отчитат сдвояващия процеп в ядрените енергетични спектри, предизвикан от образуването на фермионни двойки, докато колективните взаимодействия са отговорни за усилените квадруполни преходи в колективните ивици. Двата гранични случая, сдвояването

и колективността, могат да се опишат от структури притежаващи симплектични симетрии.

В границата на доминиращо сдвояване, ядрения колективен спектър се генерира от конвенционалната фермионна реализация на  $U(2(2j + 1)) \supset Sp(2j + 1)$  схема на старшинството или алтернативно от симплектичната  $Sp(2j + 1)$  група заедно с нейната дуална симплектична  $Sp(4)$  ( $\sim SO(5)$ ) група<sup>1</sup>. Последната представлява разширение на квазиспиновата  $SU(2)$  група, което включва към сдвояването на частици от един и същи тип и протон-неутронните сдвояващи взаимодействия [1].

В квадруполната граница, различни бозонни реализации на некомпактната симплектична  $Sp(2n, R)$  група управляват определящата формата на ядрената система, колективна динамика. Добре известните случаи с  $n = 3$  ( $Sp(6, R)$ ) и  $n = 5$  ( $Sp(10, R)$ ), както и някои техни гранични приближения, като  $n = 2$  ( $Sp(4, R)$ ) и  $n = 1$  ( $Sp(2, R)$ ) могат да се разглеждат като физическа мотивировка и на развития от нас колективен модел [2].

И в двете граници, които са обект на изследване в настоящия труд, под понятието алгебричен модел се разбира определянето на двойката  $(\mathfrak{g}, R)$ , където  $\mathfrak{g}$  е реална алгебра на Lie и  $R$  е нейното представяне в Хилбертовото пространство  $\mathcal{H}$  по такъв начин, че да е ясно съответствието между наблюдаемите характеристики на системата и елементите на алгебрата  $\mathfrak{g}$ , както и между състоянията на системата и векторите в  $\mathcal{H}$ . Алгебрата  $\mathfrak{g}$ , се нарича динамична алгебра или алгебра, пораждаща спектъра.

Успешното използване на групово-теоретичните подходи се гарантира от подходящата физическа интерпретация на груповите генератори като оператори на физическите наблюдаеми на ядрената система и намирането на правилно съответствие между експериментално наблюдаваните състояния от енергетичния спектър и базиса, възникващ в дадената динамична симетрия. Това определя и различните физически приложения, специфични за всяка от тези динамични симетрии. В същото време се изисква областта на приложимост на всеки от тези гранични случаи, да е свързана с нови експериментални резултати, получени при съвременните сложни и много прецизни експерименти, определящи спектрите на все по-голям брой ядра, някои от които със съвсем нови свойства. Освен това във всеки отделен спектър са наблюдавани и множество нови високоспинови състояния, и/или множество нови колективни ивици, чието описание и теоретично обяснение изискват подходящо усъвършенстване и обобщение на вече утвърдените теоретични подходи и модели.

Въз основа на изложената на кратко мотивировка, **целта** на настоящия дисертационен труд – **да се приложи групово-теоретичния подход за описанието на**

<sup>1</sup> Ние различаваме означенията за групи, които са с главни букви (например  $Sp(4)$ ) и съответните алгебри от техните образуващи, означени с малки букви (например  $sp(4)$ ).

нови експериментални данни за ядрената структура, може да се формулира чрез следните конкретни задачи:

1. Да се разработи приложима в теорията на ядрената структура, теория на бозонните и фермионни представяния на симплектичните алгебри и на съдържащите се в тях редукции, както и на съответните им  $q$ -деформирани аналози;
2. Да се използва симплектичната класификация на четно-четните ядра от главните слоеве за откриване на закономерности и описание на поведението на колективни ядрени характеристики;
3. На базата на фермионната реализация на  $Sp(4)$  да се получи микроскопично описание и да се изследват свойствата на възникващите в резултат на сдвояването  $0^+$  състояния в енергетичния спектър на ядрата с четни  $A$  с масови числа  $32 \leq A \leq 164$ , за които протоните и неутроните запълват един и същи главен слой;
4. Да се изясни ролята на симплектичната група на динамична симетрия  $Sp(12, R)$  в модела на взаимодействащите векторни бозони (МВВБ), като се изследват и приложат към колективните спектри на тежките четно-четни ядра новите динамични симетрии, възникващи в резултат на симплектичното разширение на модела.

Приложението на фермионните и бозонни представяния на симплектичните алгебри за систематика и описание на двата гранични случая в ядрената структура, които се съдържат в настоящата дисертация са изложени в четири части, съответстващи на поставените цели, които са разделени на глави с последователна номерация, увод и заключение.

На кратко ще изложим съдържанието на всяка от главите, с позоваване на публикацииите, върху които те са построени, които са извадени в отделен списък от общата цитирана в дисертацията литература.

Част I има математически характер и е посветена на изучаването на бозонните и фермионните представяния на симплектичните алгебри и различни тяхни деформации, които са интересни за по нататъшните приложения в теорията на ядрената структура.

- В Глава 2 [A1, B2, B4] са дадени бозонните представяния на  $sp(4, R)$  алгебрата и нейните компактни и некомпактни подалгебри. Използвайки стандартната  $q$ -деформация на бозонните оператори на раждане и унощожение е получен и изследван нейния квантов аналог  $sp_q(4, R)$ , както и пространствата на Фок, в които действат двете представяния.

- В Глава 3 е получена друга деформация –  $sp_t(4, R)$  на  $sp(4, R)$  алгебрата, чрез трансформация на  $q$ -деформираните бозони в тензорни оператори по отношение на компактната подгрупа  $SU_q(2) \subset Sp_q(4, R)$ , определена в предишната глава. В този случай се използват  $q$ -тензорни произведения за да се получат генераторите ѝ, които също са тензорни оператори по отношение на  $SU_q(2)$ . Техните компоненти по естествен начин образуват подалгебри и получената компактна подалгебра  $su_t(2)$  може да се интерпретира като изоморфна на  $so(3)$  алгебрата. На края се изследва представяне на базиса, изразен чрез генераторите на  $sp_t(4, R)$  алгебрата, в който са въведени три квантови числа за означаване на състоянията, които съответстват на класическия резултат [B2].
- В Глава 4 [A3, A4, B3] за първи път в деформирания случай е осъществено бозон-бозонно проектиране на  $sp_t(4, R)$ , като полученото изображение на  $su_t(2)$  се разширява до  $q$ -деформирана тензорна  $su_t(3)$ , която е  $q$ -аналог на  $su(3)$  реализацията на Elliott и съответно съдържа  $q$ -аналога на алгебрата на ъгловия момент  $so(3)$ .
- В следващите две Глава 5 [A5, B5] и Глава 6 [A6] е разработен групово-теоретичен  $Sp(4)$  подход и неговото  $q$ -деформирано обобщение, като е осъществена фермионната реализация на компактната симплектична  $sp(4)$  алгебра, изоморфна на  $so(5)$ , която е подробно изследвана за единична и множество- $j$  орбити. Редукционните вериги на  $sp(4)$  дават възможност за естествена и полезна класификация на ядрата и тяхните състояния. Направената  $q$ -деформация на фермионната реализация на симплектичната  $sp(4)$  алгебра, отговаря на стандартната конструкция на Drinfeld-Jimbo за  $so_q(5)$  и оставя физическите наблюдаеми недеформирани.
- В края като Приложение А [A7] е дадено едно чисто математическо изследване на трансформациите на  $q$ -подобие по отношение на симетричните  $q$ -експоненти. То е мотивирано от опитите да се построят  $q$ -бозонните представяния на  $q$ -деформирани алгебри, представени в предишните глави, но за сега няма директни приложения в ядрената физика.

В Част II на дисертацията са разгледани всевъзможни приложения на  $Sp(4, R)$  като класификационна група, в рамките на въведена от нас обща динамична симетрия.

- В Глава 7 [A8, B6, B7, B8] въз основа на класификацията на четно-четните ядра от главните слоеве в  $F$ -спин мултиплетите на  $Sp(4, R)$  е получено единно описание на нисколежащите състояния от съответстващите им основни ивици. В резултат на емпирично изследваното гладко поведение на енергиите на

тези състояния, е въведена нова променлива в геометричната част на взаимодействието, която характеризира различните типове колективни моди, които участват в него. Намерена е обща феноменологична формула за динамичния коефициент на взаимодействието, като функция на класификационните квантови числа - общия брой бозони  $N$  и третата проекция  $F_0$  на  $F$ -спина.

- В Глава 8 [A9, B9] определяме връзката между феноменологичния параметър на интегралното протон-неутронно взаимодействие  $P$  и класификационните числа на  $Sp(4, R)$  систематиката. С нейна помощ изследваме емпиричната зависимост на “полуемпиричните микроскопични маси” –  $SEM$  от всяка от величините  $P$  и  $F_0$  независимо, за ядрата от главния слой с  $Z = 28 - 50$  и  $N = 28 - 50$ . От анализът на това изследване следва обобщена феноменологична формула за зависимостта на  $SEM$  от  $P$  (линейна) и от  $F_0$  (квадратична), получени в резултат на двукратни фитиращи процедури. Стойностите на масите пресметнати по двата начина са сравнени помежду си по точност и с експерименталните данни, с което е потвърдена тяхната валидност и са оценени възможностите за предсказване на неизвестни още данни.
- В следващата Глава 9 [A10, B10, B11, B12] в рамките на  $Sp(4, R)$  класификацията е изследвано емпирично поведението на други две ключови за ядрената структура характеристики на колективните спектри, а именно енергиите на първите възбудени  $0^+$  и  $2^+$  състояния в силно деформираните ядра, които са глави на  $\beta$  и  $\gamma$  квадруполните ивици. За разлика от гладкото поведение на енергиите на ираст състоянията, тези ивици демонстрират много сложно и даже осцилиращо поведение дори в ядра със сходни характеристики. За обяснение на това поведение и възпроизвеждане на спектралните енергии е използвана микроскопичната протон - неутронната версия на псевдо- $SU(3)$  слоестия модел.
- На края на тази част, малко извън общата ѝ тематика в Глава 10 [A11] е дадено едно приложение като група на динамична симетрия на полученото в Глава 4  $q$ -деформирано изображение на  $su_q(2)$ , а именно  $q$ -деформацията на  $su(3)$ . Въз основа на това е създаден  $q$ -аналог на двумерен модел на взаимодействащите бозони, съдържащ ротационна и вибрационна граници.

В следващата Част III на дисертацията е представен разработения от нас алгебричен модел на сдвояването с  $sp(4)$  симетрия и деформираната му версия.

- В Глава 11 [A12, A14, B13, B14, B15, B16, B17] са предложени два модела, “класически” създаден въз основа на  $sp(4)$  алгебричния подход, и  $q$ -деформиран в рамките на  $sp_q(4)$  алгебрата. Описани са тяхните моделни пространства и

съответстващите им хамилтониани, които са представени с анализ на физическата същност на различните взаимодействия, които те включват. “Класическият” моделен хамилтониан е двучастично взаимодействие, включващо протон-неутронно и сдвояване на еднакви частици плюс симетрични членове, докато  $q$ -деформираният хамилтониан добавя многочастични членове от по-висок порядък. Слоестата структура и нейните размери играят важна роля при възникването на фермионните двойки и тяхните взаимодействия са в съответствие с принципа на Pauli. По нататък са използвани и двата модела при сравнение на теоретичните резултати с експерименталните стойности. Тяхното изследване и анализ разкрива предимствата и на двата подхода спрямо други теоретични изследвания.

- В Глава 12 [A12, A13, B18] е представено детайлно изследване на ядрената структура, включително аномалиите при ядрата с  $N = Z$ , сдвояващите процеси и ефектите на стагеринг, като е използван метода на крайните енергетични разлики в много подходящата за случая  $Sp(4)$  систематика.
- В Глава 13 [A15, A16] е обсъдено нарушаването на изоспиновата симетрия и смесването на изоспина – които в последно време са обект на много експерименти с висока точност и теоретически изследвания, тъй като дават прецизна оценка на стандартния частичен модел.
- В Глава 14 [A17, B19, B20, B21, B22] е атакуван успешно, твърде актуалния въпрос за физическия смисъл на  $q$ -параметъра в рамките на нелинейния  $sp_q(4)$  алгебричен подход. Понятието за квантова деформация е свързано с локалното поведение на изследваните физически величини в атомните ядра.

Симплектичната  $Sp(4)$  схема позволява не само едно широко систематично изследване на различните експериментални закономерности наблюдавани в ядрата с четно  $A$ , тя позволява и изграждането на точно решимите  $sp(4)$  и  $sp_q(4)$  алгебрични модели за интерпретиране на резултатите. Нещо повече, настоящето изследване служи за проверка на валидността и надеждността на моделите по-отношение на включените в тях взаимодействия.

В последната Част IV на дисертацията, с цел описание на колективните спектри на тежките четно-четни ядра е формулирано и изследвано симплектичното разширение на Модела на взаимодействащите векторни бозони (МВВБ).

- В началото в Глава 15 [A18] е формулиран самия модел, като чрез основните му градивни елементи – двата векторни бозона е построена алгебричната му структура, като е дискутирана ролята на  $Sp(12, R)$  като група на динамична симетрия на най-общия ротационно инвариантен хамилтониан на модела. По

специално внимание е отделено на нейната максимална компактна подгрупа  $U(6) \subset Sp(12, R)$ , която определя запазващата броя на бозоните версия на МВ-ВБ, като подробно са изследвани съдържащите се в нея динамични симетрии.

- В следващата Глава 16 [A19, B23], в рамките на направеното симплектично разширение на МВВБ се описват първите ивици с положителна и отрицателна четност до много високи спинове за голям брой деформирани четно-четни ядра от областта на редките земи и актинидите. За пълното означаване на базисните състояния на хамилтониана се използва редукцията по унитарните неприводими представяния (УНП) на редицата от подгрупи:

$$Sp(12, R) \supset U(6) \supset U(3) \otimes U(2) \supset O(3) \otimes (U(1) \otimes U(1)).$$

Въведено е понятието “ираст” състояния, дефинирани от алгебрична гледна точка, като състоянията с дадено  $L$ , които минимизират стойностите на енергиите по отношение на  $N$  - собствената стойност на оператора на пълния брой на бозоните, които изграждат базисните състояния. Направеното на тази база съответствие между наблюдаваните колективни състояния и базисните състояния води до появата на член от вибрационен тип в собствените стойности на хамилтониана, който оказва влияние на “ираст” енергиите. Този член играе и ролята на взаимодействие между разглежданите ивици и е причина за коректното възпроизвеждане на четно-нечетния стагеринг на техните енергии.

- В Глава 17 [A22, B26] по отношение на същата редица са определени и тензорните свойства на генераторите на  $Sp(12, R)$ , като по този начин е определена и тяхната роля като оператори на преход между различните базисни състояния, класифицирани по редицата. Това дава възможност с помощта на съответно обобщение на теоремата на Wigner-Eckart да се намерят аналитични изрази за тяхните матрични елементи. С тяхна помощ са получени и сравнени с експеримента вероятностите за преход между състоянията от основната и първата октуполна ивица, описани в предишната глава.
- В Глава 18 [A20, B24, B27] ние разглеждаме систематиката в поведението на енергиите на последователности от колективни състояния с фиксиран ъглов момент  $L$  в четно-четни ядра с различни типове колективност. Енергетичното разпределение на тези състояния по отношение на броя на "елементарните възбуждания" (фонони)  $N$ , които ги изграждат е добре възпроизведено и интерпретирано като е използвана редукцията на  $Sp(12, R)$  до некомпактното пряко произведение  $Sp(4, R) \otimes SO(3)$ , което изолира различни съвкупности от състояния с дадена фиксирана стойност на ъгловия момент  $L$ . В тази редукция,  $Sp(4, R)$  може да бъде разглеждана като класификационна група на

базисните състояния на системата. Собствените стойности на хамилтониана за състоянията с дадена стойност на  $L$  дават разпределението на енергиите като функция на броя на възбужданията  $N$ . В приложенията на теорията, освен деформиранията ядра са разгледани и някои ядра, близки до сферичните с типично вибрационен спектър. Анализът на резултатите очертава както общите, така и специфичните черти на двата основни типа на колективно движение.

- В Глава 19 [A21, B25] е изследвана още една редукиционна верига на динамичната група  $Sp(12, R)$  през подгрупата на прякото произведение  $Sp(2, R) \otimes SO(6)$ , която разширява областта на приложение на модела за описанието на ротационно-вибрационен тип ядрени спектри, които в теорията на ядрената структура се генерират от хамилтониани съдържащи потенциали на Davidson. За да се осигури пълното означаване на базисните състояния на системата, е използвана редицата  $SO(6) \supset SU(3) \otimes O(2) \supset SO(3)$ . След определяне на съответствието между тези състояния и експериментално наблюдаваните колективни състояния от основната и серия от възбудени ивици се получава просто и пряко приложение към реалните ядрени системи от областта на редките земи и леките актиниди.
- На края в Глава 20 [A23, A24, B28] са изследвани общите характеристики на проектирането на бозонни двойки върху нов тип бозони. Общите резултати получени от точното проектиране на  $sp(2d, R)$  алгебрата върху  $u(d)$ -бозонната алгебра, после се прилагат към частния случай на алгебрата  $sp(12, R)$ , ( $d = 6$ ), която е алгебрата на динамична симетрия на МВВБ. В резултат е получено Дайсоновото изображение на МВВБ върху версия на стандартния МВБ с динамична симетрия  $u(21)$ , която съдържа  $S$  с  $(T = 1)$ - ,  $D$  с  $(T = 1)$ - и  $P$  с  $(T = 0)$ -бозони, където  $T$  е изоспина на бозоните. Обсъдени са проблема за елиминирането на духовите състояния и възстановяването на ермитовостта на това бозонно представяне. Намерен е образа на ротационния хамилтониан на МВВБ в пространството на  $S$ - ,  $D$ - и  $P$ -бозоните.

Научните изследвания, включени в настоящата дисертация са проведени главно в Лабораторията по теория на ядрото към Направление теоретична физика на Института за ядрени изследвания и ядрена енергетика на Българската академия на науките. Малък колектив от сътрудници на Лабораторията, начело с покойните вече Петър Райчев и Руси Русев основа и работи в областта на развитието и приложенията на групово-теоретичните методи в теорията на ядрената структура. В много отношения тази група имаше пионерска роля и създаде нови направления в тази важна област от изследвания. Като примери в това отношение могат да се посочат

първия вариант на Модела на двата векторни бозона – модела на нарушената  $SU(3)$ -симетрия, идеята за включване на класификационната група в обобщена група на динамична симетрия, първите приложения на  $q$ -деформираната  $SU_q(2)$  алгебра при описание на ротационните спектри в ядрата и редица други. Като аспирантка, а по-късно и сътрудник в този колектив, аз имах възможността да се уча, да черпя идеи, а по-късно и да се развивам самостоятелно, като някои от представените тук резултати могат да се разглеждат, като ново, на по-съвременно ниво развитие на дейността на групата още от началото на осемдесетте години. За да се отчете приемствеността, Част IV на дисертацията е посветена на Петър Райчев и Руси Русев. Актуалността на съществено новият материал в тази част се потвърждава от съдържащата се в нея, защитена 2005 г. от моя аспиранта Хубен Ганев докторска дисертация на тема “*Приложение на нови динамични симетрии от симплектичното разширение на Модела на взаимодействащи векторни бозони за описание на колективни движения в ядрата*”.

По-голямата част от представения в този труд материал е от последните десет години, през които работихме съвместно и с неоченимата подкрепа на групата по ядрена физика, ръководена от Проф. Jerry P. Draayer към Факултета по физика и астрономия на Щатския Университет на Луизиана в САЩ. Част I съдържа особено актуалното през последните две десетилетия направление на математическата физика, свързано със специфичните деформации на бозонните и фермионните представяния на симплектичните алгебри. Класификационните приложения в Част II са актуални, поради връзката им с възможността да се изследва систематично натрупаното голямо количество нови експериментални данни, като същевременно определя тяхната теоретична интерпретация и описание. Това е актуално направление на ядрената физика в световен мащаб, което хвърля мост между теоретичните и експериментални изследвания. Моделът на сдвояващите корелации, представен в Част III е микроскопичен модел, който е актуален с възможностите си коректно да интерпретира и анализира информацията за енергите на особено важните за астрофизиката изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния. Той се съдържа в докторската дисертация “*Group theoretical approach to pairing and non-linear phenomena in atomic nuclei*” на Кристина Д. (Свирачева) Launey, защитена 2003 г. в Щатския Университет на Луизиана в САЩ, под двойното ръководство на Проф. J. P. Draayer и А. Георгиева.

Част I

Бозонни и фермионни представяния в  
симплектичен подход



## 2. Класически и деформирани бозонни представяния на $sp(4, R)$ и нейните подалгебри

Като начало ще разгледаме най-простия, двумерен случай на симплектична алгебра –  $sp(4, R)$ , която може да се използва като алгебра на динамична симетрия.  $Sp(4, R)$  е некомпактна група, която е изоморфна на  $O(3, 2)$  [3]. Редукцията от  $sp(4, R)$  до подалгебрата  $u(2) = su(2) \oplus u(1) \sim so(3) \oplus o(2)$  поражда класификационна схема на базисни състояния, които имат ротационен характер. Съществуват и три редукции до представяния на некомпактната подалгебра  $u(1, 1) = su(1, 1) \oplus u(1)$ , които са важни за пълната класификация на базисните състояния на системата.

Въпреки, че  $sp(4, R)$  е най-простия нетривиален случай на некомпактна симплектична алгебра, тя се появява в различни физически приложения [4, 5]. Тя служи също и като нагледен пример са точно решими тестови модели [3]. Приложенията ѝ зависят от различните възможности за интерпретация на квантовите числа на бозоните, използвани за построяване на представянията ѝ. Допълнително към нейната употреба като алгебра на динамична симетрия в някои колективни модели на ядрената структура [6],  $sp(4, R)$  може да се използва за пълна класификация на енергиите на състоянията от ираст ивиците в четно-четните ядра [A8]. И тъй като е сравнително лесно да се обобщят резултатите за  $sp(4, R)$  към алгебри от по-висок ранг, характеристики разкрити за  $sp(4, R)$ , имат широки приложения, например при бозонизацията на други симплектични структури [7]. Друго приложение на  $sp(4, R)$  е използването ѝ в проекционни методи [8], където основната цел е да се опрости хамилтониана на изходния проблем [A23]. Във всички споменати приложения, реализацията на  $sp(4, R)$  алгебрата, получена в термини на бозонни оператори на раждане и унищожение е особено подходяща.

През последното десетилетие много усилия, както от чисто математическа, така и от физическа гледна точка [A23, 9–11] бяха насочени към деформирането на различни класически алгебри на Ли. Обща характеристика на тези деформации е, че в някаква граница на параметъра на деформация  $q$ ,  $q$ -алгебрата се свежда до класическата алгебра на Ли. Ясно е, че така може да се реализират повече от една деформация на една и съща класическа алгебра, които могат да бъдат използвани в различни физически приложения. Съществуват много прилики между класическите и деформираните алгебри, особено по-отношение на пространствата на действие на

техните представяния. Изучаването на деформирани алгебри може да доведе и до по-задълбочено разбиране на физическия смисъл на самата деформация.

Това е накратко нашата аргументация за представеното в тази глава изследване на бозонните представяния на алгебрата  $sp(4, R)$ . Започваме с добре известното представяне на тази алгебра в термини на класически бозонни оператори на раждане и унищожение и разглеждаме всичките ѝ подалгебри, както и различните начини за определяне на базисните състояния, чрез собствените стойности на операторите, които им съответстват. След това въвеждаме и деформация на същата алгебра чрез стандартни  $q$ -бозони и следвайки същата процедура изследваме така получената обвиваща алгебра на  $sp(4, R)$  и действието на нейните генератори върху базиса, който остава същия.

## 2.1 Бозонно представяне на $sp(4, R)$ алгебрата

В този параграф се прави преглед на някои основни характеристики на бозонното представяне на  $sp(4, R)$  алгебрата [6, 12]. Операторите  $b_i^\dagger$  и  $b_i$ ,  $i = \pm 1$ , които удовлетворяват Bose комутационни съотношения

$$[b_i, b_k^\dagger] = \delta_{i,k}, \quad [b_i^\dagger, b_k^\dagger] = [b_i, b_k] = 0, \quad (2.1)$$

са естествения език за описание на двумерния хармоничен осцилатор [3]. Те действат в Хилбертовото пространство  $\mathcal{H}$  с вакуум  $|0\rangle$  определен от  $b_i |0\rangle = 0$ . Скаларното произведение в  $\mathcal{H}$  е избрано така, че  $b_i^\dagger$  е ермитово спрягнат на  $b_i$   $[(b_i^\dagger)^* = b_i]$  и  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Векторите

$$|\nu_1, \nu_{-1}\rangle = \frac{(b_1^\dagger)^{\nu_1} (b_{-1}^\dagger)^{\nu_{-1}}}{\sqrt{\nu_1! \nu_{-1}!}} |0\rangle, \quad (2.2)$$

където  $\nu_1, \nu_{-1}$  пробягват всички неотрицателни цели числа, образуват ортонормален базис в  $\mathcal{H}$ . Те са общи собствени вектори на операторите на броя на бозоните  $N_1 = b_1^\dagger b_1$ ,  $N_{-1} = b_{-1}^\dagger b_{-1}$  и  $N = N_1 + N_{-1}$ :

$$\begin{aligned} N_1 |\nu_1, \nu_{-1}\rangle &= \nu_1 |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \\ N_{-1} |\nu_1, \nu_{-1}\rangle &= \nu_{-1} |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \\ N |\nu_1, \nu_{-1}\rangle &= \nu |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

където  $\nu = \nu_1 + \nu_{-1}$  и

$$N_i = N_i^*, \quad [N_i, b_i^\dagger] = b_i^\dagger, \quad [N_i, b_i] = -b_i; \quad i = \pm 1. \quad (2.4)$$

Бозонното представяне на  $sp(4, R)$  се задава по стандартния начин от операторите

$$F_{i,j} = b_i^\dagger b_j^\dagger, \quad G_{i,j} = F_{i,j}^* = b_i b_j, \quad A_{i,j} = A_{j,i}^* = b_i^\dagger b_j + \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

където  $i, j = \pm 1$  [12]. То е приводимо и се разлага на две неприводими представяния, всяко от които действа в подпространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  на  $\mathcal{H}$  означени със собствените стойности на инвариантния за  $sp(4, R)$  оператор  $P = (-1)^N$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad P|\varphi_{\pm}\rangle = \pm|\varphi_{\pm}\rangle, \quad |\varphi_{\pm}\rangle \in \mathcal{H}_{\pm}.$$

С други думи  $\mathcal{H}_+$  е опънато върху векторите (2.2), за които  $\nu = \nu_1 + \nu_{-1}$  е четно и съответно  $\mathcal{H}_-$  от тези с  $\nu$ -нечетно.

Максималната компактна подгрупа  $U(2)$  на  $Sp(4, R)$  се генерира от генераторите на Weyl  $A_{i,j}$ , както и от добре известният еквивалентен набор от оператори

$$I_+ = b_1^\dagger b_{-1}, \quad I_- = I_+^* = b_{-1}^\dagger b_1, \quad I_0 = I_0^* = \frac{1}{2}(b_1^\dagger b_1 - b_{-1}^\dagger b_{-1}), \quad N \quad (2.5)$$

които удовлетворяват комутационните съотношения

$$[I_0, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}, \quad [I_+, I_-] = 2I_0, \quad [N, I_{\pm}] = 0, \quad [N, I_0] = 0. \quad (2.6)$$

Операторите  $I_0, I_{\pm}$  затварят алгебрата  $su(2) \sim so(3)$ . Операторът  $N$  генерира  $u(1)$  и играе ролята на инвариант от първи порядък (2.6) на  $U(2) = SU(2) \otimes U(1)$ . Всяко от подпространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  се разлага на пряка сума от собствени подпространства на  $N$ , определени от условието  $\nu$  да е фиксирано.

$$\mathcal{H}_+ = \bigoplus_{\nu} \mathcal{H}_{\nu}^+, \quad \mathcal{H}_- = \bigoplus_{\nu} \mathcal{H}_{\nu}^-. \quad (2.7)$$

Така, във всяко от пространствата  $\mathcal{H}_{\nu}^{\pm}$  се реализира едно унитарно неприводимо представяне (УНП) на  $U(2)$ .

Друга възможност за означаване на базисните вектори (2.2) е да се използва собствената стойност на оператора на Casimir от втори порядък за  $SU(2)$

$$\mathbf{I}^2 = \frac{1}{2}(I_+ I_- + I_- I_+) + I_0 I_0 = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right), \quad (2.8)$$

и третата му проекция,  $I_0$ :

$$\mathbf{I}^2|i, i_0\rangle = i(i+1)|i, i_0\rangle, \quad I_0|i, i_0\rangle = i_0|i, i_0\rangle,$$

където от (2.8)  $i = \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_{-1})$ ,  $i_0 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_{-1})$  получаваме

$$|i, i_0\rangle = \frac{(b_1^\dagger)^{(i+i_0)}(b_{-1}^\dagger)^{(i-i_0)}}{\sqrt{(i+i_0)!(i-i_0)!}}|0\rangle \equiv |\nu_1, \nu_{-1}\rangle. \quad (2.9)$$

Прилагайки  $\nu$  пъти повишаващите и понижаващите оператори  $I_{\pm}$ ,

$$I_{\pm}|i, i_0\rangle = \sqrt{(i \mp i_0)(i \pm i_0 + 1)}|i, i_0\rangle, \quad (2.10)$$

върху състоянието с най-ниско тегло  $|i, -i\rangle$  (най-високо тегло  $|i, i\rangle$ ) се получават всички базисни състояния на дадено представяне.

Представява интерес и изследването на некомпактното съдържание на бозонното представяне на  $sp(4, R)$ .



Наборът от оператори

$$F_0 \equiv F_{1,-1} = b_1^\dagger b_{-1}^\dagger, \quad G_0 \equiv G_{1,-1} = b_1 b_{-1}, \quad A_0 = \frac{1}{2}(N+1)$$

дават представянето  $su^0(1, 1)$  на  $su(1, 1)$  алгебрата. Те комутират по следния начин:

$$[A_0, F_0] = F_0, \quad [A_0, G_0] = -G_0, \quad [F_0, G_0] = -2A_0.$$

Ако към тях се добави и операторът  $I_0$  (2.5) се получава разширението  $u^0(1, 1) = su^0(1, 1) \oplus u^0(1)$ . Операторът на Casimir от втори порядък на тази подгрупа се дава от

$$C_2(SU^0(1, 1)) = (A_0)^2 - \frac{1}{2}(F_0 G_0 + G_0 F_0) = (I_0 + \frac{1}{2})(I_0 - \frac{1}{2}). \quad (2.12)$$

Квадратното уравнение  $(i_0 + \frac{1}{2})(i_0 - \frac{1}{2}) = \phi(\phi + 1)$  има две решения за  $\phi$ :  $\phi_1 = i_0 - \frac{1}{2}$  and  $\phi_2 = -i_0 - \frac{1}{2}$ . Така за реалните отрицателни стойности на  $\phi_{1,2}$  се реализира дискретната положителна серия  $D^+$  от УНП на  $su(1, 1)$ . Съответните спектри на  $\phi_1(i_0 \leq 0)$  и  $\phi_2(i_0 \geq 0)$  са:

$\phi_1$	=	$-\frac{1}{2},$	$-1,$	$-\frac{3}{2},$	$\dots$
$i_0$	=	$0,$	$-\frac{1}{2},$	$-1,$	$\dots$
$\phi_2$	=	$-\frac{1}{2},$	$-1,$	$-\frac{3}{2},$	$\dots$
$i_0$	=	$0,$	$\frac{1}{2},$	$1,$	$\dots$

В рамките на  $su^0(1, 1)$  се появява израждане - в  $\mathcal{H}_{i_0}^\pm$  и  $\mathcal{H}_{-i_0}^\pm$  се реализира едно и също УНП на  $su(1, 1)$ . Това израждане се сваля от оператора  $I_0$ , т.е. след разширението на  $su^0(1, 1)$  до  $u^0(1, 1)$ . Във всяко представяне от  $D^+$ , спектърът на  $A_0 = \frac{1}{2}(N+1)$  се дава от  $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\nu+1) = -\phi_i, -\phi_i+1, -\phi_i+2, \dots, i=1, 2$ .

2. Следва изучаването на две взаимно допълнителни представяния  $su^+(1, 1)$  и  $su^-(1, 1)$  на алгебрата  $su(1, 1) \subset sp(4, R)$  действащи в  $\mathcal{H}$ . Те се дават от операторите

$$F_\pm = \frac{1}{2}F_{\pm 1, \pm 1}, \quad G_\pm = \frac{1}{2}G_{\pm 1, \pm 1}, \quad A_\pm = \frac{1}{2}(N_{\pm 1} + \frac{1}{2}),$$

които имат следните комутационни съотношения:

$$[A_\pm, F_\pm] = F_\pm, \quad [A_\pm, G_\pm] = -G_\pm, \quad [F_\pm, G_\pm] = -2A_\pm.$$

Лесно се вижда, че всеки от генераторите на  $SU^+(1, 1)$  комутира с всички генератори на другата  $SU^-(1, 1)$  подгрупа. Операторите на Casimir от втори порядък на тези подгрупи са

$$C_2(SU^\pm(1, 1)) = (A_0^\pm)^2 - \frac{1}{2}(F_\pm G_\pm + G_\pm F_\pm) = -\frac{3}{16}. \quad (2.13)$$

Уравнението  $\phi(\phi + 1) = -\frac{3}{16}$  има две решения:  $\phi_1^\pm = -\frac{1}{4}$  и  $\phi_2^\pm = -\frac{3}{4}$ . Следователно се реализират две унитарни представяния от серията  $D^+$ . Съответните спектри на собствените стойности  $\alpha_\pm = \frac{1}{2}(\nu_{\pm 1} + \frac{1}{2})$  на операторите  $A_\pm$  за  $\phi_1^\pm = -\frac{1}{4}$  се дават от

$$\begin{array}{l} \alpha_\pm = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \dots \\ \nu_{\pm 1} = 0, 2, 4, \dots \end{array} \quad (2.14)$$

и за  $\phi_2^\pm = -\frac{3}{4}$  от

$$\begin{array}{l} \alpha_\pm = \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \dots \\ \nu_{\pm 1} = 1, 3, 5, \dots \end{array} \quad (2.15)$$

В този случай добавянето на операторите  $N_{\mp 1}$  разглеждани като генератори на представянията  $U^\mp(1)$  на групата  $U(1)$ , разширяват  $su^\pm(1, 1)$  до  $u^\pm(1, 1) = su^\pm(1, 1) \oplus u^\mp(1)$ .  $N_{\mp 1}$  действат като оператори на Casimir от първи порядък на  $U^\pm(1, 1)$ . Пространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  се разлагат на преки суми на собствените подпространства на  $N_{-1}$  и  $N_1$  по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+ &= \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}=2k}(\phi = -\frac{1}{4}) \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}=2k+1}(\phi = -\frac{3}{4}) \right), \\ \mathcal{H}_- &= \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}=2k}(\phi = -\frac{3}{4}) \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}=2k+1}(\phi = -\frac{1}{4}) \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Във всяко  $\mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}}^\pm(\phi_i)$ ,  $i = 1, 2$  се реализира УНП на  $u(1, 1)$ . Израждането, което се получава на нивото на  $su(1, 1)$  се премахва напълно след разширението ѝ до  $u^\pm(1, 1)$ . Подпространствата  $\mathcal{H}_{\nu_{\mp 1}}^\pm(\phi_i)$ ,  $i = 1, 2$  са представени в Таблица 2.1 от диагоналите определени от условието  $\nu_{\mp 1}$  (2.3) да са фиксирани.

3. На края ще дадем още едно представяне на  $su(1, 1)$  с помощта на обикновена сума от генераторите на  $SU^\pm(1, 1)$ :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(F_{1,1} + F_{-1,-1}), \\ G &= \frac{1}{2}(G_{1,1} + G_{-1,-1}), \\ A &= \frac{1}{2}(N_1 + N_{-1} + 1) \equiv A_0. \end{aligned}$$

## 2.2 Квантова $sp_q(4, R)$ алгебра

### 2.2.1 $q$ -бозони

За да се прилагат квантовите алгебри успешно във физиката, е необходима добре развита теория на тяхните представяния. В този параграф ще конструираме по аналогия с изложеното в предишния, една  $q$ -деформация  $sp_q(4, R)$  на бозонното представяне на  $sp(4, R)$  [10] с помощта на  $q$ -деформация на класическите бозони. Операторите  $b_i^\dagger$  и  $b_i$ ,  $i = \pm 1$ , се деформират като се използва трансформацията [14]:

$$a_i^\dagger = \sqrt{\frac{[N_i]}{N_i}} b_i^\dagger, \quad a_i = \sqrt{\frac{[N_i+1]}{N_i+1}} b_i, \quad (2.17)$$

където  $[X] \equiv \frac{q^X - q^{-X}}{q - q^{-1}}$ . Очевидно и в случая  $(a_i^\dagger)^* = a_i$ . Деформацията на класическите бозонни оператори на раждане и унищожение  $b_i^\dagger$  и  $b_i$ ,  $i = \pm 1$  може да се интерпретира като се анализира развитието на коефициентите в (2.17) в термини на деформационния параметър  $\tau$ , въведен чрез  $q = e^\tau$ :

$$\frac{[N_i]}{N_i} = 1 + \frac{1}{6} (N_i^2 - 1) \tau^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{10} N_i^4 - \frac{1}{3} N_i^2 + \frac{7}{30} \right) \tau^4 + O(\tau^6). \quad (2.18)$$

В този случай се получава безкраен ред съдържащ всички четни степени на параметъра на деформация, както и всички четни степени на класическите оператори на броя на бозоните  $N_i$ .

Една от най-успешните стъпки в развитието на теорията на представянията на квантовите групи е въвеждането на  $q$ -деформираната осцилаторна реализация в [15, 16]. От (2.17) лесно се получават  $q$ -деформираните комутационни съотношения за деформираните осцилатори

$$a_i a_i^\dagger - q^1 a_i^\dagger a_i = q^{-N_i}, \quad (2.19)$$

$$a_i a_i^\dagger - q^{-1} a_i^\dagger a_i = q^{N_i}, \quad (2.20)$$

$$[a_i, a_k^\dagger] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_k^\dagger] = [a_i, a_k] = 0, \quad i \neq k.$$

В термини на деформираните бозонни оператори базисните вектори (2.17) са ( $a_i |0\rangle = 0$ ):

$$|\nu_1, \nu_{-1}\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{\nu_1} (a_{-1}^\dagger)^{\nu_{-1}}}{\sqrt{[\nu_1]! [\nu_{-1}]!}} |0\rangle \equiv \frac{(b_1^\dagger)^{\nu_1} (b_{-1}^\dagger)^{\nu_{-1}}}{\sqrt{\nu_1! \nu_{-1}!}} |0\rangle, \quad (2.21)$$

където  $[X]! = [1][2][3]\dots[X]$ . Очевидно е, че спектрите (2.3) на операторите  $N_i$ ,  $i = \pm 1$  се запазват. Лесно се проверява, че техните съотношения с  $q$ -деформираните бозони са същите като тези дадени в (2.4)

$$[N_i, a_i] = -a_i, \quad [N_i, a_i^\dagger] = a_i^\dagger. \quad (2.22)$$

$q$ -бозонното представяне на  $q$ -деформираната алгебра  $sp_q(4, R)$  действащо в пространството на Фок  $\mathcal{H}$  може да се осъществи от операторите

$$F_{i,j}^q = a_i^\dagger a_j^\dagger, \quad G_{i,j}^q = (F_{j,i}^q)^* = a_i a_j, \quad i, j = \pm 1 \quad (2.23)$$

$$J_\pm = a_{\pm 1}^\dagger a_{\mp 1}, \quad J_0 = \frac{1}{2} (N_1 - N_{-1}) \equiv I_0, \quad N = N_1 + N_{-1}. \quad (2.24)$$

В това представяне повишаващите и понижаващите оператори  $F_{i,j}^q, G_{i,j}^q$  и  $J_+, J_- = J_+^*$  са деформирани. Пълният набор от оператори  $N$  и  $I_0$  използван в случая на  $sp(4, R)$  се запазва след деформацията. Това позволява да презапишем базисните състояния (2.21) по следния начин (сравни с (2.9))

$$|\nu_1, \nu_{-1}\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m} (a_{-1}^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{[j+m]! [j-m]!}} |0\rangle, \quad (2.25)$$

където

$$N|j, m\rangle = 2j|j, m\rangle, \quad J_0|j, m\rangle = m|j, m\rangle; \quad (j \equiv i, m \equiv i_0).$$

Веднага може да се провери, че

$$\begin{aligned} [J_{\pm}, N] &= 0, & [J_0, N] &= 0, \\ [F_{i,j}^q, N] &= -2F_{i,j}^q, & [G_{i,j}^q, N] &= 2G_{i,j}^q. \end{aligned}$$

Следователно и в този случай операторът  $P = (-1)^N$  комутира с всички елементи от разглежданото представяне на  $sp_q(4, R)$ . С други думи, след деформацията разлагането  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$  остава същото като  $q$ -бозонното  $sp_q(4, R)$  представяне се разпада на две неприводими представяния действащи в пространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  съответно.

### 2.2.2 Редукции по подалгебрите на $sp_q(4, R)$

Редукциите по подалгебри също не се променят в деформирания случай. В  $\mathcal{H}$  действията приводимо представяне на  $u_q(2)$  определено от  $N$  и операторите  $J_{\pm}, J_0$  (2.24), които комутират по следния начин:

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]. \quad (2.26)$$

Тъй като операторът  $N$  действа също и като инвариант от първи порядък на  $u_q(2)$ , разлагането (2.7) на пространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  остава същото след деформацията. Във всяко от пространствата  $\mathcal{H}_v^{\pm}$  също действа УНП на  $su_q(2)$  генерирано от  $J_0, J_{\pm}$ . Операторът на Casimir от втори порядък в този случай е

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + \frac{1}{2}([J_0][J_0 + 1] + [J_0][J_0 - 1]) = \\ &= J_+J_- + [J_0][J_0 - 1] = J_-J_+ + [J_0][J_0 + 1] = \left[\frac{N}{2}\right] \left[\frac{N}{2} + 1\right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Уравнението за собствените му стойности има вида

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = [j][j + 1]|j, m\rangle.$$

Действието на деформираните оператори  $J_{\pm}$  е:

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{[j \pm m + 1][j \mp m]}|j, m\rangle. \quad (2.28)$$

Действайки  $2j$  пъти с  $J_{\mp}$  върху състоянията с най-високо (най-ниско) тегло -  $|j, j\rangle$  ( $|j, -j\rangle$ ), в пространствата  $\mathcal{H}_v^{\pm}$  се получава целия базис на дадено УНП на  $su_q(2)$  (ред в Таблица 2.1). Така в рамките на бозонното представяне на  $sp_q(4, R)$  се получава пълно описание на УНП на деформираната  $su_q(2)$  алгебра.

До тук представихме компактната структура в деформираната  $sp_q(4, R)$  и сега преминаваме към описание на некомпактните случаи.

1. В пространството  $\mathcal{H}$  действа деформацията  $u_q^0(1, 1)$  [14] на  $u^0(1, 1)$  алгебрата. Тя е породена от операторите

$$\begin{aligned} K_+^0 &= F_{1,-1}^q = a_1^\dagger a_{-1}^\dagger, & K_-^0 &= G_{1,-1}^q = a_1 a_{-1}, \\ K_0^0 &= \frac{1}{2}(N+1), & J_0 &, \end{aligned}$$

които удовлетворяват следните комутационни съотношения:

$$\begin{aligned} [K_0^0, K_\pm^0] &= \pm K_\pm^0, & [K_+^0, K_-^0] &= -[2K_0^0], \\ [K_0^0, J_0] &= 0, & [K_\pm^0, J_0] &= 0. \end{aligned}$$

Редукцията на  $\mathcal{H}$  на собствени подпространства на оператора  $J_0 = I_0$  (2.11) е инвариантна по отношение на деформацията. Така УНП (стълбите) на  $u_q^0(1, 1)$  действат в  $\mathcal{H}_m^\pm$ ,  $m \equiv i_0$ . УНП на  $su_q^0(1, 1) \subset u_q^0(1, 1)$  генерирани от операторите  $K_\pm^0, K_0^0$  също действат в  $\mathcal{H}_m^\pm$ . Инвариантният оператор на Casimir от втори порядък за  $SU_q^0(1, 1)$  се дава от:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^0)^2 &= \frac{1}{2}([K_0^0][K_0^0 + 1] + [K_0^0][K_0^0 - 1]) - \frac{1}{2}(K_+^0 K_-^0 + K_-^0 K_+^0) \equiv \\ &\equiv [K_0^0][K_0^0 + 1] - K_-^0 K_+^0 \equiv \\ &\equiv [K_0^0][K_0^0 - 1] - K_+^0 K_-^0 = [J_0]^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Последният израз е получен с помощта на съотношенията

$$\begin{aligned} K_+^0 K_-^0 &= \left[\frac{N}{2}\right]^2 - [J_0]^2, \\ [K_0^0][K_0^0 - 1] &= \left[\frac{N}{2}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2. \end{aligned}$$

В резултат собствените стойности на  $(\mathbf{K}^0)^2$  върху базисните вектори са

$$(\mathbf{K}^0)^2 |j, m\rangle = \left([m] + \left[\frac{1}{2}\right]\right) \left([m] - \left[\frac{1}{2}\right]\right) |j, m\rangle.$$

Уравнението

$$\left([m] + \left[\frac{1}{2}\right]\right) \left([m] - \left[\frac{1}{2}\right]\right) = \phi^q \left(\phi^q + 2 \left[\frac{1}{2}\right]\right)$$

има две решения за  $\phi^q$ :  $\phi_1^q = [m] - \left[\frac{1}{2}\right]$  и  $\phi_2^q = -[m] - \left[\frac{1}{2}\right]$ . Като наложим условието  $\phi^q < 0$  за  $q > 0$  получаваме описание на деформираните дискретни серии  $D_q^+$  на  $su_q^0(1, 1)$ . Спектрите пробягвани едновременно от  $\phi_i^q$  и  $m$  са за  $\phi_1^q < 0$  ( $m \leq 0$ ):

$\phi_1^q =$	$-\left[\frac{1}{2}\right]$	$-2\left[\frac{1}{2}\right]$	$-[1] - \left[\frac{1}{2}\right]$	$-\left[\frac{3}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] \dots$
$m =$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2} \dots$

и за  $\phi_2^q < 0$  ( $m \geq 0$ ):

$\phi_1^q =$	$-\left[\frac{1}{2}\right]$	$-2\left[\frac{1}{2}\right]$	$-[1] - \left[\frac{1}{2}\right]$	$-\left[\frac{3}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\right] \dots$
$m =$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2} \dots$

Поради квадратичната зависимост от  $[J_0]$  в (2.29), в спектрите се получава израждане от същия тип като в недеформирания случай. Трябва да отбележим, обаче, че в този случай израждането се премахва също от оператора  $J_0$ , който остава недеформиран и играе ролята на инвариант от първи порядък за  $u_q^0(1, 1)$ . Спектърът на  $K_0^0 = \frac{1}{2}(N + 1)$ , който също не е деформиран е свързан с недеформираното  $\phi$  ( $\phi \xrightarrow{q \rightarrow 1} \phi$ ), така че имаме:

$$\frac{1}{2}(\nu + 1) = -\phi, -\phi + 1, -\phi + 2, \dots$$

2. На края ще обсъдим деформациите  $u_q^\pm(1, 1)$  [14] на двете взаимно допълнителни представяния  $u^\pm(1, 1)$ , всяко от които е реализирано само от един тип  $q$ -бозони. Операторите

$$\begin{aligned} K_+^\pm &= \frac{1}{[2]} F_{\pm 1, \pm 1}^q = \frac{1}{[2]} a_{\pm 1}^\dagger a_{\pm 1}, & K_-^\pm &= \frac{1}{[2]} G_{\pm 1, \pm 1}^q = \frac{1}{[2]} a_{\pm 1} a_{\pm 1}, \\ K_0^\pm &= \frac{1}{2}(N_{\pm 1} + \frac{1}{2}), & N_{\mp 1} & \end{aligned} \quad (2.30)$$

комутират по между си по следния начин:

$$\begin{aligned} [K_0^\pm, K_\pm^\pm] &= \pm K_\pm^\pm, & [K_+^\pm, K_-^\pm] &= -[2K_0^\pm]_2, \\ [K_0^\pm, N_{\mp 1}] &= 0, & [K_\pm^\pm, N_{\mp 1}] &= 0, \end{aligned}$$

като е използвано означението  $[X]_m \equiv \frac{q^{mX} - q^{-mX}}{q^m - q^{-m}}$ . Недеформираните оператори  $N_{\mp 1}$  разширяват  $su_q^\pm(1, 1)$  до  $u_q^\pm(1, 1)$  и действат като инварианти от първи порядък. Инвариантът от втори порядък има леко променен вид в сравнение с (2.29)

$$\begin{aligned} C_2\{SU_q^\pm(1, 1)\} &= [K_0^\pm]_2 [K_0^\pm + 1]_2 - K_-^\pm K_+^\pm = \\ &= [K_0^\pm]_2 [K_0^\pm - 1]_2 - K_+^\pm K_-^\pm. \end{aligned}$$

В този случай в сила са следните изрази:

$$\begin{aligned} K_-^\pm K_+^\pm &= \frac{1}{[2]^2} [N_\pm + 1] [N_\pm + 2], \\ K_+^\pm K_-^\pm &= \frac{1}{[2]^2} [N_\pm] [N_\pm - 1] \\ &= \frac{1}{[2]^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2}(2N_\pm - 1) \right]^2 - \left[ \frac{1}{2} \right]^2 \right\}, \\ [K_0^\pm]_2 [K_0^\pm - 1]_2 &= \frac{1}{[2]^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2}(2N_\pm - 1) \right]^2 - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Като резултат получаваме:

$$\begin{aligned} C_2\{SU_q^\pm(1, 1)\} &= (\mathbf{K}^\pm)^2 = \frac{1}{[2]^2} \left( \left[ \frac{1}{2} \right]^2 - 1 \right) \\ &= \left( \left[ \frac{1}{4} \right]_2 - \left[ \frac{1}{2} \right]_2 \right) \left( \left[ \frac{1}{4} \right]_2 + \left[ \frac{1}{2} \right]_2 \right). \end{aligned}$$

Тогава  $q$ -деформираното уравнение

$$(\mathbf{K}^\pm)^2 = {}^q\varphi^\pm ({}^q\varphi^\pm + 2 \left[ \frac{1}{2} \right]_2)$$

има следните решения:

$${}^q\varphi_1^\pm = \left[ \frac{1}{4} \right]_2 - \left[ \frac{1}{2} \right]_2, \quad {}^q\varphi_2^\pm = - \left[ \frac{1}{4} \right]_2 - \left[ \frac{1}{2} \right]_2,$$

което значи, че в пространството  $\mathcal{H}$  се реализират дискретните серии на две  $q$ -деформирани представяния на  $su_q(1, 1)$  за всеки от двата типа бозони (с индекс  $+1$  или  $-1$ ). Спектрите на  $K_0^\pm$  съответстват на граничния преход  ${}^q\varphi_i^\pm \xrightarrow{q \rightarrow 1} \varphi_i^\pm$ ,  $i = 1, 2$  и съвпадат със спектрите на операторите  $A_\pm$  в недеформирания случай (виж уравнения (2.14) и (2.15)). Тук отново разширението от  $su_q^\pm(1, 1)$  до  $u_q^\pm(1, 1) = su_q^\pm(1, 1) \oplus u^\mp(1)$  се осъществява чрез добавянето на операторите  $N_{\mp 1}$ . Така израждането се сваля по същия начин както в недеформирания случай. Сега пространствата в които действат неприводимите бозонни представяния на класическите  $u^\pm(1, 1)$  и  $q$ -деформираните  $u_q^\pm(1, 1)$  са едни и същи и разложенията (2.16) са еднакви, тъй като е в сила

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu_\mp} \left( {}^q\varphi_1^\pm = - \left[ \frac{1}{4} \right]_2 - \left[ \frac{1}{2} \right]_2 \right) &\equiv \mathcal{H}_{\nu_\mp} \left( \alpha_1^\pm = -\frac{3}{4} \right), \\ \mathcal{H}_{\nu_\mp} \left( {}^q\varphi_2^\pm = \left[ \frac{1}{4} \right]_2 - \left[ \frac{1}{2} \right]_2 \right) &\equiv \mathcal{H}_{\nu_\mp} \left( \alpha_2^\pm = -\frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Разгледани са бозонното представяне на  $sp(4, R)$  алгебрата и нейната деформация  $sp_q(4, R)$ . Изходното, както и деформираното представяния действат в едно и също пространство на Фок  $\mathcal{H}$ . Те са приводими и се разлагат на две неприводими представяния, действащи в подпространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  на  $\mathcal{H}$ .

Деформираното представяне  $sp_q(4, R)$  се основава на стандартната  $q$ -деформация на двукомпонентната алгебра на Heisenberg, реализирана чрез оператори на раждане и унищожение. В този случай осем от десетте генератора са деформирани, но пълният набор от оператори на броя на бозоните  $N_1$  и  $N_{-1}$  (или техните линейни комбинации  $N$  и  $J_0$ ) се запазват такива каквито са в “класическия” случай. Последните не могат да се изразят в термини на деформирани бозони. Подалгебрите на

бозонната  $sp(4, R)$  (компактната  $u(2)$  и некомпактната  $u^\varepsilon(1, 1)$  с  $\varepsilon = 0, \pm$ ) са също деформирани и техните деформирани представяния се съдържат в  $sp_q(4, R)$ . Те са приводими в пространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$  и се разлагат на неприводими. По този начин е получено пълно описание на неприводимите унитарни представяния на  $u_q(2)$ , на деформираната стълбична серия  $u_q^0(1, 1)$  и на две деформирани дискретни серии  $u_q^\pm(1, 1)$ .

Редукциите по подалгебри (компактни и некомпактни) на  $sp(4, R)$  и техните деформации позволяват да се конструират модели основани на динамични симетрии. Във всяко от бъдещите приложения и интерпретация на резултатите е важно да се държи сметка за това, че получените деформации не променят базисните състояния в пространството на Фок, а само действието на операторите върху тях. Това от своя страна дава възможност при приложенията, за повече избор при асоциирането на алгебричните оператори, деформирани или недеформирани, с наблюдаемите във физическия проблем. В теорията това означава още и вкарването в матричните елементи на зависимост от параметъра на деформация, даващо възможност за по-голяма гъвкавост и по-богати структури в рамките на алгебричното описание на разглежданите системи.

### 3. Тензорна структура на $q$ -деформираната $sp(4, R)$ супералгебра

Свойствата на квантовите алгебри са много подобни на тези на класическите алгебри на Ли по отношение на тяхната теория на представянията и в резултат на техните възможни физически приложения, особено в случая, когато  $q$  не е корен от единица. Методът на бозонната реализация е приложен за построяването на представянията на Ли алгебрите [10, 17], Ли супералгебрите [18, 19] и “примкови” алгебри (loop algebras) [20]. Удобството на използването на  $q$ -бозонните осцилатори в теорията на представянията на квантовите алгебри естествено води до дефиницията на тензорни оператори в термини на тези осцилатори [21–24]. В различните физически модели и в частност в теорията на ядрената структура неприводимите тензорни оператори по отношение на главната подалгебра на ъгловия момент [25] се използват като генератори на алгебрата на динамична симетрия [A18, 26, 27]. Това позволява по-лесно пресмятане на матричните елементи на тези оператори в подходящ базис, като се използва теоремата на Вигнер-Екарт.

Квантовото обобщение на теорията на неприводимите тензорни оператори и техните произведения е сравнително добре развито за квантовата алгебра  $U_q(su(2))$  [28–30], която може да бъде разглеждана като  $q$ -аналог на квантовата теория на ъгловия момент. В частност коефициентите на Клебш-Гордон и техните свойства на симетрия са изведени в няколко статии (виж например [28] и цитатите вътре). Ние използваме дефиницията на неприводими тензорни оператори и коефициентите на Клебш-Гордон от работа [29]. Там алгебрата на Вигнер-Рака за  $su_q(2)$  е построена като са използвани проекционни оператори. Предимствата на този подход са в неговата независимост от явната реализация на генераторите и на базисните вектори както и в аналогията с много от формулите от квантовата теория на ъгловия момент, когато обикновеното  $c$ -число  $x$  се замени с  $q$ -числото

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad [x]_{q \rightarrow 1} \rightarrow 1. \quad (3.1)$$

Тъй като нашите резултати са опит да се деформира  $sp(4, R)$ , първо правим кратък преглед на използваните дефиниции и означения в §3.1. Неприводимите тензорни оператори (НТО) от ранг  $\frac{1}{2}$  са представени като два  $q$ -бозонни оператора на раждане и унищожение. После НТО от първи ранг се конструират като тензорни произве-

дения на  $su_q(2)$ -спинорите. Някои свойства и съотношения между получените НТО се обсъждат в §3.2.1. Структурата на супералгебрата генерирана от въведените  $q$ -тензорни оператори е изследвана в §3.3.

### 3.1 Основни определения и означения

В настоящата работа се използва основно Jordan - Schwinger реализацията [15, 16] на квантовия аналог на  $su(2)$  алгебрата, построена с помощта на два  $q$ -деформирани бозонни оператора  $a_i^\dagger$  и  $a_i, i = 1, 2$ , дадена в Глава 2 [A1, B2, B4].

Нормализираните състояния  $|jm\rangle_q$  (2.25) са следователно  $q$ -аналози на добре известните квантови състояния на ъгловия момент от базиса на крайномерното неприводимо представяне  $D^j$ . Възможните стойности на ъгловия момент са  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  и съответно за неговата проекция  $m = j, j - 1, \dots, -j$ . Следователно има точна аналогия между размерностите на неприводимите представяния  $D^j$  на  $su_q(2)$  и на  $su(2)$ :  $\dim D^j = 2j + 1$

Действието на  $su_q(2)$  генераторите върху базисните вектори се дава от (2.28). Обобщаването на векторното събиране на ъгловите моменти  $j_1$  и  $j_2$  в  $q$ -деформирания случай се дефинира, както и в “класическия” случай, от развитието на прякото произведение на представянията  $D_1^j \otimes D_2^j$  по неприводими компоненти (серия на Клебш-Гордон). Структурата на серията на Клебш-Гордон за  $su_q(2)$  алгебрата е същата като за класическата  $su(2)$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad m = -j, -j + 1, \dots, j. \quad (3.2)$$

В теорията на квантовите алгебри действието на техните генератори върху прякото (тензорното) произведение на неприводимите представяния се задава от некокомутативното копроизведение, така че компонентите на пълния ъглов момент  $J$  на квантова система състояща се от две подсистеми 1 и 2 се променя по следния начин:

$$J_0 = J_0(1) + J_0(2) \quad (3.3a)$$

$$J_\pm = J_\pm(1)q^{J_0(2)} + q^{-J_0(1)}J_\pm(2) . \quad (3.3b)$$

По дефиниция, съвместима с формулите следващи от сериите на Клебш-Гордон, коефициентите на Клебш-Гордон свързват векторите от куплирания и некуплирания базиси:

$$|j_1 j_2; jm\rangle_q = \sum_{m_1 m_2} q C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} |j_1 m_1(1)\rangle |j_2 m_2(2)\rangle. \quad (3.4)$$

Тук и по-нататък ние ползваме коефициентите на Клебш-Гордон (ККГ) получени в [29]. Те са пресметнати като матрични елементи на проекционни оператори между

вектори от некуплирания базис (дясната страна на (3.4)). Проекционните оператори са представени като степени на генераторите  $J_{\pm}$  (3.3б) и не зависят от тяхния явен вид. Метода на извеждане на ККГ същевременно осигурява тяхната ортогоналност и нормализация. В границата  $q \rightarrow 1$  алгебричните изрази за необходимите ни ККГ се свеждат до съответните им стандартни изрази за ККГ за  $su(2)$ . Тук най-често използваме симетриите на ККГ по отношение на смяната на знаците на проекциите  $m_1, m_2$  и  $m$

$${}_q C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = (-1)^{j_1 + j_2 - j} {}_{q^{-1}} C_{j_1 - m_1 j_2 - m_2}^{j - m} \quad (3.5)$$

и на смяна на местата (пермутация) на събираните моменти:

$${}_q C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} = (-1)^{j_1 + j_2 - j} {}_{q^{-1}} C_{j_2 m_2 j_1 m_1}^{j - m}. \quad (3.6)$$

Сега може да се даде и определението за  $q$  деформирани неприводими тензорни оператори. Както и в случая на “класическото”  $su(2)$  наборът от  $2l + 1$  компоненти  ${}^q T_k^l$ , ( $k = l, l - 1, \dots, -l$ ) са компоненти на  $q$ -аналога на НТО по отношение на  $su_q(2)$  ако действието на генераторите на групата е аналогично на тяхното действие върху векторните състояния  $|jm\rangle$  (2.25). Но в квантовия случай действието на  $q$ -генераторите се определя от тяхното копроизведение (3.3). В резултат компонентите на  $q$ -тензорите удовлетворяват следните комутационни съотношения с генераторите на  $su_q(2)$  алгебрата:

$$[J_0, T_k^l] = k T_k^l \quad (3.7a)$$

$$J_{\pm} T_k^l = q^k T_k^l J_{\pm} + ([l \mp k][l \pm k + 1])^{1/2} T_{k \pm 1}^l q^{-J_0}. \quad (3.7b)$$

Нещо повече, доказано е [18, 29, 31], че за тези тензорни оператори също може да се формулира теорема на Вигнер-Екарт. Така проблемът за изчисляването на техните матрични елементи се свежда до пресмятането на приведените матрични елементи  $\langle j' || T^l || j'' \rangle$  с коефициенти пропорционални на ККГ.

След формулирането на квантовия тензорен оператор  $T_k^l$ ,  $su_q(2)$  базисните вектори  $T_k^l |jm\rangle$ , които се преобразуват съгласно прякото произведение на представянията  $D^j \otimes D^l$  могат да се представят чрез ККГ като линейни комбинации на векторните компоненти  $|rs\rangle$ , трансформиращи се според представянето  $D^r$ :

$${}_q T_k^l |jm\rangle = \sum_{r s} {}_q C_{j m}^{r s} {}_{lk} |lj; rs\rangle. \quad (3.8)$$

С помощта на подобно “проектиране” е лесно да се докаже, че съществува алгебра от  $q$ -тензорни оператори генерирана от тензорните произведения на НТО, които сами по-себе си също са неприводими тензорни оператори [21]:

$${}_q \{T^l \otimes T^j\} = \sum_{r s} {}_q C_{lk}^{rs} {}_{jm} T_s^r. \quad (3.9)$$

След въведените определения можем да изследваме, какъв вид тензорна алгебра може да се конструира от двата  $q$ -бозонни оператора на раждане и унищожение  $a_i^\dagger$  и  $a_i, i = 1, 2$ , (2.19) които бяха използвани в Jordan - Schwinger [15, 16] реализацията на  $su_q(2)$  (2.24).

### 3.2 Деформация в термини на $su_q(2)$ тензорни оператори

#### 3.2.1 Построяване на $q$ -тензорни оператори и техните свойства

Алгебрата  $su_q(2)$  (2.24) може да се генерира от операторите (2.19) представени чрез  $q$ -бозонните оператори на раждане и унищожение  $a_i^\dagger$  и  $a_i, i = 1, 2$ . Тези оператори сами по себе си затварят деформирана алгебра (2.19) и (2.22) на Heisenberg. Нека сега изясним свойствата на операторите на раждане и унищожение по отношение на  $su_q(2)$  представянията. Като основен пример на  $q$ -тензорен оператор Biedenharn [21] дава двойката от оператори на раждане

$$t_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = a_1^\dagger q^{(N_2)/2} \equiv t_1^\dagger, \quad t_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = a_2^\dagger q^{(-N_1)/2} \equiv t_{-1}^\dagger. \quad (3.10)$$

Така че (3.10) е  $q$ -тензорен оператор от ранг  $\frac{1}{2}$ , тъй като двете му компоненти удовлетворяват условията (3.7) за  $l = \frac{1}{2}$ . Лесно се вижда, че двойката от оператори на унищожение:

$$\tilde{t}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = q^{-1/2} a_2 q^{-(N_1)/2} \equiv t_1, \quad \tilde{t}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -q^{1/2} a_1 q^{(N_2)/2} \equiv t_{-1}, \quad (3.11)$$

удовлетворяват същите условия (3.7), като по този начин представляват още един  $q$ -тензорен оператор  $\tilde{t}_{\frac{1}{2}, \alpha}$ . От ермитовостта на операторите на раждане и унищожение следват и съотношенията за спрягане между двата  $q$ -спинора

$$(t_{k, \alpha})^\dagger = (-1)^{(k-\alpha+1)} q^{-\alpha} \tilde{t}_{k, -\alpha}, \quad (\tilde{t}_{k, \alpha})^\dagger = (-1)^{(k-\alpha)} q^{-\alpha} t_{k, -\alpha}. \quad (3.12)$$

Тези съотношения са абсолютно същите като тези за обикновенните  $su(2)$  спинори, когато  $q \rightarrow 1$ . Деформираните тензорни оператори могат да се свържат и с класическите бозонни оператори  $b_i^\dagger, b_i, i = \pm 1$ , като се използват техните трансформации към  $q$ -деформираните осцилатори (2.17).

От комутационните съотношения на осцилаторите (2.19) и от (2.21) се получават следните комутационни съотношения за тензорните оператори:

$$\begin{aligned} [t_k, t_l^\dagger]_{q^\rho} &= q^{-\frac{k}{2}} \delta_{k, -l} q^{-2J_0}, \\ [t_k^\dagger, t_l^\dagger]_{q^\sigma} &= [t_k, t_l]_{q^\sigma} = 0, \\ \rho &= \frac{l-k}{2} = -\sigma, \quad l, k = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

От двата тензорни оператора от ранг  $\frac{1}{2} - t_{\frac{1}{2}}$  и  $\tilde{t}_{\frac{1}{2}}$  могат да се образуват три различни тензорни произведения. Всеки от тях може да бъде коумножен на себе си:

$$\{t_{\frac{1}{2}} \otimes t_{\frac{1}{2}}\} = \bigoplus_{l,m} T_m^l, \quad l = 0, 1, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l, \quad (3.14)$$

$$\{\tilde{t}_{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{t}_{\frac{1}{2}}\} = \bigoplus_{l,m} \tilde{T}_m^l, \quad l = 0, 1, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l. \quad (3.15)$$

Като заместим в (3.9) необходимите  $q$ -ККГ, пресметнати от таблиците в [29], получаваме явния вид на компонентите на  $q$ -тензорите  $T_\mu^1$  и  $\tilde{T}_\mu^1$  изразени чрез  $q$ -бозонните оператори  $a_i^\dagger$  и  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ :

$$T_1^1 = (a_1^\dagger)^2 q^{N_2}, \quad T_{-1}^1 = (a_2^\dagger)^2 q^{-N_1}, \quad T_0^1 = \sqrt{[2]} a_1^\dagger a_2^\dagger q^{-J_0}, \quad (3.16)$$

$$\tilde{T}_1^1 = q^{-1} (a_2)^2 q^{-N_1}, \quad \tilde{T}_{-1}^1 = q^1 (a_1)^2 q^{N_2}, \quad \tilde{T}_0^1 = -\sqrt{[2]} a_1 a_2 q^{-J_0}.$$

Тензорите отговарящи на скаларните представяния в (3.14) и (3.15)  $T_0^0 = 0$  и  $\tilde{T}_0^0 = 0$  поради (2.19) и свойствата на симетрия (3.6) на ККГ. Съотношенията на спрягане за операторите (3.16) са:

$$(T_k^l)^\dagger = (-1)^{(l-k)} q^{-k} \tilde{T}_k^l, \quad (3.17)$$

$$(\tilde{T}_k^l)^\dagger = (-1)^{(l-k)} q^{-k} T_k^l. \quad (3.18)$$

Третото възможно  $q$ -тензорно произведение се получава от умножението на двата спрегнати  $q$ -спинора:

$$\{t_{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{t}_{\frac{1}{2}}\} = \bigoplus_{l,m} L_m^l, \quad l = 0, 1, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l. \quad (3.19)$$

Трябва да се отбележи, че разлагането (3.19) е получено от произведението  $\{t_{\frac{1}{2}} \otimes \tilde{t}_{\frac{1}{2}}\}$ , което се разписва като

$$L_m^1 = \sum_{\mu,\nu} q C_{\frac{1}{2}\mu \frac{1}{2}\nu}^{1m} t_{\frac{1}{2}\nu} \tilde{t}_{\frac{1}{2}\mu} = \sum_{\mu,\nu} q C_{\frac{1}{2}\mu \frac{1}{2}\nu}^{1m} \tilde{t}_{\frac{1}{2}\nu} t_{\frac{1}{2}\mu}. \quad (3.20)$$

Тримерните  $q$ -тензорни оператори  $L_m^l$ ;  $m = 0, -1, +1$  се изразяват явно чрез  $q$ -бозонните оператори по следния начин:

$$\begin{aligned} L_1^1 &= q^{-1} a_1^\dagger a_2 q^{-(N_1+N_2)/2} = q^{-1} J_+ q^{-J_0}, & L_{-1}^1 &= -q a_2^\dagger a_1 q^{-(N_1+N_2)/2} = -q J_- q^{-J_0} \\ L_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( q^{-1} a_2^\dagger a_2 q^{-N_1} - q a_1^\dagger a_1 q^{N_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( q^{-1} [N_2] q^{-N_1} - q [N_1] q^{N_2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( q^{-1} J_- J_+ - q J_+ J_- \right) = -\frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( q^{-1} [2J_0] + (q - q^{-1}) J_+ J_- \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Компонентите на този оператор в същност представляват  $su_q(2)$  генераторите (2.24), представени като неприводими  $q$ -тензорни оператори. Това тензорно произведение дава също и едномерното скалярно представяне

$$L_0^0 = \frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( a_1^\dagger a_1 q^{N_2} + a_2^\dagger a_2 q^{-N_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{[2]}} \left( [N_1] q^{N_2} + [N_2] q^{-N_1} \right) = \frac{[N]}{\sqrt{[2]}} , \quad (3.22)$$

където  $N = N_1 + N_2$  е оператора на пълния брой бозони. Съотношенията за спрягане на компонентите на оператора  $L_m^l$ , които следват от (2.19) и свойствата на симетрия (3.5) и (3.6) на ККГ са

$$(L_m^1)^\dagger = (-1)^{-m} q^{-m} L_{-m}^1 , \quad (3.23)$$

които при  $q \rightarrow 1$  се свеждат до съотношенията за спрягане на неприводимите тензорни оператори от първи ранг на  $su(2)$  или на Картановите компоненти на оператора на ъгловия момент. С помощта на дефиниционните равенства (2.19) и (2.22) и на  $q$ -бозонната реализация (2.24) на  $su_q(2)$  генераторите може да се потвърди, че всичките три тензора  $T_m^1$ ,  $\tilde{T}_m^1$  (3.17) и  $L_m^1$  (3.21) са от 1-ви ранг, тъй като всяка от трите им компоненти удовлетворява определението (3.7) за  $l = 1$ .

На края на този параграф представяме още две важни съотношения, които се получават от (3.21) и (3.22) и се използват в по-нататъшните пресмятания

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= L_0^1 + q L_0^0 = \sqrt{[2]} [N_2] q^{-N_1} = \frac{\sqrt{[2]}}{(q - q^{-1})} (q^{-2J_0} - q^{-N}) , \\ \mathcal{N}_{-1} &= L_0^1 - q^{-1} L_0^0 = -\sqrt{[2]} [N_1] q^{N_2} = \frac{\sqrt{[2]}}{(q - q^{-1})} (q^{-2J_0} - q^N) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

От (3.24) операторите  $q^N$  и  $q^{-N}$  могат да се изразят чрез  $m = 0$  компонентата на  $L_m^1$ ,  $l = 0, 1$  операторите и оператора  $q^{-2J_0}$ .

Така се получава още една  $q$ -деформация,  $sp_t(4, R)$ , на  $sp(4, R)$  алгебрата, с обобщена гаусова декомпозиция

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+ ,$$

построена от тензорните произведения на фундаменталните осцилаторни представления за  $su_q(2)$ .

Операторите  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_{-1}$  се изразяват като

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= t_1^\dagger t_{-1} = q^{\frac{1}{2}} [N_1] q^{N-1} , & \mathcal{N}_{-1} &= t_{-1}^\dagger t_1 = q^{-\frac{1}{2}} [N_{-1}] q^{-N_1} , \\ t_{-1} t_1^\dagger &= q^{\frac{1}{2}} [N_1 + 1] q^{N-1} , & t_1 t_{-1}^\dagger &= q^{-\frac{1}{2}} [N_{-1} + 1] q^{-N_1} , \end{aligned} \quad (3.25)$$

и са деформирани оператори, които не могат да бъдат изразени в термини на класически бозони, за разлика от разгледаните до сега оператори на броя на бозоните  $N_1$  и  $N_{-1}$ , използвани в случая на  $sp_q(4, R)$ . Използвайки развитие подобно на това

направено в (2.18) е лесно да се покаже, че в резултат на използването на тензорни оператори се получава смесване на двата вида осцилатори

$$\begin{aligned} [N_k] q^{\pm N_{-k}} &= N_k \pm N_k N_{-k} \tau + \frac{1}{6} N_k (3N_{-k}^2 + N_k^2 - 1) \tau^2 \\ &\pm \frac{1}{6} N_k N_{-k} (N_k^2 - 1 + N_{-k}^2) \tau^3 + O(\tau^4). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Лесно се вижда, че операторите  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_{-1}$  принадлежат на обвиващата алгебра на осцилаторите. В (3.26) се появяват всички степени на параметъра на деформация  $\tau$ , както и всички степени на двата класически оператора на броя на бозоните  $N_k = b_k^\dagger b_k$  за  $k = \pm 1$ .

Скаларният оператор  $L_0^0 = [N]$  комутира с всички компоненти на тензора от първи ранг  $L_m^1$  ( $m = 0, \pm 1$ ),

$$[[N], L_m^1] = 0,$$

и така се осъществява разложението  $u_t(2) = su_t(2) \oplus u_q(1)$  с инвариант от първи ранг  $[N]$ . Операторът на Casimir от втори порядък за  $SU_t(2)$  се получава от скаларното произведение:

$$-\sqrt{[3]}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{L})^0 = qL_{-1}L_{+1} + q^{-1}L_{+1}L_{-1} - L_0L_0 = \frac{1}{[2]}[N][N+2]. \quad (3.27)$$

Комуторите на  $L_{\pm 1}^1$  със сдвояващите повишаващи или понижаващи оператори, дадени тук в по-различна форма, определят трансформационните им свойства спрямо  $q$ -деформираната  $so(3)$  подалгебра:

$$\begin{aligned} [L_{\pm 1}^1, \tilde{T}_m^1] &= \pm q^{-(m\pm 1)} \sqrt{[1 \mp m][1 \pm m + 1]} \tilde{T}_{m\pm 1}^1 q^{-2J_0}, \\ [L_{\pm 1}^1, T_m^1] &= \pm q^{-(m\pm 2)} \sqrt{[1 \mp m][1 \pm m + 1]} T_{m\pm 1}^1 q^{-2J_0}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Следователно операторите  $\tilde{T}_m^1$  и  $T_m^1$ ,  $m = 0, \pm 1$  образуват два взаимно спрегнати вектора по-отношение на  $so(3)$  подалгебрата.

Използването на тензорни оператори дава възможност да се определи много лесно най-общия инвариант на  $sp_t(4, R)$  по отношение на  $q$ -деформираната  $so(3)$  подалгебра. Той се построява като линейна комбинация на скаларните произведения на операторите  $T_k^1, \tilde{T}_k^1$  и  $L_k^1$ , които запазват  $J_0$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= s_1 T_k^1 \cdot \tilde{T}_{-k}^1 + s_2 \tilde{T}_k^1 \cdot T_{-k}^1 + s_3 L_k^1 \cdot L_{-k}^1 + s_4 [N]^2 \\ &= s_1 [N][N-1] + s_2 [N+2][N+3] + s_3 [N][N+2] + s_4 [N]^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

От горния израз е ясно, че четири допълнителни феноменологични параметъра ( $s_i$  където  $i = 1, 2, 3, 4$ ) заедно с параметъра на деформация влизат в инварианта. Това дава възможност за включването на повече видове взаимодействия в съответния хамилтонианов проблем.

### 3.3 Алгебрична структура породена от тензорните оператори

В този подход ние построяваме  $q$ -деформирана алгебра  $sp_t(4, R)$ , запазвайки трансформационните свойства по отношение на  $su_q(2)$  на базисните осцилатори и на техните тензорни произведения, които играят ролята на генератори. Така получената алгебра от  $q$ -тензорни оператори се генерира от техните компоненти. Обикновено, когато деформираме една алгебра е трудно да се определи какъв тип  $q$ -комутатори се удовлетворяват от  $q$ -деформираната версия. В [A2]  $q$ -деформирана супералгебра се затваря от обикновените комутационни и антикомутационни съотношения между компонентите на  $q$ -тензорни оператори от ранг  $\frac{1}{2}$  и 1. Четната част е бозонното представяне на  $q$ -деформацията на  $sp(4, R)$  алгебрата, която е разширена с един допълнителен генератор  $q^{-2J_0}$ . Той комутира с останалите генератори по следния начин:

$$q^{-2J_0} I_m^l = q^{-2m} I_m^l q^{-2J_0}, \quad (3.30)$$

където  $I_m^l$  е всяка една от 14-те компоненти на операторите (3.9), (3.10), (3.16), (3.21), (3.22). Но това е нещо като “духов” генератор, който в границата  $q \rightarrow 1$ ,  $q^{-2J_0} \rightarrow 1$  и класическото бозонно представяне на  $sp(4, R)$  алгебрата се възстановява. Нещо повече, той може лесно да бъде премахнат от така конструираната супералгебра ако всичките 14 четни и нечетни генератори се прескалят по следния начин:

$$t_{\frac{1}{2}, m} = f_{\frac{1}{2}, m} q^{-J_0}, \quad m = \pm \frac{1}{2}, \quad \tilde{t}_{\frac{1}{2}, m} = g_{\frac{1}{2}, m} q^{-J_0}, \quad m = \pm \frac{1}{2}, \quad (3.31a)$$

$$T_m^l = \sqrt{[1 + \delta_{m,0}]} F_m^l q^{-2J_0}, \quad l = 1, \quad m = 0, \pm 1,$$

$$\tilde{T}_m^l = \sqrt{[1 + \delta_{m,0}]} G_m^l q^{-2J_0}, \quad l = 1, \quad m = 0, \pm 1, \quad (3.31b)$$

$$L_m^l = \sqrt{[1 + \delta_{m,0}]} A_m^l q^{-2J_0}, \quad l = 0, 1, \quad m = 0, \pm 1.$$

Очевидно, в резултат на (3.31) всичките обикновени комутатори и антикомутатори от [A2] се трансформират в  $q$ -комутатори и  $q$ -антикомутатори:

$$[S_{m_1}^{l_1}, S_{m_2}^{l_2}]_{\pm q^\nu} = S_{m_1}^{l_1} S_{m_2}^{l_2} \pm q^\nu S_{m_2}^{l_2} S_{m_1}^{l_1}, \quad (3.32)$$

където  $S_m^l$ ,  $S_m^l$  може да бъде всеки от операторите определени в (3.31) и  $\nu$  зависи от индексите на проекциите  $m_1, m_2$  на двата НТО участващи в тях. В свойствата дефиниращи премащабираните оператори (3.31) като НТО също възниква малка промяна. Първият член в (3.7б) се умножава на  $q^{\mp 2}$  за тензорите от първи ранг (3.31б) и на  $q^{\mp 1}$  за тензорите от ранг  $\frac{1}{2}$  (3.31а).

Тъй като елементите, от които строим разглежданата алгебра са спинорните оператори (3.10) и (3.11) техните премащабираните компоненти от (3.31а) разглеждаме като нечетните генератори.  $q$ -антикомутаторите на нечетните генератори, пресметнати като се използват основните съотношения (2.19) и (2.22) между  $q$ -бозонните

оператори на раждане и унищожение са:

$$\begin{aligned} \{f_{\frac{1}{2},m_1}, f_{\frac{1}{2},m_2}\}_{q^\nu} &= q^{(m_1+m_2)/2}(1+q^{m_2-m_1})F_{m_1+m_2}^1, \\ \{g_{\frac{1}{2},m_1}, g_{\frac{1}{2},m_2}\}_{q^\nu} &= q^{(m_1+m_2)/2}(1+q^{m_2-m_1})G_{m_1+m_2}^1, \\ \{f_{\frac{1}{2},m_1}, g_{\frac{1}{2},m_2}\}_{q^\nu} &= q^{(m_1+m_2)/2}(1+q^{m_2-m_1})(A_{m_1+m_2}^1 + 2m_2\delta_{m_1,-m_2}q^{2m_2}L_0^0) + 2m_2\delta_{m_1,-m_2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

където  $\nu = m_2 - m_1$ . В резултат, антикомутаторите на нечетните генератори, както и в класическия случай, дават представяния от четната част на  $q$ -деформираната супералгебра. Последното равенство в (3.33) подсказва нуждата от въвеждането на специфична комбинация от  $m = 0$  компонентите на  $A_m^l, l = 0, 1$  операторите. Следователно вместо премащабираните стандартни циклични компоненти на оператора на ъгловия момент (3.31б), които комутират по следния начин:

$$[A_{m_1}^1, A_{m_2}^1]_{q^{2(m_2-m_1)}} = [m_1 - m_2]q^{-(m_1-m_2)}A_{m_1+m_2}^1 \quad (3.34)$$

ние използваме комбинации като тези дадени в (3.24) и означени като оператори с два индекса на проекции:

$$A_{m,\mu} = A_m^1 + \delta_{m,0}q^\mu A_0^0 \quad \begin{cases} \mu = 0 & \text{при } m = \pm 1 \\ \mu = \pm 1 & \text{при } m = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Операторът  $A_0^0$  е инвариант на разглежданата алгебра, защото комутира с операторите  $A_m^1$  (3.34)

$$[A_m^1, A_0^0] = 0. \quad (3.36)$$

Във всички комутатори между генераторите на четната част степента на определящия ги член  $q^{\nu_e}$  е една съща  $\nu_e = 2(m_2 - m_1)$ , както в (3.34).

В предишния параграф бяха построени други два тензорни оператора  $T_m^l$  и  $\tilde{T}_m^l$  носещи две неприводими тримерни представяния  $m = 0, \pm 1$  на  $su_q(2)$ . Те се различават от разгледания по-горе оператор  $A_m^1$  по комутационните съотношения между компонентите им. Съответните съотношения между премащабираните им аналози са:

$$\begin{aligned} [F_{m_1}^1, F_{m_2}^1]_{q^{\nu_e}} &= [m_1 - m_2]q^{-(m_1-m_2)}\lambda F_0^1 F_{m_1+m_2}^1, \\ [G_{m_1}^1, G_{m_2}^1]_{q^{\nu_e}} &= [m_1 - m_2]q^{-(m_1-m_2)}\lambda G_0^1 G_{m_1+m_2}^1, \end{aligned} \quad (3.37)$$

където  $\lambda = (q - q^{-1})$ . Когато  $q \rightarrow 1$  компонентите на тези тензори комутират. Тензорите  $F_m^1$  и  $G_m^1$  имат структурата на  $q$ -деформирани, повишаващи и понижаващи с двойка частици, оператори (3.16) и  $A_m^1$  (3.21),  $A_0^0$  (3.22) на  $q$ -деформирани мултиполни оператори. Комутационните съотношения (3.34) и (3.37) между компонентите на трите тензора от първи ранг се затварят в себе си, като в резултат генерират

три  $q$ -деформирани подалгебри  $\mathfrak{g}_-, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+$ .  $q$ -комутаторите (3.37), които клонят към 0 в класическата граница, когато  $q \rightarrow 1$ , сега са квадратични и пропорционални на произведението от  $m = 0$  компонентата с компонентата с правилната проекция, която се получава от развитието (3.9) на съответния тензор. Броят на компонентите на  $q$ -тензорите (3.16), (3.21) и (3.22) е точно 10, и съвпада с броя на генераторите на  $sp(4, R)$ . За да се затвори този по-широк вид алгебра е необходимо да се пресметнат  $q$ -комутационните съотношения между генераторите на подалгебрите определени от (3.34) и (3.37). Първо пресмятаме комутаторите между повишаващите  $F_m^1$  и понижаващите  $G_m^1$  сдвояващи оператори:

$$\begin{aligned} [F_{m_1}^1, G_{m_2}^1]_{q^{2(m_2-m_1)}} &= [m_1 - m_2]q^{-(m_1-m_2)}\{(2 - \lambda\mathcal{A}_{0,-m_1})\mathcal{A}_{m_1+m_2,m_2} + m_2q^{m_2}\}, \quad m_1 \neq 0, \\ [F_0^1, G_{m_2}^1]_{q^{2m_2}} &= q^{m_2}\mathcal{A}_{m_2,0}(2 - \lambda\mathcal{A}_{0,m_2}), \quad m_2 \neq 0, \\ [F_0^1, G_0^1] &= 1 + q^{-1}\mathcal{A}_{0,1} - q\mathcal{A}_{0,-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Горните комутатори дават също квадратични членове пропорционални на компонентите на оператора на ъгловия момент и то по такъв начин, че в границата  $q \rightarrow 1$  се възстановяват комутационните съотношения на класическата  $sp(4, R)$  алгебра на Ли. По нататък, комутаторите между  $q$ -деформираните мултиполни оператори  $\mathcal{A}_{m,\mu}$ , ( $m = 0, \pm 1, \mu = \pm 1, 0$ ) (3.35) и сдвояващите оператори  $F_m^1$  и  $G_m^1$  за  $m = 0, \pm 1$  са пропорционални на участващата в тях компонента на сдвояващите оператори:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{m_1,\mu}, F_{m_2}^1]_{q^{\nu_e}} &= [m_1 - m_2 + \mu]q^{-(m_1-m_2+\mu)}F_{m_1+m_2}^1, \\ [\mathcal{A}_{m_1,\mu}, G_{m_2}^1]_{q^{\nu_e}} &= [m_1 - m_2 + \mu]q^{-(m_1-m_2-\mu)}G_{m_1+m_2}^1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Уравненията (3.39) се пресмятат лесно, като се използват  $q$ -тензорните определения (3.16) за компонентите на операторите  $T_m^l$  и  $\tilde{T}_m^l$  и изразяването на оператора  $L_m^1$  (3.21) чрез  $su_q(2)$  генераторите  $J_{\pm}$ . В границата  $q \rightarrow 1$  (3.37)–(3.39) правилно възпроизвеждат съответните комутационни съотношения на тензорните представления на класическата  $sp(4, R)$ . В резултат, 9-те компоненти на трите премащабирани (3.31б)  $q$ -тензор оператори от първи ранг  $T_m^l$ ,  $\tilde{T}_m^l$  и  $L_m^1$ ;  $m = 0, \pm 1$  и на скалара  $L_0^0$  комутират като генератори на  $q$ -деформирана алгебра, която в границата  $q \rightarrow 1$  възпроизвежда комутационните съотношения на генераторите на Ли алгебрата  $sp(4, R)$ , изразени като  $su(2)$  тензорни оператори. Квантовата алгебра конструирана по този начин представлява четната част на  $q$ -деформираната супералгебра.

За да се затвори супералгебрата е необходимо да се пресметнат и комутационните съотношения между четните и нечетните генератори. В този случай те се определят от степента  $\nu_{eo} = 2m_2 - m_1$ . Започваме с комутатора на  $q$ -тензора  $f_{\frac{1}{2},\alpha}$  и неговия копродукт  $F_m^1$ :

$$[F_{m_1}^1, f_{\frac{1}{2},m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} = q^{-m_1/2}(1 - q^{2m_2-m_1})F_0^1 f_{\frac{1}{2},m_1+m_2}. \quad (3.40)$$

В границата  $q \rightarrow 1$  всички комутатори (3.40) са 0.  $q$ -комутаторите  $[G_m^1, g_{\frac{1}{2}, \alpha}]_{q^{\nu_{eo}}}$  за  $m = 0, \pm 1$  и  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  съвпадат с (3.40), когато заместим операторите  $\{F\}$  и  $\{f\}$  с техните спрегнати оператори (3.12) и (3.17)

$$[G_{m_1}^1, g_{\frac{1}{2}, m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} = q^{-m_1/2}(1 - q^{2m_2 - m_1})G_0^1 g_{\frac{1}{2}, m_1 + m_2}. \quad (3.41)$$

Смесените комутатори на  $\{F\}$  с  $\{g\}$  са следните:

$$[F_{m_1}^1, g_{\frac{1}{2}, m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} = q^{-m_1/2}\{(1 - q^{2m_2 - m_1})\mathcal{A}_{0, 2m_2} + (m_1 - 2m_2)q^{2m_2}\}f_{\frac{1}{2}, m_1 + m_2}. \quad (3.42)$$

Като спрегнем (3.42) и преместим получената  $g_{\frac{1}{2}, \alpha}$  компонента най-вдясно, получаваме:

$$[G_{m_1}^1, f_{\frac{1}{2}, m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} = q^{m_1/2}q^{2(m_2 - m_1)}\{(1 - q^{2m_2 - m_1})\mathcal{A}_{0, -2m_2} - [m_1 - 2m_2]\}g_{\frac{1}{2}, m_1 + m_2}. \quad (3.43)$$

На края компонентите на мултиполните оператори  $\mathcal{A}_{m, \mu}$  с двата  $q$ -спинора са:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{m_1}^1, f_{\frac{1}{2}, m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} &= \{q^{m_2 - m_1 + \frac{\mu}{2}}(m_1 - 2m_2) + \delta_{m_1, 0}(q^{m_1} - q^{\mu})\mathcal{A}_{0, \mu}\}f_{\frac{1}{2}, m_1 + m_2}, \\ [\mathcal{A}_{m_1}^1, g_{\frac{1}{2}, m_2}]_{q^{\nu_{eo}}} &= \{q^{m_2 - m_1 - \frac{\mu}{2}}(m_1 - 2m_2) + \delta_{m_1, 0}(q^{m_1} - q^{-\mu})\mathcal{A}_{0, -\mu}\}g_{\frac{1}{2}, m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

В резултат се получава  $q$ -деформация на супералгебра дефинирана от съотношенията (3.33)–(3.44). Всички комутационни съотношения с изключение на тези между нечетните генератори (3.33), между цикличните компоненти на оператора на ъгловия момент (3.34) и между мултиполните и сдвояващи оператори (3.39) са квадратични. Сама по себе си четната част става квадратичната  $sp_q(4, R)$  алгебра [32].

Обикновено квантуването на простите алгебри на Ли [10, 17] или супералгебри на Ли [18, 19] се реализира в термините на генератори на Chevalley. Такава деформация на  $osp(1, 2n)$  (или  $B(0, n)$  в класификацията на Кац) се реализира посредством оператори на раждане и унищожение на  $n$  на брой обикновени хармонични осцилатори [19]. Тук е получен пълния базис на Cartan-Weyl за реалната форма на  $q$ -деформираната  $osp(1, 4)$  алгебра (за  $q$  реално). Използваме названието  $sp(4, R)$  супералгебра, тъй като то е по-популярно във физическите приложения и подчертава, че четната част  $sp(4, R)$  е подалгебра, която може да се изследва и прилага независимо. Този тип алгебри са от физически интерес за приложения в модели на ядрената структура.

### 3.4 Базисни състояния на $sp_t(4, R)$ $q$ -тензорната алгебра

Нека сега да разгледаме  $\mathcal{H}$  като пространство на действие на  $q$ -деформираното тензорно представяне на  $sp_t(4, R)$ , дадено по-горе. В термини на  $q$ -деформираните спинорни оператори на раждане и унищожение (3.10) и (3.11), базисните състояния (2.2)

имат вида

$$|\nu_1, \nu_{-1}\rangle = q^{-\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_{-1}) - \frac{1}{2}\nu_1\nu_{-1}} \frac{(t_1^\dagger)^{\nu_1} (t_{-1}^\dagger)^{\nu_{-1}}}{\sqrt{[\nu_1]! [\nu_{-1}]!}} |0\rangle, \quad (3.45)$$

който въвежда зависимост от  $q$ . Лесно се проверява, че операторът  $P = (-1)^N$  комутира с всички генератори (3.14), (3.15) и (3.19), така че и в  $q$ -деформирания тензорен случай  $sp_t(4, R)$  представянето е приводимо и се разделя на две неприводими представяния действащи в подпространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$ .

По-нататък се разглежда пространството  $\mathcal{H}_+$ , за което  $\nu = \nu_1 + \nu_{-1}$  е четно. Състоянията от  $\mathcal{H}_-$  могат да се получат от тези в  $\mathcal{H}_+$  с помоща на операторите  $t_k^\dagger$  и  $t_k$  ( $k = \pm 1$ ). Последните могат да се считат за нечетните генератори в супералгебричното разширение на четното  $sp_t(4, R)$  [A2].

С оглед на бъдещите приложения ние представяме базисните състояния  $|\nu_1, \nu_{-1}\rangle \in \mathcal{H}_+$  по следния начин:

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \eta(n_1, n_0, n_{-1}) (T_1^1)^{n_1} (T_0^1)^{n_0} (T_{-1}^1)^{n_{-1}} |0\rangle \equiv |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \quad (3.46)$$

където  $n_i$  ( $i = 0, \pm 1$ ) са цели числа ограничени от връзките

$$\nu_1 = 2n_1 + n_0, \quad \nu_{-1} = 2n_{-1} + n_0 \quad (3.47)$$

и  $\eta(n_1, n_0, n_{-1})$  е нормализиращ коефициент определен като

$$\eta(n_1, n_0, n_{-1}) = \frac{q^{-\frac{1}{2}(n_1 - n_{-1}) - n_1(n_0 + n_{-1}) - n_{-1}(n_0 + n_1)}}{\sqrt{[2]^{n_0} [2n_1 + n_0]! [2n_{-1} + n_0]!}}. \quad (3.48)$$

Това представяне на базисните състояния е полезно за разглеждане на съответните проекционни процедури [A3] за  $sp_t(4, R)$  алгебрата. Трябва да се отбележи, че в този случай използваме подреждането (3.46) на компонентите на вектора  $T_m^1$  ( $m = 0, \pm 1$ ) (3.14). Други подреждания могат да се получат от това като се използват комутационните съотношения (3.37).  $q$ -факторите, които ще се появят в резултат на това могат да бъдат включени в нормиращите множители. От (2.3) и (3.25) е очевидно, че

$$\mathcal{N}_1 |\nu_1, \nu_{-1}\rangle = [\nu_1] q^{\nu-1} |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \quad \mathcal{N}_{-1} |\nu_1, \nu_{-1}\rangle = [\nu_{-1}] q^{-\nu_1} |\nu_1, \nu_{-1}\rangle, \quad (3.49)$$

$$[N] |\nu_1, \nu_{-1}\rangle = [\nu] |\nu_1, \nu_{-1}\rangle. \quad (3.50)$$

Следователно преминавайки към представянето (3.46) и отчитайки (3.47) получаваме

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= [2n_1 + n_0] q^{2n_1 + n_0} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \\ \mathcal{N}_{-1} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= [2n_{-1} + n_0] q^{-2n_1 - n_0} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle \end{aligned}$$

и

$$[N]|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = [2n]|n_1, n_0, n_{-1}\rangle.$$

Трябва да се отбележи, че

$$2n = 2n_1 + 2n_0 + 2n_{-1} = \nu, \quad j_0 = \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_{-1}) = n_1 - n_{-1}.$$

Могат да се разгледат два екстремални случая от възможните стойности на допълнителното квантово число  $n_0$ .

1.  $n_0$  приема минимална стойност. В пространството  $\mathcal{H}_+$  целите числа  $\nu_1$  и  $\nu_{-1}$  са едновременно четни или едновременно нечетни. Ако  $\nu_1$  и  $\nu_{-1}$  са четни то  $\min n_0 = 0$  и с помощта на (3.25) от (3.45) получаваме

$$\begin{aligned} |n_1, 0, n_{-1}\rangle &= q^{-\frac{1}{2}(n_1 - n_{-1}) - 2n_1 n_{-1}} \frac{(T_1^1)^{n_1} (T_{-1}^1)^{n_{-1}}}{\sqrt{[2n_1]! [2n_{-1}]!}} |0\rangle \\ &= q^{-\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_{-1}) - \frac{1}{2}\nu_1 \nu_{-1}} \frac{(T_1^1)^{\frac{\nu_1}{2}} (T_{-1}^1)^{\frac{\nu_{-1}}{2}}}{\sqrt{[\nu_1]! [\nu_{-1}]!}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ако  $\nu_1$  и  $\nu_{-1}$  са нечетни то  $\min n_0 = 1$  и получаваме

$$\begin{aligned} |n_1, 1, n_{-1}\rangle &= q^{-\frac{1}{2}(3n_1 + n_{-1}) - 2n_1 n_{-1}} \frac{(T_1^1)^{n_1} T_0^1 (T_{-1}^1)^{n_{-1}}}{\sqrt{[2][2n_1 + 1]! [2n_{-1} + 1]!}} |0\rangle \\ &= q^{-\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_{-1} - 2) - \frac{1}{2}\nu_1 \nu_{-1}} \frac{(T_1^1)^{\frac{\nu_1 - 1}{2}} T_0^1 (T_{-1}^1)^{\frac{\nu_{-1} - 1}{2}}}{\sqrt{[2][\nu_1]! [\nu_{-1}]!}} |0\rangle. \end{aligned}$$

По този начин  $q$ -деформираните спинори се свързват до максималните степени  $n_1$  и  $n_{-1}$  за компонентите  $T_1^1$  и  $T_{-1}^1$ , съответно. Представяйки базисните състояния в  $\mathcal{H}_+$  като  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$  вектори в случая на  $\min n_0 = 0$  или 1, Таблица 2.1 може да се представи по следния начин:

Таблица 3.1:

$\nu/i_0$	3	2	1	0	-1	-2	-3
0				$ 0, 0, 0\rangle$			
2			$ 1, 0, 0\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle$		
4		$ 2, 0, 0\rangle$	$ 1, 1, 0\rangle$	$ 1, 0, 1\rangle$	$ 0, 1, 1\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle$	
6	$ 3, 0, 0\rangle$	$ 2, 1, 0\rangle$	$ 2, 0, 1\rangle$	$ 1, 1, 1\rangle$	$ 1, 0, 2\rangle$	$ 0, 1, 2\rangle$	$ 0, 0, 3\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Лесно се вижда, че всяко състояние от левите (десните) диагонали на Таблица 3.1 може да се получи чрез действието на  $T_1^1(T_{-1}^1)$  върху състоянието с минимално тегло.

2.  $n_0$  приема максимални стойности. В този случай  $n_{-1} = 0$  или  $n_1 = 0$  при  $\nu_1 \neq \nu_{-1}$  и  $n_{-1} = n_1 = 0$  при  $\nu_1 = \nu_{-1}$ . Както е показано в Таблица 3.2 има две възможности:

Състоянията от лявата страна на Таблица 2.1, където  $\nu_1 \geq \nu_{-1}$  и степента на  $T_0^1(n_{-1} = 0, \max n_0 = \nu_{-1})$  е максимална, са

$$\begin{aligned} |n_1, n_0, 0\rangle &= q^{-\frac{1}{2}n_1 - n_1 n_0} \frac{(T_1^1)^{n_1} (T_0^1)^{n_0}}{\sqrt{[2]^{n_0} [2n_1 + n_0]! [n_0]!}} |0\rangle \\ &= q^{-\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_{-1}) - \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_{-1})\nu_1} \frac{(T_1^1)^{\frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_{-1})} (T_0^1)^{\nu_{-1}}}{\sqrt{[\nu_1]! [\nu_{-1}]! [2]^{\nu_{-1}}}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.52)$$

За състоянията от дясната страна на централната стълба в Таблица 2.1, където  $(\nu_1 \leq \nu_{-1}, n_1 = 0, \max n_0 = \nu_1)$ , получаваме изразите

$$\begin{aligned} |0, n_0, n_{-1}\rangle &= q^{-\frac{1}{2}n_{-1} - n_{-1} n_0} \frac{(T_0^1)^{n_0} (T_{-1}^1)^{n_{-1}}}{\sqrt{[2]^{n_0} [n_0]! [2n_{-1} + n_0]!}} |0\rangle \\ &= q^{-\frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_{-1}) + \frac{1}{2}\nu_1(\nu_1 - \nu_{-1})} \frac{(T_0^1)^{\nu_1} (T_{-1}^1)^{\frac{1}{2}(\nu_{-1} - \nu_1)}}{\sqrt{[\nu_1]! [\nu_{-1}]! [2]^{\nu_1}}} |0\rangle. \end{aligned}$$

В този случай  $(\max n_0 = \nu_1$  или  $\nu_{-1})$  подреждането на базисните състояния е дадено в Таблица 3.2.

Таблица 3.2:

$\nu/i_0$	3	2	1	0	-1	-2	-3
0				$ 0, 0, 0\rangle$			
2			$ 1, 0, 0\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle$		
4		$ 2, 0, 0\rangle$	$ 1, 1, 0\rangle$	$ 0, 2, 0\rangle$	$ 0, 1, 1\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle$	
6	$ 3, 0, 0\rangle$	$ 2, 1, 0\rangle$	$ 1, 2, 0\rangle$	$ 0, 3, 0\rangle$	$ 0, 2, 1\rangle$	$ 0, 1, 2\rangle$	$ 0, 0, 3\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Разгледаният частен случай съответства на максимална степен на оператора  $T_0$ . С този оператор ние се движим по колоните на Таблица 3.2 действайки върху състоянието с минимално тегло безкраен брой пъти.

Изброените два случая за представяне на базисните състояния са еквивалентни. Преходът между тях се реализира като се използва съотношението

$$(T_0^1)^2 = q^{-1} [2] T_1^1 T_{-1}^1. \quad (3.53)$$

Сега даваме действието на  $q$ -деформираното тензорно представяне на алгебрата  $su_t(2) \sim so_t(3)$  с генератори  $L_m^1$  ( $m = 0, \pm 1$ ). Първо да отбележим, че

$$[L_m^1, N] = 0, m = 0, \pm 1.$$

От разложението (2.7) се вижда, че във всяко подпространство  $\mathcal{H}_\nu$  ( $\nu = 2n$ ) на  $\mathcal{H}_+$  действия неприводимо представяне на  $su_t(2)$ . Собствената стойност на оператора на Casimir от втори порядък (3.27) за дадено неприводимо представяне е  $\frac{1}{2}[2n][2n+2]$ . Нещо повече, известно е действието на повишаващите и понижаващите оператори  $L_{\pm 1}^1$  за фиксирано  $n$ , когато  $n_0 = \max n_0 = \nu_1$  или  $\nu_{-1}$ . По редовете дадени от условието  $\nu = 2n$  при  $\nu_1 \geq \nu_{-1}$  се движим действайки с оператора  $(L_{-1}^1)^k$  ( $k \leq n$ ) върху състоянието с максимално тегло  $|n_1 = n, 0, 0\rangle$ :

$$(L_{-1}^1)^k |n, 0, 0\rangle = q^{-\frac{1}{2}k(2n-k)} \sqrt{\frac{[2n]![k]!}{[2n-k]!}} |n-k, k, 0\rangle.$$

По-нататък, за  $\nu_1 \leq \nu_{-1}$ :

$$(L_{-1}^1)^k |0, n, 0\rangle = q^{\frac{1}{2}k^2} \sqrt{\frac{[n+k]!}{[n-k]!}} |0, n-k, k\rangle,$$

и следователно

$$(L_{-1}^1)^{2n} |n, 0, 0\rangle = [2n]! |0, 0, n\rangle.$$

За действието на  $(L_{+1}^1)^k$  ( $k \leq n$ ) върху вектора с минимално тегло  $|0, 0, n\rangle$  при  $\nu_1 \leq \nu_{-1}$  се получава

$$(L_{+1}^1)^k |0, 0, n\rangle = q^{\frac{1}{2}k(2n-k)} \sqrt{\frac{[k]![2n]!}{[2n-k]!}} |0, k, n-k\rangle,$$

и от центъра за  $\nu_1 \geq \nu_{-1}$  резултатът е

$$(L_{+1}^1)^k |0, n, 0\rangle = q^{-\frac{1}{2}k^2} \sqrt{\frac{[n+k]!}{[n-k]!}} |k, n-k, 0\rangle,$$

и следователно

$$(L_{+1}^1)^{2n} |0, 0, n\rangle = [2n]! |n, 0, 0\rangle.$$

Операторите  $L_{\pm 1}^1$  не се различават съществено от операторите  $J_{\pm}$  (2.24) и в резултат тяхното действие върху базисните състояния се получава лесно като се използва (3.28), отчитайки съответните  $q$ -фактори и съотношенията  $j = \frac{\nu}{2} = n$ ,  $j_0 = n_1 - n_{-1}$ . Събствените стойности на оператора  $L_0^1$  (3.21) върху базисните състояния са

$$L_0^1 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{[2]} \{q[2n_1 + n_0][2n_{-1} + n_0 + 1] |n_1, n_0, n_{-1}\rangle \quad (3.54)$$

$$- q^{-1}[2n_{-1} + n_0][2n_1 + n_0 + 1] |n_1, n_0, n_{-1}\rangle\}. \quad (3.55)$$

За разлика от  $J_0$ ,  $L_0^1$  има различни собствени стойности за всяко стъпало от дадена стълба.

Новото деформирано представяне –  $sp_t(4, R)$  е реализирано като се използва трансформация на  $q$ -деформираните бозони в  $q$ -тензори ( $q$ -спинори) по отношение

на  $su_q(2)$  операторите. За разлика от  $sp_q(4, R)$ , дадена в предишната глава, всички образуващи на алгебрата  $sp_t(4, R)$  са деформирани, тъй като са получени като тензорни произведения на  $q$ -спинорите. Важен резултат в този случай е построяването на деформираната  $su_t(2)$  алгебра, която може да се интерпретира като деформация на алгебрата на ъгловия момент  $so(3)$ . Нейното представяне в  $\mathcal{H}$  е приводимо и се разлага на неприводими, като е получено пълното им описание. Полезно за бъдещите приложения е представянето на означаваните с две квантови числа базисни състояния в  $\mathcal{H}_+$  с три свързани цели числа.

#### 4. Проекционен метод за конструиране на $q$ -деформираната версия на редукцията $so(3) \subset u(3)$

През последното десетилетие интересът към деформираните алгебрични структури, въведени доста време преди това, беше възстановен и много изследвания бяха насочени едновременно към развитието на математическата теория на квантовите алгебри и към разширението на техните физически приложения [9]. Бяха публикувани някои приложения на нивото на  $su_q(2)$  алгебрата [33–35], целящи изясняването на ролята на параметъра на  $q$ -деформацията в теорията на ядрената колективна структура. Въпреки това по-обща приложения в тази област са все още ограничени, ситуация, от която може да се излезе като изследванията се насочат към развитие на  $q$ -деформираните структури и групово-теоретични методи, позволяващи  $q$ -деформирани обобщения на съществуващи вече алгебрични модели, успешно описващи ядреното колективно движение [36, 37].

Точно такъв проблем представлява редукцията на  $su(3)$  алгебрата, която съдържа компонентите  $Q_m^2$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) на алгебричния квадруполен оператор, към  $so(3)$  алгебрата на ъгловия момент  $L_m^1$ , ( $m = 0, \pm 1$ ). Тази редукция представлява основен и съществен, общ елемент на ядрените колективни модели, които използват важната квадруполна степен на свобода в съответствие с класификационната схема на ядрените състояния по техния ъглов момент, като основополагащият е  $SU(3)$  модела на Elliott [38], следван например от псевдо  $SU(3)$  модела [39], симплектичния колективен модел [40] и модела на взаимодействащите бозони [41]. Но тази редукция е сложен и не напълно решен проблем в  $q$ -деформирания случай, към който напоследък са насочени доста усилия [42, 43].

В [42] към конструкцията на  $su_q(3)$  е подхождено като първо се генерира  $so_q(3)$  алгебра, изоморфна на стандартната  $su_q(2)$  и реализирана чрез тримерни (3D)  $q$ -осцилатори. По конструкция тази  $su_q(2)$  алгебра е подалгебра на  $su_q(3)$  в базиса на Chevalley, но нейните генератори не представляват тензор от първи ранг. Нещо повече, този подход не улеснява построяването на  $q$ -аналог на важния от физическа гледна точка квадруполен оператор. В нашата методика, която ще представим в настоящата глава, се предлага решение и на двата проблема.

Това, което е получено в [42] е всъщност тримерното представяне на  $su_q(2)$ , което в последствие е използвано от Quesne [43] при дефиницията на  $q$ -бозонни оператори

ри, които се трансформират като  $q$ -тензорни оператори ( $q$ -вектори) по отношение на това  $su_q(2)$ . Техните куплирани комутатори са написани в [43] по аналогия на класическия случай за полупряката сума на Lie алгебрите на Heisenberg-Weyl  $w(3)$  и на  $so(3)$ . После е получено Дайсоновото представяне в термини на  $q$ -бозонни осцилатори. Чрез неприводимо тензорно куплиране са получени скалар, вектор и тензор от втори ранг, като е показано, че те генерират  $q$ -деформация на квадратична  $u(3)$  която обаче не е  $q$ -аналог на  $u(3)$  алгебрата на Elliott, която получаваме ние.

Въз основа на различни съображения, най-важното при предлаганата конструкция е наблюдението, че много естествен начин да се получи влагането на алгебрата на ъгловия момент представлява използването на тензорни оператори по отношение на нея и после от тях да се генерират алгебри от по-висок ранг. Това е процедура използвана в повечето от добре известните алгебрични модели. За да се използва същата техника в деформирания случай е необходима добре развита теория на ъгловия момент (алгебрата на Wigner-Rasah за  $SU_q(2)$ ) и тензорните оператори, която беше разработена и представена в предишната Глава 3 [A2, B1], където  $q$ -деформирана  $Sp(4, R)$  е генерирана в [A2] от възможните тензорни произведения на два фундаментални  $SU_q(2)$  спинори. Тук ние ползваме дефинициите и резултатите от там и [29], като развиваме идеята, че естествената процедура се свежда до влагането по конструкция в  $q$ -деформираната  $Sp(4, R)$  алгебра на  $q$ -деформирана  $so(3)$  подалгебра, като последната се генерира от компонентите на тензор от първи ранг  $L_m^1$ , ( $m = 0, \pm 1$ ), който може да се интерпретира като оператор на ъгловия момент.

Следващите ни съображения произтичат от факта че, симплектичните алгебри са особено подходящи за бозонно проектиране, ситуация, която често се използва в ядрената физика. Изобщо, проекционните процедури водят до получаването на пространства на образите, които са по-големи от тези на изходната алгебра. Редуцирането на тези по-широки пространства до необходимата размерност на началното пространство се определя като идентификация на духовите състояния [44]. Решение на този проблем може да се намери със средствата на чисто групово-теоретичен анализ, при проектирането както на фермионни (компактен случай) [45], така и на бозонни (некомпактен случай) [16] двойки. Тази процедура всъщност е еквивалентна на влагането на изходната алгебра в по-широкото пространство на образите ѝ.

Нашата идея е да използваме подобна процедура в  $q$ -деформирания случай за да получим чрез проектиране на  $sp(4, R)$  алгебрата влагането на образа на нейната  $so(3)$  подалгебра в по-широкото пространство на образите, което е показано, че се представя от генераторите на  $u(3)$  алгебра. За тази цел, по аналогия с класическия случай е проведено Дайсоново проектиране на  $q$ -деформираната  $sp(4, R)$  получена в [A2]. Проекционната процедура за тази алгебра е дадена стъпка по стъпка, като са изтъкнати съответствията с класическия случай. Получената в резултат алгебрич-

на структура, асоциирана с образа на компактната подалгебра  $so(3)$ , е използвана след това за построяването на образа на  $q$ -деформиран квадруполен оператор, който допълва конструкцията на  $u(3)$  алгебра и се реализира влагането  $so(3) \subset u(3)$  за съответните  $q$ -деформираны алгебри.

#### 4.1 Изходната $q$ -деформираната $sp(4, R)$

Използваните дефиниции и означения, както и конструирането на изходната  $q$ -деформираната  $sp(4, R)$  са подробно изложени в [A2] и в предишната глава. В това, което следва резултатите са дадени в термини на тензорните оператори, както са дефинирани в (3.14), (3.15) и (3.19), които ще използваме при проектирането в  $q$ -деформирания случай, като се има предвид, че премащабирането (3.31б) трябва винаги да се извършва след пресмятането на комутационните съотношения, за да се отстрани оператора  $q^{-2J_0}$ .

Тук ние даваме само част от комутационните съотношения и то записани по начин, който е по-удобен за по-нататъшното им използване в проекционната процедура. Даваме първо комутационните съотношения на операторите  $L_m^1$ , които могат да се интерпретират като генератори на  $q$ -деформирана  $so(3)$  алгебра изоморфна на  $q$ -деформираната  $su_q(2)$

$$[L_{m_1}^1, L_{m_2}^1] = m_1 q^{-(m_1+m_2)} \sqrt{[2]} L_{m_1+m_2}^1 q^{-2J_0} \quad m_1 \neq 0. \quad (4.1)$$

Тези оператори, както и генерираната от тях алгебра имат основно значение за физическите приложения и именно тяхното проектиране е нашата главна цел.

Скаларният оператор (3.22) комутира с всички компоненти на тензора от първи ранг  $L_m^1$  (3.36) и следователно е инвариант на подалгебрата определена от (4.1). Комбинациите от операторите  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_{-1}$  (3.24) играят ролята на  $q$ -деформации на операторите на броя на бозоните от всеки вид. Те могат да бъдат разглеждани като Картанови генератори на  $q$ -деформираната тензорна  $u(2)$  алгебра, като съответните ѝ повишаващ и понижаващ генератор са компонентите  $L_1^1$  и  $L_{-1}^1$ . В резултат от операторите  $L_m^1$  и  $L_0^0$  се реализира редукцията  $u(2) \supset su(2) \oplus u(1) \sim so(3) \oplus o(2)$  в  $q$ -деформирания случай.

$q$ -комутационните съотношения между компонентите на вдвояващите оператори  $T_m^1, \tilde{T}_m^1$  се записват и по следния начин

$$[T_{m_1}^1, T_{m_2}^1]_{q^{2(m_1-m_2)}} = 0, \quad [\tilde{T}_{m_1}^1, \tilde{T}_{m_2}^1]_{q^{2(m_1-m_2)}} = 0, \quad (4.2)$$

който е еквивалентен на (3.37) и е по-удобен за настоящите ни цели. Комутационните съотношения между операторите  $T_m^1$  и  $\tilde{T}_m^1$  дават в резултат съответните компоненти на тензорния оператор (3.19). Тази част от тях, за която  $m_1 + m_2 \neq 0$  може да се

запише обобщено така:

$$[T_{m_1}^1, \tilde{T}_{m_2}^1]_{q^{2(m_2-m_1)}} = -q^{-2m_1} \sqrt{[2]} [2(m_2 - m_1)] L_{m_1+m_2}^1 q^{-2J_0}, \quad (4.3)$$

докато в случая, когато  $m_1 + m_2 = 0$  се получава

$$\begin{aligned} [T_1^1, \tilde{T}_{-1}^1]_{q^{-4}} &= -q^{-3} [2] q^{-4J_0} + q^{-1} [2] \sqrt{[2]} \mathcal{N}_{-1} q^{-2J_0} \\ [T_0^1, \tilde{T}_0^1] &= [2] q^{-4J_0} + \sqrt{[2]} (q^{-1} \mathcal{N}_1 - q \mathcal{N}_{-1}) q^{-2J_0} \\ [T_{-1}^1, \tilde{T}_1^1]_{q^4} &= -q^3 [2] q^{-4J_0} - q [2] \sqrt{[2]} \mathcal{N}_1 q^{-2J_0}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Горните комутационни съотношения заедно с тези между оператора  $L_m^1$  и операторите  $T_m^1, \tilde{T}_m^1$ , които са дадени в предишната глава и в [A2], в границата  $q \rightarrow 1$  възпроизвеждат коректните, определящи алгебрата  $sp(4, R) \sim o(3, 2) \supset so(3) \oplus o(2)$  комутационни съотношения. Това ни дава основание след премащабиране на операторите да използваме интересната от физическа гледна точка  $q$ -деформация на  $sp(4, R)$  алгебрата породена от компонентите на НТО по отношение на подалгебрата  $\mathfrak{h}$  и  $su_q(2)$ .

## 4.2 $q$ -деформираната проекционна процедура

Тук ще напомним, че за конструираната в [A2]  $q$ -деформирана тензорна алгебра  $sp(4, R)$  обобщеното Гаусово разложение [A23]  $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_+$  се получава по естествен начин. То е следствие от това, че компактната подалгебра  $\mathfrak{h}$  се генерира от тензорните оператори  $\widehat{L}_m^l$ , ( $l = 0, 1; m = 0, \pm 1$ ), докато  $\mathfrak{g}_+$  и  $\mathfrak{g}_-$  са две нилпотентни подалгебри (4.2), съдържащи съответно компонентите на двата взаимно спрегнати тензори от първи ранг  $\widehat{T}_m^l$  и  $\widehat{\tilde{T}}_m^l$ .

Сега ние ще изследваме Дайсоновото проектиране на тензорната  $q$ -деформирана алгебра  $sp_t(4, R)$  като прилагаме по аналогия с класическия случай процедурата [46, 47], разработена за симплектични алгебри опънати от сферични тензори.

Първата стъпка в това проектиране е определянето на образите на генераторите на една от повишаващите или понижаващите с двойка частици подалгебри  $\mathfrak{g}_+$  или  $\mathfrak{g}_-$ . В този случай ние определяме образа на  $\widehat{\tilde{T}}_m^l$  като

$$\tilde{T}_m^1 \rightarrow \tilde{b}_m, \quad m = 0, \pm 1. \quad (4.5)$$

Предполага се, че операторите на “унищожение”  $\tilde{b}_m$ , въведени по този начин са компоненти на тензор от първи ранг по отношение на  $su_q(2)$  (2.26). Въвежда се още един тензор от първи ранг  $b_m^\dagger$ , който е спрегнат на  $\tilde{b}_m$ , по същия начин, по който са спрегнати тензорите  $T_m^l$  и  $\tilde{T}_m^l$  в съотношения (3.17) и (3.18)

$$(\tilde{b}_m)^\ddagger := (-1)^{1-m} q^{-m} b_{-m}^\dagger, \quad (b_m^\dagger)^\ddagger := (-1)^{1-m} q^{-m} \tilde{b}_{-m}. \quad (4.6)$$

Двата НТО от първи ранг спрямо  $su_q(2)$ ,  $q$ -векторите  $b_m^\dagger$  и  $\tilde{b}_m$  играят ролята на градивни елементи, с помощта на които се конструират образите на генераторите на изходната алгебра. В този конкретен случай ние се интересуваме главно от образите на компактната подалгебра  $\mathfrak{h}$ .

Тъй като операторите  $b_m^\dagger$  и  $\tilde{b}_m$  по дефиниция са компоненти на два тензора от първи ранг по отношение на  $su_q(2)$  образите на

$$L_m^1 \rightarrow I_m^1, \quad m = -1, 0, 1 \quad (4.7)$$

могат да се разглеждат като компоненти на тензорното произведение от първи ранг

$$I_m^1 := (\tilde{b} \otimes b^\dagger)_m^1 = \sum_{m_1, m_2} q C_{1 m_1 1 m_2}^{1 m = m_1 + m_2} b_{m_2}^\dagger \tilde{b}_{m_1}. \quad (4.8)$$

Като се пресметнат  $q$ -деформираните ККГ, се получава следния явен вид на компонентите му

$$\begin{aligned} I_{-1}^1 &= \sqrt{\frac{[2]}{[4]}} \{q b_{-1}^\dagger \tilde{b}_0 - q^{-1} b_0^\dagger \tilde{b}_{-1}\} \\ I_0^1 &= \sqrt{\frac{[2]}{[4]}} \{b_{-1}^\dagger \tilde{b}_1 - b_1^\dagger \tilde{b}_{-1} + (q - q^{-1}) b_0^\dagger \tilde{b}_0\} \\ I_1^1 &= \sqrt{\frac{[2]}{[4]}} \{q b_0^\dagger \tilde{b}_1 - q^{-1} b_1^\dagger \tilde{b}_0\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

С помощта на правилата за спрягане (4.6) могат да се проверят правилата за спрягане на операторите (4.9), като в следствие получаваме за образите същия резултат като за изходните оператори

$$(I_m^1)^\dagger = (-1)^{-m} q^{-m} I_{-m}^1. \quad (4.10)$$

Пълното потвърждение на коректността на определянето на образите на операторите  $L_m^1$  чрез (4.7) изисква проверка на комутационните съотношения между компонентите им, които трябва да съвпадат с тези на изходните оператори. Това от своя страна изисква да знаем, какъв вид алгебра затварят основните елементи  $b_m^\dagger$  и  $\tilde{b}_m$ , от които се конструират образите. В класическия случай това е алгебрата на Weyl  $w(3)$  определена чрез стандартните бозонни комутационни съотношения на операторите на раждане и унищожение. В  $q$ -деформирания случай връзката между бозонните оператори и съответните им НТО-и спрямо  $su_q(2)$  не се получава лесно, така че не е очевидно какви комутационни съотношения между  $q$ -вектор операторите да се използват. Нашата идея е да се ползват, по аналогия с класическия случай, но подходящо променени, комутационните съотношения на изходните тензорни оператори (3.14) и (3.15). Имайки предвид това, първо дефинираме следния набор от  $q$ -комутационни съотношения

$$\begin{aligned} [\tilde{b}_m, \tilde{b}_{m'}]_{q^\lambda} &:= [\tilde{T}_m^1, \tilde{T}_{m'}^1]_{q^\lambda} = 0 \\ [b_m^\dagger, b_{m'}^\dagger]_{q^\lambda} &:= [T_m^1, T_{m'}^1]_{q^\lambda} = 0 \quad m, m' = -1, 0, 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

да бъде еквивалентен на комутационните съотношения на съответните генератори на  $\mathfrak{g}_+$  и  $\mathfrak{g}_-$  дадени от (4.2). Така фиксираме  $\lambda = 2(m - m')$ .

Наборът от останалите  $[b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}]_{q^\mu}$  - комутатори разделяме на две части, които разглеждаме по отделно.

- Първата част е с  $m + m' \neq 0$ , за която съответните  $q$ -комутатори  $[T_m^1, \tilde{T}_{m'}^1]_{q^\lambda}$  дават член пропорционален на операторите  $L_m^1, m = \pm 1$ , като в (4.3). За тези комутатори запазваме степента на  $q$ -комутатора, но пренебрегваме резултатния генератор, като ги дефинираме по следния начин

$$[b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}]_{q^\mu} := 0 . \quad (4.12)$$

В резултат е определена стойността на  $\mu = -\lambda = 2(m - m')$ .

- Другата част комутаторите се състои от комбинации на индексите на участващите в тях генератори с  $m + m' = 0$ , както в (4.4) и които дават в резултат един свободен член и един член зависещ от компонентите на  $L_0^l$ .

При този тип структура, отнасяща се за двойките индекси  $(m, m') = (1, -1), (0, 0)$  и  $(-1, 1)$  ние отново запазваме степента на  $q$ -комутатора, пренебрегваме члена зависещ от  $L$  и следователно приемаме за валидни следните  $q$ -комутатори:

$$\begin{aligned} [b_{-1}^\dagger, \tilde{b}_1]_{q^4} &:= -\alpha q^4 q^{-\beta J_0} \\ [b_0^\dagger, \tilde{b}_0] &:= \gamma q^{-\beta J_0} \\ [b_1^\dagger, \tilde{b}_{-1}]_{q^{-4}} &:= \delta q^{-\beta J_0} , \end{aligned} \quad (4.13)$$

в които параметрите  $\alpha, \gamma$  и  $\delta$  могат да бъдат  $q$ -числа, а  $\beta$  е реално число.

Използваният тук проекционен метод се прилага по аналогия с метода на комутаторно проектиране даден за класическия случай в [46, 47]. Стойностите на параметрите  $\alpha, \gamma, \delta$  и  $\beta$  в (4.13) се определят съответно чрез налагането на основното изискване комутационните съотношения между образите  $[I_m^1, I_{m'}^1]$  да бъдат същите като комутационните съотношения между изходните оператори  $[L_m^1, L_{m'}^1]$  в (4.1):

$$[L_m^1, L_{m'}^1] \rightarrow [I_m^1, I_{m'}^1] . \quad (4.14)$$

Сега заместваем изразите (4.9) за операторите  $I_m^1, m = 0, \pm 1$  в горните комутатори и използваме съотношенията (4.11), (4.12) и (4.13). Като отчитаме, че за произведенията от операторите трябва систематично да се запазва нетривиалната им деформация, се получават сравнително прости уравнения за параметрите, които имат следните решения

$$\alpha = q^{-1} \sqrt{[4]}, \quad \beta = 2, \quad \gamma = \sqrt{[4]}, \quad \delta = -q^{-3} \sqrt{[4]} . \quad (4.15)$$

Замествайки тези стойности на параметрите  $\alpha, \gamma, \delta$  и  $\beta$  в  $q$ -комуторите (4.13), получаваме последната серия от комутационни съотношения за операторите  $b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}, m = 0, \pm 1$ , които могат единно да бъдат записани така

$$[b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}]_{q^\mu} = (-1)^{2m'-m} q^{2m'-m} \delta_{m,-m'} \sqrt{[4]} q^{-2J_0} \quad (4.16)$$

като  $\mu = 2(m' - m)$ .

Тук трябва да се отбележи, че сравнявайки дясната страна на (4.16) със свободния член в (4.4) само степента  $J_0$  на оператора  $q$  и  $q$ -числото са различни. Освен това не е известно представянето на оператора  $J_0$  в термини на операторите  $b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}$ , но ние предполагаме, че неговото действие върху тензорните оператори (3.7а) и (3.7б) се запазва, например:

$$q^{J_0} b_m^\dagger = q^m b_m^\dagger q^{J_0}, \quad q^{J_0} \tilde{b}_m = q^m \tilde{b}_m q^{J_0}. \quad (4.17)$$

Системата от комутационни съотношения (4.11), (4.12) и (4.16) е определена по горе по такъв начин, че комутационните съотношения между образите  $I_m^1$  са същите като тези на изходните оператори  $L_m^1$  (4.1). За да премахнем допълнителния оператор  $q^{2J_0}$  за компонентите на образите  $I_m^1$  може да се извърши същото премащабиране като в (3.31б)

$$\widehat{I}_m^1 = \sqrt{[1 + \delta_{m,0}]} I_m^1 q^{2J_0}, \quad m = 0, \pm 1. \quad (4.18)$$

В резултат на проектирането и премащабирането (4.18) операторите  $\widehat{I}_{m_1}^1$  генерират  $q$ -деформирана  $so(3)$  алгебра със следните комутационни съотношения.

$$[\widehat{I}_{m_1}^1, \widehat{I}_{m_2}^1]_{q^{2(m_2-m_1)}} = [m_1 - m_2] q^{(m_2-m_1)} \widehat{I}_{m_1+m_2}^1. \quad (4.19)$$

### 4.3 $q$ -деформираната $su(3)$ алгебра

При изложената проекционна процедура образът на подалгебрата  $\mathfrak{h}$  на  $q$ -деформираната тензорна  $sp_t(4, R)$  алгебра е конструиран с помощта на два взаимно спрегнати НТО  $b_m^\dagger$  и  $\tilde{b}_{m'}$ . Тъй като тези оператори са по дефиниция тензори от първи ранг по отношение на  $su_q(2)$ , от тях съгласно правилата за тензорни произведения (3.9), може да се построят още и оператора

$$Q_m^2 := (b^\dagger \tilde{b})_m^1 = \sum_{m_1, m_2} q C_{1m_1 1m_2}^{2m} b_{m_2}^\dagger \tilde{b}_{m_1}, \quad (4.20)$$

с  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ;  $m_1, m_2 = -1, 0, 1$  и  $m_1 + m_2 = m$ , както и скалара

$$S_0^0 := (b^\dagger \otimes \tilde{b})_0^0 = \sum_{m_1, m_2} q C_{1m_1 1m_2}^{00} b_{m_2}^\dagger \tilde{b}_{m_1}. \quad (4.21)$$

Компонентите на тензора от втори ранг, представени в явен вид чрез операторите  $b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}$  са

$$\begin{aligned} Q_2^2 &= b_1^\dagger \tilde{b}_1, & Q_{-2}^2 &= b_{-1}^\dagger \tilde{b}_{-1}, \\ Q_1^2 &= \sqrt{\frac{[2]}{[4]}} \{q^{-1} b_0^\dagger \tilde{b}_1 + q b_1^\dagger \tilde{b}_0\}, & Q_{-1}^2 &= \sqrt{\frac{[2]}{[4]}} \{q b_0^\dagger \tilde{b}_1 + q^{-1} b_{-1}^\dagger \tilde{b}_0\}, \\ Q_0^2 &= \sqrt{\frac{[2]}{[3][4]}} \{q^2 b_1^\dagger \tilde{b}_{-1} + q^{-2} b_{-1}^\dagger \tilde{b}_1 + [2] b_0^\dagger \tilde{b}_0\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Горният НТО от втори ранг може да се интерпретира като квадруполен оператор. Тази интерпретация е обоснована на първо място от комутационните съотношения на компонентите на този оператор с тези на оператора  $I_m^1$  (4.9). Те се пресмятат с помощта на комутационните съотношения между операторите  $b_m^\dagger, \tilde{b}_{m'}$  получени в предишния параграф. Тук даваме резултата от комутаторите между премащабираните компоненти на оператора  $\widehat{I}_m^1$  от (4.9) и премащабираните  $\widehat{Q}_m^l = Q_m^l q^{-2J_0}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) компоненти (4.22)

$$[\widehat{I}_{m_1}^1, \widehat{Q}_{m_2}^2]_{q^{2(m_2-m_1)}} = q^{(m_2-m_1)} \mathcal{F}_{m_1, m_2} \widehat{Q}_{m_1+m_2}^1, \quad (4.23)$$

където

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\pm 1, m_2} &= \pm \sqrt{[2 \mp M_2][2 \pm m_2 + 1]} \\ \mathcal{F}_{0, m_2} &= -[m_2]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Тези комутатори могат да се използват като дефиниционни съотношения за компонентите на тензорен оператор относно  $su(2) \sim so(3)$   $q$ -деформирана алгебра генерирана от операторите  $\widehat{I}_m^1$ ,  $m = 0, \pm 1$ . Преходът към класическата граница при  $q \rightarrow 1$  възпроизвежда резултатите

$$[\dot{L}_{M_1}, \dot{Q}_{M_2}] = -\sqrt{6} C_{1M_1, 2M_2}^{2M_1+M_2} \dot{Q}_{M_1+M_2}, \quad M_1 = 0, \pm 1, \quad M_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (4.25)$$

за “алгебричния” квадруполен оператор  $\dot{Q}_M^2$  и за истинския оператор на ъгловия момент  $\dot{L}_M^1$  като  $SU(3)$  генератори [38, 39].

Нещо повече, комутационните съотношения между компонентите на оператора

$\widehat{Q}_m^2$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) са

$$\begin{aligned}
[\widehat{Q}_{-2}^2, \widehat{Q}_{-1}^2]_{q^2} &= 0, & [\widehat{Q}_1^2, \widehat{Q}_2^2]_{q^2} &= 0, \\
[\widehat{Q}_{-1}^2, \widehat{Q}_0^2]_{q^2} &= -q\sqrt{[2][3]} \{ \widehat{I}_{-1}^1 - (q - q^{-1})[2]\widehat{Q}_{-1}^2 \}, \\
[\widehat{Q}_0^2, \widehat{Q}_1^2]_{q^2} &= -q\sqrt{[2][3]} \{ \widehat{I}_1^1 - (q - q^{-1})[2]\widehat{Q}_1^2 \}, \\
[\widehat{Q}_{-2}^2, \widehat{Q}_0^2]_{q^4} &= q^2(q - q^{-1})\sqrt{[2][3]} \widehat{Q}_{-2}^2, & [\widehat{Q}_0^2, \widehat{Q}_2^2]_{q^4} &= q^2(q - q^{-1})\sqrt{[2][3]} \widehat{Q}_2^2, \\
[\widehat{Q}_{-2}^2, \widehat{Q}_1^2]_{q^6} &= q^3 \widehat{I}_{-1}^1, & [\widehat{Q}_{-1}^2, \widehat{Q}_2^2]_{q^6} &= q^3 \sqrt{[4]} \widehat{I}_1^1, \\
[\widehat{Q}_{-2}^2, \widehat{Q}_0^2]_{q^8} &= q^4 \{ [2]^2 \widehat{I}_0^1 - (q - q^{-1})\sqrt{[2][3]} \widehat{Q}_0^2 \}, \\
[\widehat{Q}_{-1}^2, \widehat{Q}_1^2]_{q^4} &= -q^2 [2] \{ \widehat{I}_0^1 - (q - q^{-1})\sqrt{[2][3]} \widehat{Q}_0^2 \}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Анализирайки ги, трябва да се отбележи, че  $q$ -комутаторите дават правилните компоненти на оператора  $\widehat{I}_m^1$ , съгласно правилото

$$[\dot{Q}_{M_1}, \dot{Q}_{M_2}] = 3\sqrt{10} C_{2M_1, 2M_2}^{1M_1+M_2} \dot{L}_{M_1+M_2}, \quad M_1, M_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \tag{4.27}$$

съответстватщо на класическия случай.

В  $q$ -деформирания случай се получават допълнително членове пропорционални на съответната компонента на  $\widehat{Q}_m^2$  ( $m = m_1 + m_2 = 0, \pm 1, \pm 2$ ), но с коефициент съдържащ множителя  $(q - q^{-1})$ , който се анулира, когато  $q \rightarrow 1$ . Това е съществено различие в  $q$ -деформирания случай, което може да доведе до нови резултати при физически приложения.

След въвеждането на ККГ в тензорното произведение (4.21) явният вид на скаларния оператор е

$$S_0^0 = \frac{1}{\sqrt{[3]}} \left\{ q^{-1} b_1^\dagger \tilde{b}_{-1} + q b_{-1}^\dagger \tilde{b}_1 - b_0^\dagger \tilde{b}_0 \right\}. \tag{4.28}$$

Скаларният оператор получен по този начин може да се счита за образ на скаларния оператор  $L_0^0$ , дефиниран в (3.22)

$$\sqrt{[2]} L_0^0 \rightarrow \sqrt{[3]} S_0^0. \tag{4.29}$$

Причината за тази интерпретация е, че  $S_0^0$  (4.28) комутира с компонентите (4.9) на тензора от първи ранг  $I_m^1$

$$[S_0^0, I_m^1] = [L_0^0, L_m^1] = 0, \quad m = 0, \pm 1. \tag{4.30}$$

Накрая, трябва да се изчислят комутационните съотношения на скаларния оператор  $S_0^0$  с компонентите на  $Q_m^2$ , за които получаваме също

$$[S_0^0, Q_m^2] = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2. \tag{4.31}$$

Въвеждайки образите на операторите  $L_0^0$  и  $L_0^1$  в уравненията (3.24), образите на  $q$ -деформираните оператори на броя на бозоните могат да се получат в термини на  $q$ -деформираните вектори

$$\begin{aligned} [N_1]q^{N_2} &\rightarrow \left( q b_1^\dagger \tilde{b}_{-1} - \frac{q^{-1}}{[2]} b_0^\dagger \tilde{b}_0 \right) \\ [N_2]q^{-N_1} &\rightarrow - \left( q^{-1} b_1^\dagger \tilde{b}_{-1} - \frac{q}{[2]} b_0^\dagger \tilde{b}_0 \right) . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Важна разлика с конструкциите от [42, 43] е възможността да се изразят операторите на броя на частиците (4.32) в термини на  $q$ -бозони и да се построи  $q$ -аналог на физически важния квадруполен оператор. Тази разлика подчертава важната роля на условията наложени при определянето на комутационните съотношения между  $q$ -векторите. Използваната за тази цел проекционна процедура е твърде подходяща за получаване не само на най-простите представяния на  $q$ -деформираните алгебри, но също и за влагането на  $so(3)$  в  $u(3)$  в  $q$ -деформирания случай, отговаряйки по този начин на някои от проблемите останали нерешени в [43].

От пресметнатите комутационни съотношения между скаларния оператор  $S_0^0$  (4.21), премащабирания тензорен оператор  $\widehat{I}_m^1$  (4.18) и  $\widehat{Q}_m^2$  (4.27) и съответните им граници, когато  $q \rightarrow 1$  могат да направят следните заключения. В резултат на комутационните съотношения (4.19) компонентите на оператора  $\widehat{I}_m^1$  затварят  $q$ -деформация на  $su(2)$  алгебра изоморфна на  $so(3)$  алгебра, която се интерпретира като алгебра на ъгловия момент. От съотношението (4.30) е очевидно, че операторите  $\widehat{I}_m^1$  и  $S_0^0$  генерират  $q$ -деформация на  $u(2)$  алгебра, като се реализира следната редукция

$$u_{\tilde{q}}(2) \supset su_{\tilde{q}}(2) \oplus u_{\tilde{q}}(1) . \quad (4.33)$$

Индексът  $\tilde{q}$  означава, че това не е стандартната  $q$ -алгебра, а изобщо някаква деформация на същия тип класическа алгебра на Ли.

От комутаторите (4.26) и (4.22) може да се заключи, че 8-те компоненти на  $\widehat{I}_m^1$  и  $\widehat{Q}_m^2$  затварят  $q$ -деформация на  $su(3)$  алгебра и заедно със скалара  $S_0^0$  образуват  $q$ -деформация на  $u(3)$ . Следователно, е реализирана редукционната редица

$$u_{\tilde{q}}(3) \supset su_{\tilde{q}}(3) \oplus u_{\tilde{q}}(1) \supset so_{\tilde{q}}(3) \oplus o_{\tilde{q}}(2) \quad (4.34)$$

важна за приложения в различните модели на ядрената структура.

Използвайки важни аналогии със стандартните подходи към алгебричните структури в моделите на ядрената физика, включително ролята на съотношенията за влагане, е получено по нестандартен и нов начин представяне на  $q$ -деформираната  $u(3)$  алгебра в термини на сферични тензори, които имат ясни физически аналози в класическите алгебрични модели. Тази конструкция води по много естествен начин

---

до редукцията (4.34), която определя директен начин за приложения използващи  $q$ -деформирани квадруполни структури.

## 5. Фермионна реализация на $sp(4)$ алгебрата и нейните подалгебри и деформациите им

Бозонната реализация на некомпактната  $sp(4, R)$  и две нейни отделни деформации, както и компактните и некомпактните подалгебри на всяка от тях бяха изследвани в предишните глави 2 и 3, както и в [A1] и бяха получени редуkcиите на техните пространства на действие. Тъй като фермионният случай има по-преки приложения в ядрената теория отколкото бозонната конструкция, нашата цел е да изследваме детайлно фермионната реализация на алгебрата  $sp(4)$  и нейните деформации. Използвайки методиката от [A1] започваме с добре известната реализация на тази алгебра в термини на “класически” фермионни оператори на раждане и унищожение и разглеждаме всички подалгебри, които съответстват на различни начини за определяне на квантовите числа на базисните състояния чрез собствените стойности на операторите, генериращи тези подалгебри (§5.1).

Деформираните алгебри въвеждат нова степен на свобода, която може да доведе до по-задълбочено разбиране на нелинейните ефекти при физическите приложения. С тази цел е получена деформация на тази  $sp(4)$  алгебра и нейните подалгебри чрез въвеждането на трансформационна функция, която преобразува класическите фермиони в  $q$ -деформиранни. Въвежда се още една деформация в термини на стандартни  $q$ -фермиони и следвайки същата процедура се изследва обвиващата алгебра на  $sp(4)$  и действието на нейните генератори върху деформирания базис (§5.2).

### 5.1 Фермионна реализация на $sp(4)$ алгебра

За да въведем означенията ще напомним някои характеристики на фермионната реализация  $sp(4)$  алгебрата [3, 8, 12], която е изоморфна на  $so(5)$  [48], използвана обикновено в теорията на слоестия модел. Операторът  $c_{m,\sigma}^\dagger$  ражда ( $c_{m,\sigma}$  унищожават) частица от тип  $\sigma = \pm 1$  в състояние с общ ъглов момент  $j = \frac{2k+1}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , с проекция  $m$  по оста  $z$  ( $-j \leq m \leq j$ ). Те удовлетворяват фермионни антикомутиационни съотношения

$$\{c_{m',\sigma'}, c_{m,\sigma}^\dagger\} = \delta_{m',m} \delta_{\sigma',\sigma}, \quad \{c_{m',\sigma'}^\dagger, c_{m,\sigma}^\dagger\} = \{c_{m',\sigma'}, c_{m,\sigma}\} = 0, \quad (5.1)$$

и ермитовото спрягане се дава от  $(c_{m,\sigma}^\dagger)^* = c_{m,\sigma}$ .

За дадено  $\sigma$ , размерността на фермионното пространство е  $2\Omega_j = 2j + 1$ . Фермионната реализация на  $sp(4)$  се задава стандартно от следните оператори [8, 48, 49]:

$$A_{\sigma,\sigma'} = \xi_{\sigma,\sigma'} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} c_{m,\sigma}^\dagger c_{-m,\sigma'}^\dagger = A_{\sigma',\sigma} = (B_{\sigma,\sigma'})^\dagger, \quad (5.2)$$

$$B_{\sigma,\sigma'} = \xi_{\sigma,\sigma'} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} c_{-m,\sigma} c_{m,\sigma'} = B_{\sigma',\sigma} = (A_{\sigma,\sigma'})^\dagger. \quad (5.3)$$

Тези оператори раждат (унищожават) двойка фермиони свързани до пълен ъглов момент  $J = 0$  [48] и така съставляват бозонно подобен обект съгласно теоремата за връзка на спина със статистиката [50]. От друга страна операторите

$$D_{\sigma,\sigma'} = \eta \sum_{m=-j}^j c_{m,\sigma}^\dagger c_{m,\sigma'}, \quad (5.4)$$

запазват броя на фермионите. Нормиращите константи в (5.2), (5.3) и (5.4) са

$$\xi_{\sigma,\sigma'} = \frac{\eta}{\sqrt{(1 + \delta_{\sigma,\sigma'})}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j}}. \quad (5.5)$$

Броят на операторите  $A_{\sigma,\sigma'}$ ,  $B_{\sigma,\sigma'}$  и  $D_{\sigma,\sigma'}$  е 10 ( $A_{\sigma,\sigma'} = A_{\sigma',\sigma}$ ,  $B_{\sigma,\sigma'} = B_{\sigma',\sigma}$ ). Техните комутационни съотношения получени с помоща на (5.1), показват, че тези оператори генерират фермионна реализация на  $sp(4)$  алгебра [49]. За фермионните оператори на раждане и унищожение е въведен допълнителен индекс  $m \neq 0$  за да се конструират ненулеви оператори  $A_{\sigma,\sigma}$  и  $B_{\sigma,\sigma}$ , но индексът  $\sigma = \pm 1$  определя алгебричните свойства на генераторите  $A_{\sigma,\sigma'}$ ,  $B_{\sigma,\sigma'}$  и  $D_{\sigma,\sigma'}$ .

Различните интерпретации на  $\sigma$  определят различен физически смисъл на операторите генериращи десет параметричната група  $Sp(4)$  и следователно различни физически модели. Те могат да се използват за описанието на различни аспекти на ядреното взаимодействие (различни хамилтониани) [8], като зарядово независимо сдвояване, сдвояване на частици от две нива (модел на Lipkin) или двумерни ротации и вибрации. В тези приложения  $sp(4)$  се разглежда като алгебра на динамична симетрия. Всяка от границите се определя от редукционна верига на алгебрата, която служи за означаване на базисните състояния чрез собствените стойности на инвариантните оператори на нейните подалгебри и дава съответстващите гранични форми на моделния хамилтониан.

### 5.1.1 Подалгебри на $sp(4)$

Сега ще дадем изследването на подалгебрите на  $sp(4)$  съдържащи се в различни реализации на редукционната верига  $sp(4) \supset u(2) = su(2) \oplus u(1) \rightsquigarrow so(3) \oplus o(2)$ .

1. Използвайки запазващите броя на частиците генератори на Weyl  $D_{i,j}$  (5.4), подалгебра  $u(2)$  на  $sp(4)$  се реализира от операторите:

$$\begin{aligned}\tau_1 &\equiv D_{+1,-1} = \eta \sum_{m=-j}^j c_{m,1}^\dagger c_{m,-1}, & \tau_0 &= \frac{N_1 - N_{-1}}{2}, \\ \tau_{-1} &\equiv D_{-1,+1} = \eta \sum_{m=-j}^j c_{m,-1}^\dagger c_{m,1}, & N &= N_{+1} + N_{-1},\end{aligned}\quad (5.6)$$

където  $N_{\pm 1} \equiv \frac{1}{\eta} D_{\pm 1, \pm 1}$  са оператори на общия брой фермиони от всеки вид,

$$N_\sigma = \sum_{m=-j}^j c_{m,\sigma}^\dagger c_{m,\sigma}, \quad \sigma = \pm 1. \quad (5.7)$$

Действието на тези оператори върху фермионните оператори на раждане и унищожение се дава от

$$\begin{aligned}N_\sigma c_{m,\sigma'}^\dagger &= c_{m,\sigma'}^\dagger (N_\sigma + \delta_{\sigma,\sigma'}), & N_\sigma c_{m,\sigma'} &= c_{m,\sigma'} (N_\sigma - \delta_{\sigma,\sigma'}), \\ \sigma, \sigma' &= \pm 1,\end{aligned}\quad (5.8)$$

и антикомутиционните съотношения (5.1) водят до равенството

$$\sum_{m=-j}^j c_{m,\sigma} c_{m,\sigma}^\dagger = 2\Omega_j - N_\sigma, \quad \sigma = \pm 1. \quad (5.9)$$

Операторите (5.6) удовлетворяват комутиционните съотношения за  $u(2)$

$$[\tau_+, \tau_-] = 2\frac{\tau_0}{2\Omega_j}, \quad [\tau_0, \tau_\pm] = \pm\tau_\pm, \quad [N, \tau_\pm] = 0, \quad [N, \tau_0] = 0. \quad (5.10)$$

където  $\tau_0, \tau_\pm$  затварят алгебра  $su^\tau(2)$ , която е изоморфна на  $so(3)$ . Операторът  $N$  генерира  $U(1)$  и играе ролята на инвариант от първи ред на  $U^\tau(2) = SU^\tau(2) \otimes U(1)$ . Операторът на Казимир от втори порядък за  $SU^\tau(2)$  е

$$\tau^2 = \frac{2\Omega_j}{2}(\tau_+\tau_- + \tau_-\tau_+) + \tau_0\tau_0, \quad (5.11)$$

а инвариантът от втори порядък на  $U^\tau(2)$  [8] се задава от

$$C_2 = N(N+1) - \tau^2. \quad (5.12)$$

Алгебрата  $su^\tau(2) \curvearrowright so(3)$  играе много важна роля във всички физически приложения, тъй като тя е от стандартния спинов тип и може да бъде интерпретирана като спинова, изоспинова или алгебра на ъгловия момент в различните модели.

2. Друга унитарна реализация на  $u(2)$ , означена като  $u^0(2)$ , се генерира от  $\tau_0$  (5.6) и операторите

$$A_{+1}^0 \equiv A_{1,-1}, \quad A_{-1}^0 \equiv B_{1,-1}, \quad A_0^0 \equiv \frac{N}{2} - \Omega_j \quad (5.13)$$

със следните комутационни съотношения:

$$\begin{aligned} [A_{+1}^0, A_{-1}^0] &= 2\frac{A_0^0}{2\Omega_j}, & [A_0^0, A_{\pm 1}^0] &= \pm A_{\pm 1}^0 \\ [\tau_0, A_{\pm 1}^0] &= 0, & [\tau_0, A_0^0] &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

За тази реализация операторът  $\tau_0$  действа като инвариант от първи порядък на  $u^0(2)$ , определяйки по този начин редукцията  $u^0(2) = su^0(2) \oplus u^0(1)$ . Операторът на Casimir от втори ред за тази подгрупа се дава от

$$C_2(SU^0(2)) = \frac{2\Omega_j}{2}(A_{+1}^0 A_{-1}^0 + A_{-1}^0 A_{+1}^0) + A_0^0 A_0^0. \quad (5.15)$$

Генераторите на тази  $SU^0(2)$  група са оператори сдвояващи частици от двата различни типа със  $\sigma = +1$  и  $\sigma = -1$ .

3. Следват две взаимно допълнителни подалгебри  $su(2)$  на алгебрата  $sp(4)$ , означени като  $su^+(2)$  и  $su^-(2)$ . Тези алгебри се пораждат от операторите

$$A_{+1}^{\pm} \equiv A_{\pm 1, \pm 1}, \quad B_{-1}^{\pm} \equiv B_{\pm 1, \pm 1}, \quad D_0^{\pm} \equiv \frac{N_{\pm 1}}{2} - \frac{\Omega_j}{2}, \quad (5.16)$$

със следните комутационни съотношения:

$$[A_{+1}^{\pm}, B_{-1}^{\pm}] = 4\frac{D_0^{\pm}}{2\Omega_j}, \quad [D_0^{\pm}, A_{+1}^{\pm}] = A_{+1}^{\pm}, \quad [D_0^{\pm}, B_{-1}^{\pm}] = -B_{-1}^{\pm}. \quad (5.17)$$

Лесно се вижда, че всеки от генераторите на  $SU^+(2)$  комутира със всички генератори на  $SU^-(2)$ . Вторите оператори на Casimir за  $SU^{\pm}(2)$  са

$$C_2(SU^{\pm}(2)) = \frac{\Omega_j}{2}(A_{+1}^{\pm} B_{-1}^{\pm} + B_{-1}^{\pm} A_{+1}^{\pm}) + D_0^{\pm} D_0^{\pm}. \quad (5.18)$$

В този случай добавянето на операторите  $N_{\mp 1}$ , считани за генератори на подгрупите  $U^{\mp}(1)$ , разширява  $su^{\pm}(2)$  до  $u^{\pm}(2) = su^{\pm}(2) \oplus u^{\mp}(1)$ .  $N_{\mp 1}$  действат като първи оператори на Casimir на  $U^{\pm}(2)$ . Операторите затварящи двете взаимно допълнителни подалгебри пораждат двойки от частици от един и същи вид.

4. Сумата на генераторите на групите  $SU^+(2)$  и  $SU^-(2)$  пораждат още една реализация на  $su(2)$  подалгебрата на  $sp(4)$  означена като  $su^{\sim}(2)$ ,

$$\tilde{A}_{+1} \equiv A_{+1}^+ + A_{+1}^-, \quad \tilde{B}_{-1} \equiv B_{-1}^+ + B_{-1}^-, \quad \tilde{D}_0 \equiv \frac{N_1}{2} + \frac{N_{-1}}{2} - \Omega_j, \quad (5.19)$$

със следните комутационни съотношения:

$$[\tilde{A}_{+1}, \tilde{B}_{-1}] = 4\frac{\tilde{D}_0}{2\Omega_j}, \quad [\tilde{D}_0, \tilde{A}_{+1}] = \tilde{A}_{+1}, \quad [\tilde{D}_0, \tilde{B}_{-1}] = -\tilde{B}_{-1}, \quad (5.20)$$

и оператор на Casimir от втори порядък

$$C_2(SU^{\sim}(2)) = \frac{\Omega_j}{2}(\tilde{A}_{+1} \tilde{B}_{-1} + \tilde{B}_{-1} \tilde{A}_{+1}) + \tilde{D}_0 \tilde{D}_0. \quad (5.21)$$

### 5.1.2 Пространство на действие на фермионната реализация на $sp(4)$

Изобщо, за определено  $j$ -ниво, класическите фермионни оператори действат в крайни метрични пространства  $\mathcal{E}_j$ . Крайномерността на представянията се дължи на принципа на Pauli,  $c_{m,\sigma}^\dagger c_{m,\sigma}^\dagger |0\rangle = 0$ , който не позволява повече от  $2\Omega_j$  фермиони в един  $j$ -слой. В  $\mathcal{E}_j$  вакуумът  $|0\rangle$  се определя от условието  $c_{m,\sigma} |0\rangle = 0$  и скаларното произведение е избрано така, че  $\langle 0|0\rangle = 1$ .

Състоянията, върху които са опънати пространствата  $\mathcal{E}_j$  се състоят от различен брой фермионни оператори на раждане, действащи върху вакуумното състояние. Те удовлетворяват принципа на Pauli благодарение на тяхните антикомутационни съотношения (5.1). Те образуват ортонормален базис във всяко пространство и са общи собствени вектори на операторите на броя на фермионите  $N_1, N_{-1}$  ( $N_\sigma = N_\sigma^*$ ,  $\sigma = \pm 1$ ) и  $N = N_1 + N_{-1}$ . Така те разпъват две подпространства  $\mathcal{E}_j^\pm$  означени от собствените стойности на инвариантния оператор  $P = (-1)^N$  на  $Sp(4)$ . Тук от съществен интерес е четното подпространство  $\mathcal{E}_j^+$ , съдържащо състоянията на сдвоени фермиони, тъй като целта ни по-нататък е да прилагаме теорията към сдвояващите взаимодействия в ядрата.

Ако се въведат означенията

$$A_{\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')}^\dagger \equiv A_{\sigma,\sigma'}, \quad B_{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')} \equiv B_{\sigma,\sigma'}, \quad \sigma, \sigma' = \pm 1, \quad (5.22)$$

за операторите раждащи (5.2) и унищожавачи (5.3) двойка частици, лесно се проверява, че те представляват компоненти на два спрегнати вектора  $\{A_k^\dagger\}_{k=0,\pm 1}$  и  $\{B_{-k}\}_{k=0,\pm 1}$ ,  $k = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma') = 0, \pm 1$  по отношение на подгрупата  $SU^\tau(2)$  (5.6), (5.10):

$$\begin{aligned} [\tau_0, A_k^\dagger] &= kA_k^\dagger, & [\tau_l, A_k^\dagger] &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} A_{l+k}^\dagger, & l &= \pm 1, \\ [\tau_0, B_k] &= kB_k, & [\tau_l, B_k] &= -\frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} B_{l+k}, & l &= \pm 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

В моделите, където  $\tau$  се интерпретира като изоспинов оператор,  $A_{0,\pm 1}^\dagger \{B_{0,\mp 1}\}$  раждат (унищожават) двойка фермиони куплирани до общ изоспин  $\tau = 1$ .

Така, линейно независим набор от вектори, които опъват пространството  $\mathcal{E}_j^+$  може да се изрази в термини на “бозонни оператори на раждане” действащи върху вакуумното състояние,

$$|\Omega_j; n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \left(A_1^\dagger\right)^{n_1} \left(A_0^\dagger\right)^{n_0} \left(A_{-1}^\dagger\right)^{n_{-1}} |0\rangle. \quad (5.24)$$

Базисът се получава от ортонормализацията на (5.24). Операторите  $A_{0,\pm 1}^\dagger$  комутират помежду си и следователно образуват симетрично представяне. Със собствената стойност  $\Omega_j$  на оператора на Casimir от втори ред са означени представянията на

$Sp(4)$ ,

$$C_2(Sp(4)) = \{\tau_+, \tau_-\} + \{A_{+1}^0, A_{-1}^0\} + \{A_{+1}^+, B_{-1}^+\} + \{A_{+1}^-, B_{-1}^-\} + \frac{1}{\Omega_j} \left( \tau_0 \tau_0 + \frac{(N - 2\Omega_j)^2}{4} \right), \quad (5.25)$$

$$C_2(Sp(4)) |\Omega_j; n_1, n_0, n_{-1}\rangle = (\Omega_j + 3) |\Omega_j; n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \quad (5.26)$$

Групата  $Sp(4)$  е от втори ранг и следователно съществуват два инвариантни оператора, които комутират с всеки от генераторите на групата [49]. Другият инвариантен оператор е от четвърти порядък и е линейно зависим от операторите на Casimir за тази група. Обикновено представянията на  $Sp(4)$  се означават с най-голямата собствена стойност на оператора на общия брой фермиони  $N$  и редуцирания изоспин на несдвоените фермиони в съответното състояние [48, 51]. Във всяко представяне на  $Sp(4)$  във векторното пространство опънато върху (5.24), максималният брой частици е  $4\Omega_j$  и в съответното му състояние няма несдвоени фермиони (редуцираният изоспин е нула). Следователно в случая е необходимо само едно квантово число  $\Omega_j$ . В дадено представяне даже и  $\Omega_j$  не е нужно при неговото означаване. Друго следствие от симетричността на представянето е, че векторното пространство се състои от състояния на системата с общ ъглов момент  $J = 0^+$ .

Всяко представяне означено с  $\Omega_j$  е крайно, поради фермионната структура на операторите  $A_{0,\pm 1}^\dagger$ :  $(A_{\pm 1}^\dagger)^{\Omega_j+1} |0\rangle = 0$  или  $(A_{\pm 1}^\dagger)^{\Omega_j} (A_0^\dagger) |0\rangle = 0$ . Друго следствие от фермионната реализация е, че някои от векторите (5.24) от крайномерното пространство  $\mathcal{E}_j^+$  са линейно зависими, например  $(A_1^\dagger)^{\Omega_j} (A_{-1}^\dagger)^{\Omega_j} |0\rangle \sim (A_0^\dagger)^{2\Omega_j} |0\rangle$ .

Състоянията (5.24) са общи собствени вектори на операторите на броя на фермионите  $N_1, N_{-1}$  ( $N_\sigma = N_\sigma^*$ ,  $\sigma = \pm 1$ ):

$$\begin{aligned} N_1 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= (2n_1 + n_0) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \\ N_{-1} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= (2n_{-1} + n_0) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \end{aligned} \quad (5.27)$$

или на операторите  $N = N_1 + N_{-1}$  и  $\tau_0 = \frac{1}{2}(N_1 - N_{-1})$  които и двата са диагонални в базиса (5.24):

$$N |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = n |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, n = 2(n_1 + n_{-1} + n_0). \quad (5.28)$$

$$\tau_0 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = i |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, i = n_1 - n_{-1}. \quad (5.29)$$

Техните собствени стойности могат да се използват за класификация на базиса в дадено представяне  $\Omega_j$ . Базисните състояния означени чрез  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$  за  $\Omega_{3/2} = 2$  са показани в Таблица 5.1, където  $n$  номерира редивете, а  $i$  колоните.

Таблица 5.1: Набора от базисни състояния за  $Sp(4)$  представяне  $\Omega_{3/2} = 2$ 

$n/i$	2	1	0	-1	-2
0			$ 0, 0, 0\rangle$		
2		$ 1, 0, 0\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle$	
4	$ 2, 0, 0\rangle$	$ 1, 1, 0\rangle$	$ 1, 0, 1\rangle$ $ 0, 2, 0\rangle$	$ 0, 1, 1\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle$
6		$ 2, 0, 1\rangle$ $ 1, 2, 0\rangle$	$ 1, 1, 1\rangle$ $ 0, 3, 0\rangle$	$ 1, 0, 2\rangle$ $ 0, 2, 1\rangle$	
8			$ 2, 0, 2\rangle$ $ 1, 2, 1\rangle$ $ 0, 4, 0\rangle$		

Базисните вектори са изродени, в смисъл, че повече от едно от общите собствени състояния на операторите  $N$  и  $\tau_0$  имат еднакви собствени стойности  $\{n, i\}$ , и следователно принадлежат на една и съща клетка на Таблица 5.1. Те могат да се различават като собствени състояния на операторите на Casimir в граничните случаи:

1. Базисните състояния могат да се означат със собствените стойности на инвариантните оператори на всяка подгрупа от редукцията  $Sp(4) \supset U(2) \supset SU^\tau(2) \otimes U_N(1)$ . Като инвариант от първи порядък на  $U(2)$ , операторът  $N$  разлага пространствата  $\mathcal{E}_j^+$  на пряка сума от собствени подпространства, определени от условието  $n$  да е фиксирано (5.28),

$$n = 0, 2, 4, \dots, 4\Omega_j. \quad (5.30)$$

Така едно унитарно неприводимо представяне (УНП) на  $U(2)$  се реализира във всеки ред на Таблица 5.1. Подгрупата  $SU^\tau(2)$  дава другите две квантови числа, като стандартни означения за базисните вектори. Първото от тях е собствената стойност на оператора на Casimir от втори ред по  $\tau$ ,

$$\tau^2 |n, \tau, i\rangle = \tau(\tau + 1) |n, \tau, i\rangle, \quad (5.31)$$

където  $\tau = \frac{\tilde{n}}{2}, \frac{\tilde{n}}{2} - 2, \dots, 1$  (odd) или  $0$  (четно),  $\tilde{n} = \min\{n, 4\Omega_j - n\}$ , и второто е собствената стойност на  $\tau_0$  (5.29), където  $i = n_1 - n_{-1} = -\tau, -\tau + 1, \dots, \tau$ . Като пример, ортонормализирания базис  $|n, \tau, i\rangle$  изразен чрез състоянията  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$  е даден в Таблица 5.2 за  $\Omega_{3/2} = 2$ .

Таблица 5.2: Набор от базисни състояния за  $SU^\tau(2)$  представянето  $\Omega_{3/2} = 2$ 

$n_{(\tau)}/i$	2	1	0	-1	-2
0 $\xrightarrow{\tau=0}$			$ 0, 0, 0\rangle$		
2 $\xrightarrow{\tau=1}$		$ 1, 0, 0\rangle$	$ 0, 1, 0\rangle$	$ 0, 0, 1\rangle$	
$\xrightarrow{\tau=2}$ 4 $\xrightarrow{\tau=0}$	$ 2, 0, 0\rangle$	$\sqrt{2} 1, 1, 0\rangle$	$\frac{ 0, 2, 0\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{ 1, 0, 1\rangle}{\sqrt{2}}$ $\frac{ 0, 2, 0\rangle}{\sqrt{5}} - \frac{2 1, 0, 1\rangle}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{2} 0, 1, 1\rangle$	$ 0, 0, 2\rangle$
6 $\xrightarrow{\tau=1}$		$ 2, 0, 1\rangle \equiv$ $-2 1, 2, 0\rangle$	$2 1, 1, 1\rangle \equiv$ $-\frac{2}{3} 0, 3, 0\rangle$	$ 1, 0, 2\rangle \equiv$ $-2 0, 2, 1\rangle$	
8 $\xrightarrow{\tau=0}$			$\frac{2}{3} 0, 4, 0\rangle \equiv$ $-2 1, 2, 1\rangle \equiv$ $ 2, 0, 2\rangle$		

Изобщо, състоянието с максимален брой частици винаги има пълен изоспин  $\tau = 0$ , и всички възможни състояния изразени в базиса  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$  са еквивалентни с точност до нормиращ множител. Например, когато  $\Omega_{1/2} = 1$ , последното състояние е  $(|1, 0, 1\rangle \equiv -|0, 2, 0\rangle)_{\tau=0}$ . Повишаващите (понижаващи) генератори  $\tau_{\pm 1}$  действащи  $(2\tau + 1)$  пъти върху състоянието с най-ниско  $|n, \tau, -\tau\rangle$  (най-висико  $|n, \tau, \tau\rangle$ ) тегло дават всички базисни състояния на съответното  $\tau$ -представяне съгласно резултата

$$\tau_{\pm 1} |n, \tau, i\rangle = \sqrt{\frac{(\tau \mp i)(\tau \pm i + 1)}{2\Omega_j}} |n, \tau, i \pm 1\rangle. \quad (5.32)$$

2. Редукционната редица  $Sp(4) \supset U^0(2) \supset SU^0(2) \otimes U_{\tau_0}(1)$  въвежда друга схема за означаване на базисните състояния  $|i, 2(n_1 + n_{-1})_{\max}, n\rangle$ . Квантовите числа, които определят състоянията са собствената стойност  $i$  на  $\tau_0$ ,  $i = -\Omega_j, -\Omega_j + 1, \dots, \Omega_j$ , квантовото число на старшинството (seniority)  $\nu = 2(n_1 + n_{-1})_{\max} = 2|i|$ , и собствената стойност на оператора  $A_0^0 = -(\Omega_j - |i|), -(\Omega_j - |i|) + 1, \dots, (\Omega_j - |i|)$  (5.13). Първият инвариант на  $U^0(2)$  разлага пространствата  $\mathcal{E}_j^\pm$  на пряка сума от собствени подпространства на оператора  $\tau_0$  при всяка нагова фиксирана стойност (5.29). Тези подпространства са представени в колоните на Таблица 5.1. Операторът  $A_0^0$  (5.13) не се различава съществено от първия инвариант  $N$  на  $U_N(1)$  и редуцира по-нататък колоните

на Таблица 5.1 на отделни клетки. Квантовото число сеньорити различава две състояния с еднакви стойности на  $i$  и  $n$ , но с различни схеми на сдвояване. То се въвежда чрез собствените стойности на оператора на Casimir от втори ред за тази подгрупа:

$$\begin{aligned} C_2(SU^0(2)) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= \\ &= (\Omega_j - (n_1 + n_{-1})_{\max})(\Omega_j - (n_1 + n_{-1})_{\max} + 1) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \\ &= \frac{2\Omega_j - 2(n_1 + n_{-1})_{\max}}{2} \left( \frac{2\Omega_j - 2(n_1 + n_{-1})_{\max}}{2} + 1 \right) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Това е схема за сдвояване на частици от двата различни вида  $\{\sigma = 1, \sigma' = -1\}$  с  $n_1 = 0$ , или  $n_{-1} = 0$ , или и двете  $n_1 = n_{-1} = 0$ . Тези състояния са последните дадени във всяка клетка на Таблица 5.1. Допълнителното квантово число  $\nu = 2(n_1 + n_{-1})_{\max}$ , е максималния брой на останалите двойки, куплирани до  $\{\sigma = 1, \sigma' = 1\}$  или  $\{\sigma = -1, \sigma' = -1\}$ . В тази граница действието на оператора на Casimir върху състоянията може да се изрази в термини на собствените стойности на инварианта от първи ред на  $U^0(2)$ ,

$$C_2(SU^0(2)) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = (\Omega_j - |i|)(\Omega_j - |i| + 1) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \quad (5.34)$$

Повишаващите и понижаващите генератори на подгрупата  $SU^0(2)$  действат в колоните по следния начин:

$$\begin{aligned} A_{+1}^0 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= |n_1, n_0 + 1, n_{-1}\rangle, \\ A_{-1}^0 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= n_0 \left( 1 - \frac{2(n_{-1} + n_1) + n_0 - 1}{2\Omega_j} \right) |n_1, n_0 - 1, n_{-1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Във всяка колона  $i$ ,  $A_{+1}^0$  започва от състоянието с най-ниско тегло  $|n_1, n_0, 0\rangle$  или  $|0, n_0, n_{-1}\rangle$ ,  $n_0 = 0, n_{\pm 1} = 0, 1, \dots, |i|$  и дава всички базисни състояния от дадено  $\tau_0$ -представяне с  $n_0 = 1, 2, \dots, 2(\Omega_j - |i|)$ . По аналогия,  $A_{-1}^0$  дава всички базисни състояния на представянето на разглежданата подгрупа, започващи от състоянието с най-високо тегло  $n_0 = 2(\Omega_j - |i|)$ , за всяко  $i$ .

Нормализираните базисни състояния,

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_0(n_1, n_0, n_{-1})} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \quad (5.36)$$

могат да се получат от (5.35). За трите типа състояния при тази редукция нормиращите коефициенти се дават от

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^2(n_1, n_0, n_{-1}) &= n_0! \prod_{k=0}^{n_0-1} \left( 1 - \frac{2(n_{-1} + n_1) + k}{2\Omega_j} \right), \\ \mathcal{N}_0(0, n_0, 0) &= \mathcal{P}_0(0, n_0, 0), \\ \mathcal{N}_0(n_1, n_0, 0) &= \mathcal{P}_0(n_1, n_0, 0) \mathcal{N}(n_1), \\ \mathcal{N}_0(0, n_0, n_{-1}) &= \mathcal{P}_0(0, n_0, n_{-1}) \mathcal{N}(n_{-1}), \end{aligned} \quad (5.37)$$

където състоянието с най-ниско тегло ( $n_0 = 0$  и  $n_{\mp 1} = 0$ ) във всяко представяне може да се нормализира рекурсивно,

$$\mathcal{N}^2(n_{\pm 1}) = n_{\pm 1}! \prod_{l=0}^{n_{\pm 1}-1} \left(1 - \frac{l}{\Omega_j}\right). \quad (5.38)$$

3. Другата редукция се описва също чрез инвариантите на подгрупите в редукционната верига:  $Sp(4) \supset U^{\pm}(2) \supset SU^{\pm}(2) \otimes U(1)_{N_{\mp}}$ . За нея означаването на състоянията е  $|n_{\mp 1}, n_{0 \max}, n_{\pm 1}\rangle$ . Чрез инвариантите от първи ред  $N_{\mp}$  на съответстващите подалгебри, пространствата  $\mathcal{E}_j^{\pm}$  се разлагат на подпространства дефинирани от условията  $(2n_{\mp 1} + n_0) = 0, 1, \dots, 2\Omega_j$  и представени от левите (десните) диагонали на Таблица 5.1. Действието на оператора на Casimir върху състоянията

$$C_2(SU^{\pm}(2)) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{\Omega_j - n_{0 \max}}{2} \left( \frac{\Omega_j - n_{0 \max}}{2} + 1 \right) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle \quad (5.39)$$

дава  $su(2)$  квантовото число  $d = \frac{\Omega_j - n_{0 \max}}{2}$ . Квантовото число на старшинството  $n_{0 \max}$  е максималният брой от оставащите двойки образувани от сдвояването на различен тип частици, т.е.  $n_{0 \max} = \{0 \text{ or } 1\}$ . Базисните състояния са от вида  $(A_1^{\dagger})^{n_1} (A_{-1}^{\dagger})^{n_{-1}} |0\rangle$  и  $(A_1^{\dagger})^{n_1} A_0^{\dagger} (A_{-1}^{\dagger})^{n_{-1}} |0\rangle$  и са разположени първи във всяка от клетките на Таблица 5.1. По-нататък операторите  $D_0^{\pm}$  (5.16), които са еквивалентни с точност до константа на операторите  $N_{\pm}$ , дават съответните проекции на  $d$ :  $d_0^{\pm} = \left(\frac{N_{\pm}}{2} - \frac{\Omega_j}{2}\right) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{2}(2n_{\pm} + n_{0 \max} - \Omega_j)$ . Диагоналите се разлагат на клетки принадлежащи към тях и определени от условията  $d_0^{\pm} = -d, -d + 1, \dots, d$ .

Повишаващите и понижаващите генератори на  $SU^{\pm}(2)$  действат по посока на левите/десните диагонали по следния начин:

$$\begin{aligned} A_{+1}^{\pm} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= |n_{\pm 1} + 1, n_0, n_{\mp 1}\rangle, \\ B_{-1}^{\pm} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= n_{\pm 1} \left(1 - \frac{n_{\pm 1} + n_0 - 1}{\Omega_j}\right) |n_{\pm 1} - 1, n_0, n_{\mp 1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Започвайки от съответните състояния с най-ниско или най-високо тегло, те генерират всички състояния принадлежащи на унитарните неприводими представяния на  $U^{\pm}(2)$  подгрупите на  $Sp(4)$ .

Нормализираните базисни състояния,

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_{\pm}(n_1, n_0, n_{-1})} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \quad (5.41)$$

могат да се изведат от (5.40). За двата типа състояния с  $n_0 = \{0 \text{ или } 1\}$  в тази редукция, нормиращите коефициенти се дават от

$$\mathcal{N}_{\pm}^2(n_1, n_0, n_{-1}) = n_1! n_{-1}! \prod_{l=0}^{n_1-1} \left(1 - \frac{n_0 + l}{\Omega_j}\right) \prod_{l=0}^{n_{-1}-1} \left(1 - \frac{n_0 + l}{\Omega_j}\right) \quad (5.42)$$

където резултатите (5.42) са съгласувани с (5.38) за  $n_0 = 0$  и със състоянието с най-ниско тегло във всяко представяне ( $n_{\pm 1} = 0$ ) нормализирано рекурсивно:

$$\mathcal{N}^2(n_{\mp 1}, n_0) = n_0! \prod_{l=0}^{n_0-1} \left(1 - \frac{2n_{\mp 1} + l}{2\Omega_j}\right) n_{\mp 1}! \prod_{l=0}^{n_{\mp 1}-1} \left(1 - \frac{l}{\Omega_j}\right). \quad (5.43)$$

## 5.2 $q$ -Деформация на фермионната реализация на $sp(4)$

Нека разгледаме  $q$ -деформирани оператори на раждане и унищожение  $\alpha_{m,\sigma}^\dagger$  и  $\alpha_{m,\sigma}$ ,  $m = -j, -j+1, \dots, j$ ,  $\sigma = \pm 1$ , на частица от тип  $\sigma$  в състояние с пълнен ъглов момент  $j$ , и проекция  $m$  върху оста  $z$ . Съотношението за ермитово спрягане определяме като  $(\alpha_{m,\sigma}^\dagger)^* = \alpha_{m,\sigma}$ .

### 5.2.1 Трансформация за $q$ -деформиране на фермионните оператори

Съществува общ клас от функции, които трансформират класическите оператори в деформирани [14, 52]. Ние използваме трансформацията,

$$\alpha_{m,\sigma} = \theta^{\frac{N_\sigma}{2}} c_{m,\sigma}, \quad \alpha_{m,\sigma}^\dagger = c_{m,\sigma}^\dagger \bar{\theta}^{\frac{N_\sigma}{2}}, \quad (5.44)$$

където  $\theta$  е комплексно число с амплитуда  $|\theta| = q$ ,  $q$  е реално число и  $N_\sigma = \sum_m N_{m,\sigma}$  са класическите оператори на броя на частиците:  $N_\sigma = \sum_{m=-j}^j c_{m,\sigma}^\dagger c_{m,\sigma}$ . От трансформацията на (5.1) следват за  $q$ -деформираните фермиони следните антикомутационни съотношения,

$$\alpha_{m,\sigma} \alpha_{m,\sigma}^\dagger + q \alpha_{m,\sigma}^\dagger \alpha_{m,\sigma} = q^{N_\sigma}, \quad (5.45)$$

и уравненията

$$\begin{aligned} \sum_m \alpha_{m,\sigma}^\dagger \alpha_{m,\sigma} &= N_\sigma q^{N_\sigma - 1}, \\ \sum_m \alpha_{m,\sigma} \alpha_{m,\sigma}^\dagger &= (2\Omega_j - N_\sigma) q^{N_\sigma}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Повишаващите и понижаващите генератори на съответната деформирана  $Sp(4)$  група се дават както и в класическия случай (5.2-5.4), но в термини на  $q$ -деформирани фермионни оператори :

$$F_{\sigma,\sigma'} = \xi_{\sigma,\sigma'} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{m,\sigma}^\dagger \alpha_{-m,\sigma'}^\dagger = F_{\sigma',\sigma} = (G_{\sigma,\sigma'})^\dagger, \quad (5.47)$$

$$G_{\sigma,\sigma'} = \xi_{\sigma,\sigma'} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{-m,\sigma} \alpha_{m,\sigma'}, \quad (5.48)$$

и

$$E_{1,-1} = \eta \sum_{m=-j}^j \alpha_{m,1}^\dagger \alpha_{m,-1}, \quad E_{-1,1} = \eta \sum_{m=-j}^j \alpha_{m,-1}^\dagger \alpha_{m,1}, \quad (5.49)$$

където константите са дефинирани в (5.5). Операторът  $F_{\sigma\sigma}$  ( $G_{\sigma\sigma}$ ) ражда (унищожава)  $q$ -деформирана двойка частици от един и същи вид.

Останалите два картанови генератори  $N_\sigma, \sigma = \pm 1$ , използвани в деформираните антикомутационни съотношения (5.45), не са деформирани. Трансформацията (5.44) води до следните съотношения между деформираните (5.47-5.49) и класическите оператори (5.2-5.4):

$$F_{\sigma,\sigma} = A_{\sigma,\sigma} \bar{\theta}^{N_\sigma + \frac{1}{2}}, \quad F_{1,-1} = A_{1,-1} \bar{\theta}^{\frac{N}{2}}, \quad (5.50)$$

$$G_{\sigma,\sigma} = \theta^{N_\sigma + \frac{1}{2}} B_{\sigma,\sigma}, \quad G_{1,-1} = \theta^{\frac{N}{2}} B_{1,-1}, \quad (5.51)$$

и

$$E_{1,-1} = D_{1,-1} \theta^{\frac{N_+ - 1}{2}} \bar{\theta}^{\frac{N_-}{2}}, \quad E_{-1,1} = D_{-1,1} \theta^{\frac{N_+ - 1}{2}} \bar{\theta}^{\frac{N_-}{2}}. \quad (5.52)$$

Тъй като направената трансформация е гладка функция само на картановите генератори на  $sp(4)$  тя проектира  $q$ -деформираните оператори

$$F_k^\dagger = F_{\frac{1}{2}(\sigma + \sigma')}^\dagger \equiv F_{\sigma,\sigma'} \quad (G_{-k} = G_{-\frac{1}{2}(\sigma + \sigma')} \equiv G_{\sigma,\sigma'}), \quad (5.53)$$

$$\sigma, \sigma' = \pm 1, \quad k = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma') = 0, \pm 1,$$

върху класическите вектори  $A_{0,\pm 1}^\dagger (B_{0,\mp 1})$ , и в резултат  $q$ -деформираните състояния са еквивалентни с точност до фаза на класическите (5.24). В границата  $q \rightarrow 1$  всички съотношения се свеждат до класическите. Важната редукция на  $sp_q(4)$  алгебрата до компактната  $u_q(2)$  подалгебра може пак да бъде използвана за получаване на класификационните схеми на базисните състояния.

1. Подалгебрата  $u_q(2)$  на  $sp_q(4)$  се затваря от запазващите броя на частиците генератори на Weyl (5.49) и  $N_\sigma, \sigma = \pm 1$ , определени така:

$$\begin{aligned} T_+ &\equiv E_{1,-1}, & T_0 &\equiv \tau_0 = \frac{N_1 - N_{-1}}{2}, \\ T_- &\equiv E_{-1,1}, & N &= N_1 + N_{-1}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Генераторите  $T_0, T_{\pm 1}$  и  $N$  удовлетворяват комутационните съотношения:

$$\begin{aligned} [T_1, T_{-1}] &= \frac{T_0}{\Omega_j} q^{N-1}, & [T_0, T_{\pm 1}] &= \pm T_{\pm 1}, \\ [N, T_{\pm 1}] &= 0, & [N, T_0] &= 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

и вторият инвариант на  $u_q(2)$  е

$$C_2 = N(N+1) - \mathbf{T}^2. \quad (5.56)$$

$q$ -деформираният оператор  $\mathbf{T}^2$  е определен от:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^2 &= \frac{2\Omega_j}{2}(T_1 T_{-1} + T_{-1} T_1) + T_0 T_0 q^{N-1} \\ &= 2\Omega_j T_{-1} T_1 + T_0 (T_0 + 1) q^{N-1},\end{aligned}\quad (5.57)$$

и е свързан с класическия оператор на Casimir на  $SU^\tau(2)$  (5.11) така

$$\mathbf{T}^2 = \tau^2 q^{N-1}. \quad (5.58)$$

В резултат собствените стойности на оператора на Casimir са деформирани с фазов множител  $q^{n-1}$ , и собствените вектори са класическите базисни състояния  $|n, \tau, i\rangle$ .

2. Другата подгрупа  $U_q^0(2)$  е генерирана от операторите:

$$K_{+1}^0 \equiv F_{1,-1}, \quad K_{-1}^0 \equiv G_{-1,-1}, \quad K_0^0 \equiv \frac{N}{2} - \Omega_j \quad (5.59)$$

и  $T_0$  (5.54), който е инварианта  $\eta$  от първи порядък. Генераторите на  $SU_q^0(2)$  комутират по следния начин:

$$[K_{+1}^0, K_{-1}^0]_{-2} = \frac{K_0^0}{\Omega_j} q^{N-2}, \quad [K_0^0, K_{\pm 1}^0] = \pm K_{\pm 1}^0, \quad (5.60)$$

където  $q$ -комутаторът е определен като

$$[A, B]_k = AB - q^k BA. \quad (5.61)$$

Вторият оператор на Casimir за  $su_q^0(2)$  се дава от

$$\begin{aligned}C_2(SU^0(2)) &= \frac{2\Omega_j}{2}(q^2 K_{+1}^0 K_{-1}^0 + K_{-1}^0 K_{+1}^0) q^{-N} + (K_0^0)^2 \\ &= 2\Omega_j K_{-1}^0 K_{+1}^0 q^{-N} + K_0^0 (K_0^0 + 1).\end{aligned}\quad (5.62)$$

3. Двете взаимно допълнителни подалгебри  $su_q^+(2)$  и  $su_q^-(2)$  на алгебрата  $sp_q(4)$  се реализират от  $q$ -деформираните оператори

$$F_{+1}^\pm = F_{\pm 1, \pm 1}, \quad G_{-1}^\pm = G_{\pm 1, \pm 1} \quad (5.63)$$

и недеформираните картанови оператори

$$E_0^\pm = \frac{N_\pm}{2} - \frac{\Omega_j}{2}. \quad (5.64)$$

Съгласно редукцията  $Sp_q(4) \supset SU_q^\pm(2) \otimes U(1)_{N_\mp}$ ,  $N_\mp$  комутира с операторите  $F_{+1}^\pm, G_{-1}^\pm, E_0^\pm$ , които затварят  $su_q^\pm(2)$  алгебрата:

$$[F_{+1}^\pm, G_{-1}^\pm]_{-4} = \frac{(N_{\pm 1} - \Omega_j)}{\Omega_j} q^{2N_{\pm 1} - 3}, \quad (5.65)$$

$$[N_{\pm 1}, F_{\pm 1}^{\pm}] = 2F_{\pm 1}^{\pm}, \quad [N_{\pm 1}, G_{\pm 1}^{\pm}] = -2G_{\pm 1}^{\pm}. \quad (5.66)$$

Съответният инвариант на Casimir е

$$\begin{aligned} C_2(SU^{\pm}(2)) &= \frac{\Omega_j}{2} (q^4 F_{+1}^{\pm} G_{-1}^{\pm} + G_{-1}^{\pm} F_{+1}^{\pm}) q^{-2N_{\pm 1}-1} + (E_0^{\pm})^2 \\ &= \Omega_j G_{-1}^{\pm} F_{+1}^{\pm} q^{-2N_{\pm 1}-1} + E_0^{\pm} (E_0^{\pm} + 1). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Подобна  $q$ -деформация се получава от трансформацията  $\alpha_{m,\sigma} = \theta^{-\frac{N_{\sigma}}{2}} c_{m,\sigma}$ , която води до същите съотношения и равенства, като получените по-горе, но със замяната  $q \rightarrow q^{-1}$ . Когато  $\theta$  е реално и положително деформационния параметър е  $\theta \equiv q$ .

### 5.2.2 $q$ -Деформация на антикомутационните съотношения на фермионните оператори

Сега да разгледаме друг набор от  $q$ -деформирани ермитово спрегнати оператори  $\alpha_{m,\sigma}^{\dagger}$  и  $\alpha_{m,\sigma}$ ,  $(\alpha_{m,\sigma}^{\dagger})^* = \alpha_{m,\sigma}$ ,  $m = -j, -j+1, \dots, j$ ,  $\sigma = \pm 1$ . И нека за тях, за всяко  $\sigma$  и  $m$ , са в сила  $q$ -деформирани антикомутационни съотношения от вида [10, 53]:

$$\alpha_{m,\sigma} \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} + q^{\pm 1} \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} \alpha_{m,\sigma} = q^{\pm N_{m,\sigma}}, \quad (5.68)$$

където  $N_{m,\sigma} = c_{m,\sigma}^{\dagger} c_{m,\sigma}$  и  $N_{\sigma} = \sum_{m=-j}^j N_{m,\sigma}$  са класическите оператори на броя на частиците (5.7). Тяхното действие върху деформираните фермионни оператори се дефинира както в класическия случай (5.8):

$$[N_{\sigma}, \alpha_{m,\sigma'}^{\dagger}] = \delta_{\sigma,\sigma'} \alpha_{m,\sigma'}^{\dagger}, \quad [N_{\sigma}, \alpha_{m,\sigma'}] = -\delta_{\sigma,\sigma'} \alpha_{m,\sigma'}, \quad \sigma, \sigma' = \pm 1. \quad (5.69)$$

В предишния параграф 5.1 беше показано, че ако се използва трансформиращата функция (5.44), антикомутационните съотношения на деформираните фермионни оператори (5.45) не зависят само от единичен член  $N_{m,\sigma}$  както в (5.68), а по-скоро от общата сума  $N_{\sigma}$ . Същата зависимост, включително и изискването деформацията да засяга само индекса  $\sigma$ , води до определението:

$$\alpha_{m,\sigma} \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} + q^{\pm 1} \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} \alpha_{m,\sigma} = q^{\pm \frac{N_{\sigma}}{2\Omega_j}}. \quad (5.70)$$

С помощта на двете антикомутационни съотношения, следва че  $\alpha_{m,\sigma}^{\dagger} \alpha_{m,\sigma} = [\frac{N_{\sigma}}{2\Omega_j}]$ , където ползваме дефиницията  $[X] = \frac{q^X - q^{-X}}{q - q^{-1}}$ , което води до

$$\sum_m \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} \alpha_{m,\sigma} = 2\Omega_j \left[ \frac{N_{\sigma}}{2\Omega_j} \right] \quad (5.71)$$

и

$$\sum_m \alpha_{m,\sigma} \alpha_{m,\sigma}^{\dagger} = 2\Omega_j \left[ 1 - \frac{N_{\sigma}}{2\Omega_j} \right]. \quad (5.72)$$

В границата  $q \rightarrow 1$ , приемайки също че  $\alpha_{m,\sigma}^\pm \rightarrow c_{m,\sigma}^\pm$ , (5.71) и (5.72) се свеждат до класическите формули за  $N_\sigma$  (5.7) и (5.9). Това аргументира въвеждането на тегловен коефициент  $\omega \equiv 1/(2\Omega_j)$  в (5.70). Останалите антикомутационни съотношения между  $q$ -деформиранияте оператори могат да бъдат избрани от различни възможни варианти [54, 55]:

$$\begin{aligned} \{\alpha_{m,\sigma}, \alpha_{m',\sigma}^\dagger\}_{q^{\pm 1}} &= q^{\pm \frac{N_\sigma}{2\Omega_j}} \delta_{m,m'}, & \{\alpha_{m,\sigma}, \alpha_{m',\sigma'}^\dagger\} &= 0, \sigma \neq \sigma', \\ \{\alpha_{m,\sigma}^\dagger, \alpha_{m',\sigma'}^\dagger\} &= 0, & \{\alpha_{m,\sigma}, \alpha_{m',\sigma'}\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.73)$$

където напомняме, че  $q$ -антикомутаторът се определя така  $\{A, B\}_k = AB + q^k BA$ .

Наборът от генератори за тази реализация на деформираната  $sp_q(4)$  алгебра се дефинира като в (5.47)-(5.49), но в термини на  $q$ -деформиранияте оператори на раждане и унищожение  $\alpha_{m,\sigma}^\dagger$  ( $\alpha_{m,\sigma}$ ), удовлетворяващи антикомутационните съотношения (5.73). Генераторите на Cartan  $N_{\pm 1}$  остават класическите оператори на броя на частиците. Тези десет оператора генерират  $q$ -деформираната  $Sp_q(4)$  група и по-нататък изследваме нейната подгрупова структура, по аналогия с класическия случай.

1. Подгрупата  $U_q(2)$  на  $Sp_q(4)$  се генерира от запазващите броя на частиците оператори на Weyl (5.49) и  $N_\sigma, \sigma = \pm 1$ , както и от еквивалентния пълен набор от оператори  $T_{0,\pm 1}$  и  $N$  (5.54). Тези оператори удовлетворяват комутационните съотношения:

$$\begin{aligned} [T_+, T_-] &= [2\frac{T_0}{2\Omega_j}], & [T_0, T_\pm] &= \pm T_\pm, \\ [N, T_\pm] &= 0, & [N, T_0] &= 0. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Операторите  $T_{0,\pm 1}$  затварят  $su_q(2) \sim so_q(3)$  алгебра. Операторът на броя на частиците  $N$  играе ролята на първи инвариант на  $U_q(2) = SU_q(2) \otimes U(1)$ . Вторият оператор на Casimir на подгрупата  $SU_q(2)$  е:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2 &= \frac{2\Omega_j}{2} (T_+ T_- + T_- T_+ + [\omega T_0] [T_0 + 1]_\omega + [\omega T_0] [T_0 - 1]_\omega) \\ &= 2\Omega_j (T_- T_+ + [\omega T_0] [T_0 + 1]_\omega). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Тук  $[X]_\omega = \frac{q^{\omega X} - q^{-\omega X}}{q^\omega - q^{-\omega}}$  и се използва следното съотношение:

$$[\omega T_0] [T_0 + 1]_\omega - [\omega T_0] [T_0 - 1]_\omega = [2\omega T_0]. \quad (5.76)$$

Операторът на Casimir съвпада с класическия в границата  $q \rightarrow 1$  (5.11).

2. Другата  $u_q^0(2)$  подалгебра е:

$$\begin{aligned} [K_{+1}^0, K_{-1}^0] &= [2\frac{K_0^0}{2\Omega_j}], & [K_0^0, K_{\pm 1}^0] &= \pm K_{\pm 1}^0, \\ [T_0, K_{\pm 1}^0] &= 0, & [T_0, K_0^0] &= 0, \end{aligned} \quad (5.77)$$

като генераторите са дефинирани от (5.59).

Операторът  $T_0$  (5.54) комутира с генераторите на  $su_q^0(2)$  (5.77) и действа като инвариант от първи порядък на  $u_q^0(2) = su_q^0(2) \oplus u_{T_0}^0(1)$ . Операторите  $\{K_k^0\}$ ,  $k = 0, \pm 1$  вдвояват  $q$ -деформираните частици от различен вид. Операторът на Casimir от втори ред на подгрупата  $SU_q^0(2)$  е даден от

$$\begin{aligned} C_2(SU_q^0(2)) &= \frac{2\Omega_j}{2}(K_{+1}^0 K_{-1}^0 + K_{-1}^0 K_{+1}^0 + \\ &[\omega K_0^0] [K_0^0 + 1]_\omega + [\omega K_0^0] [K_0^0 - 1]_\omega) \\ &= 2\Omega_j(K_{-1}^0 K_{+1}^0 + [\omega K_0^0] [K_0^0 + 1]_\omega), \end{aligned} \quad (5.78)$$

който съвпада с класическия инвариант (5.15) в границата  $q \rightarrow 1$ .

3. Двете взаимно допълнителни подалгебри  $su_q^+(2)$  и  $su_q^-(2)$  на алгебрата  $sp_q(4)$  се задават от  $q$ -деформираните оператори (5.63) и недеформираните картанови оператори (5.64). Те имат следните комутационни съотношения:

$$\begin{aligned} [F_{+1}^\pm, G_{-1}^\pm] &= \rho_\pm [4\omega E_0^\pm], \\ [E_0^\pm, F_{+1}^\pm] &= F_{+1}^\pm, \quad [E_0^\pm, G_{-1}^\pm] = -G_{-1}^\pm, \end{aligned} \quad (5.79)$$

където  $\rho_\pm = \frac{q^{\pm 1} + q^{\pm \frac{1}{2\Omega_j}}}{2}$ . Отново е в сила, че всеки от генераторите  $\{F_{+1}^\pm, G_{-1}^\pm, E_0^\pm\}$  на  $SU_q^\pm(2)$  комутира с всички генератори  $\{F_{+1}^\mp, G_{-1}^\mp, E_0^\mp\}$  на другата  $SU_q^\mp(2)$  подгрупа. Инвариантите от първи ред  $N_{\mp 1}$  на  $u_q^\pm(2)$  дават разширението на  $su_q^\pm(2)$  до подалгебрата  $u_q^\pm(2) = su_q^\pm(2) \oplus u^\mp(1)$ . Операторът  $F_{+1}^\pm$  ( $G_{-1}^\pm$ ) ражда (унищожава)  $q$ -деформирана двойка от еднакви по вид частици. Инвариантът на Casimir на подгрупата  $SU_q^\pm(2)$  е:

$$\begin{aligned} C_2(SU_q^\pm(2)) &= \frac{\Omega_j}{2}(F_{+1}^\pm G_{-1}^\pm + G_{-1}^\pm F_{+1}^\pm + \rho_\pm [2\omega E_0^\pm] [E_0^\pm + 1]_{2\omega} + \\ &\rho_\pm [2\omega E_0^\pm] [E_0^\pm - 1]_{2\omega}) \\ &= \Omega_j(G_{-1}^\pm F_{+1}^\pm + \rho_\pm [2\omega E_0^\pm] [E_0^\pm + 1]_{2\omega}). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Полезното равенство (5.76) сега има вида

$$[2\omega E_0^\pm] [E_0^\pm + 1]_{2\omega} - [2\omega E_0^\pm] [E_0^\pm - 1]_{2\omega} = [4\omega E_0^\pm]. \quad (5.81)$$

Операторът на Casimir съвпада с класическия такъв (5.18) в границата  $q \rightarrow 1$ .

За останалите комутационни съотношения на генераторите,  $q$ -деформираната симплектична алгебра се свежда до класическата им граница (5.53):

$$\begin{aligned} [F_l^\dagger, G_k]_{2(k-l)} &= \frac{\varphi_{l,k}}{2\sqrt{\Omega_j}} T_{l+k} q^{(l-k)\omega N_{l-k}}, \quad l+k \neq 0, \\ [T_l, F_k^\dagger]_{k-l} &= \frac{\chi_{l,k}}{\sqrt{\Omega_j}} F_{l+k}^\dagger q^{-l\omega N_{-l}}, \quad l \neq 0, \\ [T_l, G_k]_{k-l} &= -\frac{\phi_{l,k}}{\sqrt{\Omega_j}} G_{l+k} q^{l\omega N_l}, \quad l \neq 0, \\ [T_0, F_k^\dagger] &= kF_k^\dagger, \quad [T_0, G_k] = kG_k, \end{aligned} \quad (5.82)$$

където константите са дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned}\varphi_{\pm 1,0} &= q^{\mp 2} \left( q^{\pm 1} + q^{\pm \frac{1}{2\Omega_j}} \right), \varphi_{0,\pm 1} = q^{\pm(2+\frac{1}{2\Omega_j})} \left( q^{\mp 1} + q^{\mp \frac{1}{2\Omega_j}} \right), \varphi_{\pm 1,\pm 1} = 0, \\ \chi_{1,-1} &= \frac{\left( q^{-1} + q^{-\frac{1}{2\Omega_j}} \right)}{2}, \chi_{-1,1} = \frac{\left( q + q^{\frac{1}{2\Omega_j}} \right)}{2}, \chi_{\pm 1,0} = 1, \chi_{\pm 1,\pm 1} = 0, \\ \phi_{1,-1} &= q^{-1} \frac{\left( q^{-1} + q^{-\frac{1}{2\Omega_j}} \right)}{2}, \phi_{-1,1} = q \frac{\left( q + q^{\frac{1}{2\Omega_j}} \right)}{2}, \phi_{\pm 1,0} = q^{\mp 1}, \phi_{\pm 1,\pm 1} = 0.\end{aligned}\quad (5.83)$$

Получава се и друг набор от комутационни съотношения, който е симетричен по отношение на замяната  $q \leftrightarrow q^{-1}$ :

$$\begin{aligned}[F_l^\dagger, G_k] &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} \frac{1}{[2]} T_{l+k} \Psi_{lk}(N_{l-k}), \quad l+k \neq 0, \\ [T_l, F_k^\dagger] &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} \frac{1}{[2]} F_{l+k}^\dagger \Psi_{l0}(N_k), \quad l, k \neq 0, \\ [T_l, G_k] &= -\frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} \frac{1}{[2]} G_{l+k} \Psi_{0k}(N_{-k}), \quad l, k \neq 0, \\ [T_l, F_0^\dagger]_{\frac{[2]}{2}} &= \frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} F_l^\dagger (q^{\omega N_{-l}} + q^{-\omega N_{-l}}), \quad l \neq 0, \\ [T_l, G_0]_{\frac{[2]}{2}} &= -\frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} G_l (q^{\omega N_l} + q^{-\omega N_l}), \quad l \neq 0,\end{aligned}\quad (5.84)$$

където функциите  $\Psi_{lk}(N_p)$  са дефинирани по следния начин:

$$\Psi_{lk}(N_p) = \begin{cases} q^{\omega N_p} + q^{-\omega N_p} + q^{\omega(N_p+1)-1} + q^{-\omega(N_p+1)+1}, & k=0 \\ q^{\omega N_p-1} + q^{-\omega N_p+1} + q^{\omega(N_p-1)} + q^{-\omega(N_p-1)}, & l=0 \end{cases}. \quad (5.85)$$

Получената тук реализация на  $sp_q(4)$  е в съгласие с алгебрата от генератори на Chevalley на  $U_q(SO(5))$ , дадена в [56]. От сравнението на комутационните съотношения, получаваме за първия триплет от генератори отговарящи на дългия корен **1**, съответствието:

$$SU_q^+(2) : (e_1, f_1, h_1) \leftrightarrow (T_+, T_-, \omega T_0), \quad (5.86)$$

и за късия корен **2**:

$$SU_q^-(2) : (e_2, f_2, h_2) \leftrightarrow \left( \frac{F_{+1}^-}{\sqrt{[2]}}, \frac{G_{-1}^-}{\sqrt{[2]}}, \omega E_0^- \right). \quad (5.87)$$

Премащабирането на генераторите от втория триплет е въведено така че, (5.79) да се запишат в стандартната форма за  $su_q(2)$ :

$$\left[ \frac{F_{+1}^\pm}{\sqrt{[2]}}, \frac{G_{-1}^\pm}{\sqrt{[2]}} \right] = \rho_\pm \frac{[4\omega E_0^\pm]}{[2]} = \rho_\pm [2\omega E_0^\pm]_2. \quad (5.88)$$

Останалите комутационни съотношения в двата триплета са съгласувани с точност до параметъра  $\omega$ . Сравнявайки (5.82) за останалите четири получаваме

$$(e_3^+, f_3^+) \leftrightarrow (F_0 q^{-\omega N_{-1}}, G_0 q^{-\omega N_{-1}}) \quad (5.89)$$

и

$$(e_4^+, f_4^+) \leftrightarrow (F_{+1}^+ q^{-\omega N_{-1}}, G_{-1}^+ q^{-\omega N_{-1}}), \quad (5.90)$$

които са определени с точност до общ константен множител. Тези резултати доказват изоморфизма на  $q$ -фермионната реализация на  $sp_q(4)$  и всички възможни представяния на стандартната ѝ  $SU_q(2)$  подгрупа с триплетите от генераторите на Chevalley съответстващи на късите и дълги корени на  $U_q(SO(5))$ .

### 5.2.3 Пространство на действие на фермионната реализация на $sp_q(4)$

$q$ -деформираните фермионни оператори действат както в класическия случай в крайни метрични пространства  $\mathcal{E}_j$  за всяко дадено  $j$ -ниво с вакуум  $|0\rangle$  определен от  $\alpha_{m,\sigma}|0\rangle = 0$ . Скаларното произведение в  $\mathcal{E}_j$  е избрано така че  $\alpha_{m,\sigma}^\dagger$  е ермитово спрегнато на  $\alpha_{m,\sigma} : (\alpha_{m,\sigma}^\dagger)^* = \alpha_{m,\sigma}$ , и  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Изобщо  $q$ -деформираните състояния са различни от класическите, но съвпадат с тях в границата  $q \rightarrow 1$ .

$q$ -деформираните оператори на раждане (унищожение)  $F_k^\dagger, k = 0, \pm 1$  (5.53) са компоненти на тензор от първи ранг по отношение на подгрупата  $SU_q^T(2)$  (5.84). Тези оператори раждат двойка  $q$ -фермиони сдвоени до общ ъглов момент  $J = 0$  и общ изоспин  $T = 1$ . Аналогично на класическата граница, набор от вектори, които опъват всяко пространство  $\mathcal{E}_j^+$  в  $q$ -деформирания случай, могат да се изберат във вида

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle_q = \left(F_1^\dagger\right)^{n_1} \left(F_0^\dagger\right)^{n_0} \left(F_{-1}^\dagger\right)^{n_{-1}} |0\rangle. \quad (5.91)$$

Базисът се получава чрез ортонормиране на (5.91). В случая, когато разглеждаме само деформираното пространство ще изпускаме индексът  $q$  в означенията.

Както в класическия случай,  $\Omega_j$  означава представянето за всеки конкретен  $j$ -слой. Базисните състояния са еднозначно определени от класификационните схеми, които използват съответните  $su_q(2)$  подалгебри и техните генератори на Cartan. В  $q$ -деформирания случай за картанови генератори на  $Sp_q(4)$  могат да се изберат недеформираните оператори  $N_{\pm 1}$  или еквивалентния им набор от оператори  $N$  и  $T_0 \equiv \tau_0$  (5.54). Собствените стойности на тези оператори, с които са означени базисните състояния съвпадат с тези в класическия случай и примера от Таблица 5.1 може да бъде използван. Квантовите числа получени от собствените стойности на  $q$ -деформираните оператори на Casimir се вземат в границата  $q \rightarrow 1$ .

Накратко ще изброим редукиционните редици и ще ги сравним със съответстващите им в класическия случай, като наблегнем върху приликите и разликите между

тях. Базисните състояния заедно с операторите на Casimir от втори порядък и техните собствени стойности се използват най-често във физическите приложения. В този смисъл тяхната  $q$ -деформация може да доведе до интересни нови резултати.

1. В границата  $q \rightarrow 1$ , операторът на Casimir от втори порядък,  $\mathbf{T}^2$ , на  $SU_q^T(2)$  подгрупата има собствени стойности:

$$\mathbf{T}^2 |n, T, i\rangle_q \xrightarrow{q \rightarrow 1} T(T+1) |n, T, i\rangle, \quad (5.92)$$

където  $T = \frac{\tilde{n}}{2}, \frac{\tilde{n}}{2} - 2, \dots, 1$  (нечетно) или  $0$  (четно), където  $\tilde{n} = \min\{n, 4\Omega_j - n\}$ , и  $i = -T, -T+1, \dots, T$ . В деформирания случай собствените стойности на  $\mathbf{T}^2$  (5.75) за състоянията с най-ниско и най-високо тегло са

$$\mathbf{T}^2 |n, T, \pm T\rangle_q = 2\Omega_j \left[ \frac{1}{2\Omega_j} \right] [T]_\omega [T+1]_\omega |n, T, \pm T\rangle_q. \quad (5.93)$$

2. Редукционната верига  $Sp_q(4) \supset SU_q^0(2) \otimes U_q(1)_{T_0}$  описва вдвояване на различен вид фермиони и въвежда квантовото число на старшинството  $2(n_1 + n_{-1})_{\max}$ . В схемата за означаване на базисните състояния  $|i, 2(n_1 + n_{-1})_{\max}, n\rangle$ . Собствената стойност на втория оператор на Casimir на тази  $q$ -деформирана подалгебра се дава от

$$\begin{aligned} C_2(SU_q^0(2)) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= \\ &= 2\Omega_j \left[ \frac{1}{2\Omega_j} \right] \left[ \frac{2\Omega_j - 2(n_1 + n_{-1})_{\max}}{2} \right]_\omega \left[ \left( \frac{2\Omega_j - 2(n_1 + n_{-1})_{\max}}{2} + 1 \right) \right]_\omega |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Тук отново генераторите на подалгебрата  $su_q^0(2)$  действат по колоните:

$$\begin{aligned} K_{+1}^0 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= |n_1, n_0 + 1, n_{-1}\rangle, \\ K_{-1}^0 |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= [n_0]_{\frac{1}{2\Omega_j}} \left[ 1 - \frac{2(n_{-1} + n_1) + n_0 - 1}{2\Omega_j} \right] |n_1, n_0 - 1, n_{-1}\rangle, \\ N |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= 2(n_{-1} + n_1 + n_0) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Нормализираните базисни състояния,

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{\mathcal{M}_0(n_1, n_0, n_{-1})} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \quad (5.96)$$

могат да се изведат от (5.95). За трите типа състояния по тази редукция, нормиращите коефициенти са:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0^2(n_1, n_0, n_{-1}) &= [n_0]_\omega! \prod_{k=0}^{n_0-1} \left[ 1 - \frac{2(n_{-1} + n_1) + k}{2\Omega_j} \right], \\ \mathcal{M}_0(0, n_0, 0) &= \mathcal{Q}_0(0, n_0, 0), \\ \mathcal{M}_0(n_1, n_0, 0) &= \mathcal{Q}_0(n_1, n_0, 0) \mathcal{M}(n_1), \\ \mathcal{M}_0(0, n_0, n_{-1}) &= \mathcal{Q}_0(0, n_0, n_{-1}) \mathcal{M}(n_{-1}), \end{aligned} \quad (5.97)$$

където  $q$ -деформираният факториал се определя от  $[A]_k! = [A]_k [A-1]_k \dots 1$ . Нормиращите коефициенти  $\mathcal{M}(n_{\pm 1})$  на състоянието с най-ниско тегло ( $n_0 = 0$  и  $n_{\mp 1} = 0$ ) във всяко представяне се извеждат с помощта на генераторите от следващата редукция.

3. Другата редукция  $Sp_q(4) \supset U_q(2)_{N_{\mp}} \supset SU_q^{\pm}(2) \supset U_q(1)_{N_{\pm}}$  въвежда деформация в модел на сдвоени фермиони от един и същи тип. Тук състоянията са означени като  $|n_{\mp 1}, n_{0 \max}, n_{\pm 1}\rangle$ , където  $n_{0 \max} = \{0 \text{ или } 1\}$  е квантовото число на сеньорити. Действието на оператора на Casimir върху състоянията се дава от

$$C_2(SU_q^{\pm}(2)) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \rho_{\pm} \Omega_j \left[ \frac{1}{\Omega_j} \right] \left[ \frac{\Omega_j - n_{0 \max}}{2} \right]_{2\omega} \times \left[ \frac{\Omega_j - n_{0 \max}}{2} + 1 \right]_{2\omega} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \quad (5.98)$$

В деформирания случай действието на инвариантата на Casimir на  $SU_q^+(2)$  се различава от това на оператора на Casimir на  $SU_q^-(2)$  с фактор  $\rho_+/\rho_-$ . Генераторите на  $su_q^{\pm}(2)$  трансформират състоянията по диагоналите така

$$\begin{aligned} F_{\mp 1}^{\pm} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= |n_{\pm 1} + 1, n_0, n_{\mp 1}\rangle, \\ G_{\mp 1}^{\pm} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= \rho_{\pm} [n_{\pm 1}]_{\frac{1}{\Omega_j}} \left[ 1 - \frac{n_{\pm 1} + n_0 - 1}{\Omega_j} \right] |n_{\pm 1} - 1, n_0, n_{\mp 1}\rangle, \\ N_{\pm} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= (2n_{\pm 1} + n_0) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Нормираните базисни състояния,

$$|n_1, n_0, n_{-1}\rangle = \frac{1}{\mathcal{M}_{\pm}(n_1, n_0, n_{-1})} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle, \quad (5.100)$$

могат да се получат от (5.99). За двата типа състояния с  $n_0 = \{0 \text{ или } 1\}$  в тази редукция, нормиращите коефициенти са

$$\mathcal{M}_{\pm}^2(n_1, n_0, n_{-1}) = \rho_+ \rho_- [n_1]_{2\omega}! [n_{-1}]_{2\omega}! \prod_{l=0}^{n_1-1} \left[ 1 - \frac{n_0 + l}{\Omega_j} \right] \prod_{l=0}^{n_{-1}-1} \left[ 1 - \frac{n_0 + l}{\Omega_j} \right] \quad (5.101)$$

където за  $n_0 = 0$  и  $n_{\mp 1} = 0$  следва, че

$$\mathcal{M}^2(n_{\pm 1}) = \rho_{\pm} [n_{\pm 1}]_{2\omega}! \prod_{l=0}^{n_{\pm 1}-1} \left( 1 - \frac{l}{\Omega_j} \right). \quad (5.102)$$

Важно е да се отбележи, че тази деформация може да доведе до базисни състояния, чието съдържание е много различно от класическия случай, тъй като не е известна проста функция, която трансформира класическите фермионни оператори

$c_{m,\sigma}^\dagger$  и  $c_{m,\sigma}$  в  $q$ -деформираните  $\alpha_{m,\sigma}^\dagger$  и  $\alpha_{m,\sigma}$ . Гладка функция може да не съществува, когато едновременно са в сила и двете антикомутационни съотношения (5.73) с двата знака за една и съща стойност на индекса  $\sigma$ , както те са дефинирани в (5.70).

Деформираните базисни състояния се означават с класическите собствени стойности на инвариантните оператори от редукциите при всеки от разгледаните случаи. Матричните елементи, в частност на повишаващите и понижаващите генератори на  $sp_q(4)$  и инвариантите от втори ред, също са деформирани, което води до различни резултати при физически приложения. След като получихме съответствието между  $q$ -фермионната реализация на  $sp_q(4)$  и генераторите на Chevalley за  $U_q(SO(5))$ , двата базиса мога да се сравняват за неприводимото представяне  $\Omega_j = \frac{1}{4}n_{\max}$ , което съответства за представянето  $(n_1, n_2)$  при  $n_1 = n_2 = \frac{1}{4}n_{\max}$  [56]. В класическия и в  $q$ -деформирания случаи, първият базис разгледан в [56] е свързан с базисните състояния (5.24) и (5.91).

В тази Глава се разглежда фермионната реализация на алгебрата  $sp(4)$  и нейните деформации [A5, B5]. Изходната алгебра, както и някои от нейните деформирани реализации, действат в едно и също крайномерно пространство  $\mathcal{E}_j$ . Крайността на представянията се дължи на принципа на Pauli.

Деформираната реализация на  $sp_q(4)$  се основава на стандартната  $q$ -деформация на двукомпонентната алгебра на Clifford [10], осъществена чрез фермионни оператори на раждане и унищожение. За  $sp(4)$  осем от десетте генератора са деформирани, като правят изключение операторите на броя на фермионите  $N_1$  и  $N_{-1}$  и техните линейни комбинации. Деформираните генератори на  $Sp_q(4)$  затварят различни реализации на компактната  $u_q(2)$  подалгебра. Индуцираните представяния на всяко  $u_q(2)$  са приводими в пространството  $\mathcal{E}_j^+$  и се разлагат на неприводими представяния. По този начин се получава пълно описание на унитарните неприводими представяния на  $U_q(2)$  за четири нейни различни реализации  $u_q^-(2)$ ,  $u_q^0(2)$  и  $u_q^+(2)$ .

Всяка редукция към компактна подалгебра на  $sp(4)$  и нейните деформации дава възможност за описание на различни физически модели с различни динамични симетрии. Докато в рамките на дадена деформация базисните състояния могат да бъдат деформирани или не, то генераторите са винаги деформирани, както и тяхното действие върху базисните състояния. С оглед на бъдещи приложения допълнителният параметър на деформация дава по-голямо разнообразие от оператори, недеформирани както и деформирани, свързани с наблюдаемите. В хамилтоновата теория това води до зависимост на матричните елементи от параметъра на деформация, което дава възможност за по-голяма гъвкавост и по-богати структури в рамките на алгебричните подходи.

## 6. Обобщена $q$ -деформирана $sp(4)$ алгебра за приложение в множество слоеве

Симплектичната алгебра  $sp(4)$ , която е изоморфна на  $so(5)$  [48, 49, 57–59], се прилага успешно за описание на сдвояващите корелации, когато се разглеждат два типа частици [60, 61]. Самата алгебра може да се обобщи за повече от едно ниво [59, 62, 63], така че разглежданите частици да не заемат само едно ниво. Когато се прилага в ядрената структура, такова обобщение на  $sp(4)$  алгебрата, прави възможно изучаването на ядра с масови числа  $56 < A < 100$ .

$q$ -деформацията на класическата  $sp(4)$  Lie алгебра въвежда допълнителна степен на свобода в теорията [64, 65]. Това запазва основната класическа симетрия на проблема, и в същото време въвежда в теорията нелинейни членове. За разлика от стандартната формулировка на  $q$ -деформацията за симплектичната  $sp(4)$  алгебра и нейните  $su(2)$  подалгебри, използвани обикновено в математическите изследвания [10, 56, 66] и в приложенията в ядрената физика [67–69], ние въведохме нова реализация, която зависи от размерността на разглежданото пространство [A5]. Поради тази зависимост, обобщаването на  $q$ -деформираната  $sp_q(4)$  алгебра за множество орбити е от интерес и въвежда нови елементи в теорията.

За да се приложи  $q$ -деформираната теория (за едно или множество нива) към реални физически системи, трябва да знаем действието на генераторите на  $Sp_q(4)$  върху базисните състояния. Това е постигнато с изведения в тази глава аналитичен метод. Резултатите могат да се използват за построяването на  $q$ -деформиран аналог на инвариантата на Casimir от втори порядък на  $sp(4)$  алгебрата. Те дават възможност да се намерят в аналитичен вид и матричните елементи на моделното взаимодействие и следователно водят до точно решение на съответния хамилтонов проблем. Те са необходими за предстоящите приложения в теорията на ядрената структура и за изследване на физическия смисъл на  $q$ -деформацията.

### 6.1 Обобщена $sp(4)$ алгебра и нейното $q$ -деформирано разширение

Обобщението на фермионната реализация на  $sp_{(q)}(4)$  за множество обвивки следва метода за конструкция на алгебрата в случая на единствен  $j$ -слой [A5].  $sp(4)$  алгебрата, която е изоморфна на  $so(5)$ , се реализира в термини на фермионни оператори

на раждане и унищожение  $c_{j,m,\sigma}^\dagger$  и  $c_{j,m,\sigma}$ , които описват частца от тип  $\sigma$  ( $= \pm 1$  за протони/неутрони) в състояние с пълнен ъглов момент  $j$  (полуцяло) с трета проекция  $m$  ( $-j \leq m \leq j$ ). За дадено  $\sigma$ , размерността на фермионното пространство е  $2\Omega = \sum_j 2\Omega_j = \sum_j (2j+1)$ , където сумата  $\sum_j$  е по всички орбити, които разглеждаме като активни.

Деформацията на  $sp_q(4)$  се въвежда в термини на  $q$ -деформирани оператори на раждане и унищожение  $\alpha_{j,m,\sigma}^\dagger$  и  $\alpha_{j,m,\sigma}$ ,  $(\alpha_{j,m,\sigma}^\dagger)^* = \alpha_{j,m,\sigma}$ , където  $\alpha_{j,m,\sigma}^{(\dagger)} \rightarrow c_{j,m,\sigma}^{(\dagger)}$  в границата  $q \rightarrow 1$ . Деформираните едночастични оператори се определят чрез техните антикомутиционни съотношения за всяко  $j$ ,  $\sigma$ , и  $m$  по подобен начин на тези за едно ниво [A5]

$$\begin{aligned} \{\alpha_{j,\sigma,m}, \alpha_{j,\sigma,m'}^\dagger\}_{\pm 1} &= q^{\pm \frac{N_\sigma}{2\Omega}} \delta_{m,m'}, & \{\alpha_{j,\sigma,m}, \alpha_{j',\sigma',m'}^\dagger\} &= 0, \sigma \neq \sigma', j \neq j', \\ \{\alpha_{j,\sigma,m}^\dagger, \alpha_{j,\sigma,m}\} &= 0, & \{\alpha_{j,\sigma,m}, \alpha_{j',\sigma',m'}\} &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

където двата Cartan-ови генератора  $N_\sigma = \sum_j \sum_{m=-j}^j c_{j,m,\sigma}^\dagger c_{j,m,\sigma}$  броят частиците от всеки вид  $\sigma$  и по дефиниция  $q$ -антикомутатора се дава от  $\{A, B\}_k = AB + q^k BA$ .

В деформирания случай двойка фермиони могат да се родят ( $F_{0,\pm 1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} A_{0,\pm 1}$ ) или унищожат ( $G_{0,\pm 1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} B_{0,\pm 1}$ ) от операторите:

$$F_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_j \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{j,m,\sigma}^\dagger \alpha_{j,-m,\sigma'}, \quad (6.2)$$

$$G_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_j \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{j,-m,\sigma} \alpha_{j,m,\sigma'}, \quad (6.3)$$

където  $F_{0,\pm 1} = (G_{0,\pm 1})^\dagger$ . Запазващите броя на частиците Weyl генератори се дефинират като:

$$T_+ = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sum_j \sum_{m=-j}^j \alpha_{j,m,1}^\dagger \alpha_{j,m,-1}, \quad T_- = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sum_j \sum_{m=-j}^j \alpha_{j,m,-1}^\dagger \alpha_{j,m,1}, \quad (6.4)$$

където ( $T_\pm \xrightarrow{q \rightarrow 1} \tau_\pm$ ). В допълнение към генераторите на Cartan  $N_{\pm 1}$  (или техните линейни комбинации  $N = N_{+1} + N_{-1}$  и  $T_0 \equiv \tau_0 = (N_{+1} - N_{-1})/2$ ), операторите (6.2)-(6.4) затварят  $q$ -деформираната  $sp_q(4)$  алгебра и техните недеформирани партньори затварят класическата  $sp(4)$  алгебра. Във физическите приложения, генераторите на броя на частиците от всеки тип  $N_{\pm 1}$  или общия брой частици  $N$  и третата проекция  $T_0$  (на оператора с други две компоненти  $T_\pm$ ), представят физическите наблюдаеми, които винаги са недеформирани.

В деформирания и недеформирания случай, генераторите (6.2)-(6.4) са свързани със съответстващия им оператор за едно ниво  $X^{(j)}$  по следния начин

$$X = \sum_j \frac{\sqrt{\Omega_j}}{\sqrt{\Omega}} X^{(j)}$$

, където  $X = \{F, G, T\}$  или  $X \stackrel{q \rightarrow 1}{=} \{A, B, \tau\}$ . В недеформирания случай десетте оператора  $A_{0,\pm 1}^{(j)}$ ,  $B_{0,\pm 1}^{(j)}$ ,  $\tau_{0,\pm}^{(j)}$  и  $N^{(j)}$  затварят  $sp^{(j)}(4)$  алгебра за всяко  $j$ -ниво и е в сила пряката сума  $sp(4) = \bigoplus_j sp^{(j)}(4)$ .

В деформирания случай възниква различна ситуация, в която генераторите за едно ниво не затварят отделна  $sp_q^{(j)}(4)$  алгебра (например  $[T_+^{(j)}, T_-^{(j)}] \neq [2\frac{T_0^{(j)}}{2\Omega_j}]$ ), а по-скоро затварят обобщената  $sp_q(4)$  алгебра, тъй като

$$[T_+^{(j)}, T_-^{(j)}] = \left[2\frac{T_0}{2\Omega}\right], [F_0^{(j)}, G_0^{(j)}] = \left[\frac{N - 2\Omega}{2\Omega}\right], [F_{\pm 1}^{(j)}, G_{\pm 1}^{(j)}] = \rho_{\pm} \left[\frac{N_{\pm 1} - \Omega}{\Omega}\right],$$

където по дефиниция  $[X]_k = \frac{q^{kX} - q^{-kX}}{q^k - q^{-k}}$  и  $\rho_{\pm} = \frac{q^{\pm 1} + q^{\pm \frac{1}{2\Omega}}}{2}$ . Останалите комутационни съотношения остават в рамките на  $q$ -деформираната алгебра за едно  $j$ -ниво, например

$$[T_0^{(j)}, T_{\pm}^{(j)}] = \pm T_{\pm}^{(j)}.$$

Обаче, няколко от тези съотношения, като например

$$[T_l^{(j)}, F_0^{(j)}]_{\frac{|l|}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_j}} F_l^{(j)} (q^{\frac{N-l}{2\Omega}} + q^{-\frac{N-l}{2\Omega}}), l = \pm 1,$$

включват  $q$ -множител, който зависи от осредненото по разглежданите слоеве число  $N_{\pm 1}/(2\Omega)$ . Това поведение на  $sp_q^{(j)}(4)$  е следствие от обобщената  $q$ -деформация (6.1), където антикомутационните съотношения на два фермиона на едно  $j$ -ниво зависят от общия брой частици от един тип, осреднен по пространството на всички слоеве. Друго интересно следствие от (6.1) е  $q$ -деформираната величина за едно  $j$ -ниво

$$\sum_m \alpha_{j,\sigma,m}^{\dagger} \alpha_{j,\sigma,m} = 2\Omega_j \left[\frac{N_{\sigma}}{2\Omega}\right], \sigma = \pm 1. \quad (6.5)$$

В недеформираната граница, лявата страна на (6.5) представлява оператора на броя на частиците  $N_{\sigma}^{(j)}$ , на едно единствено ниво, докато в деформираното разширение нулевото приближение на (6.5) дава равномерно разпределение на частиците върху цялото пространство на разглежданото множество от слоеве с тегловен множител представляващ размерността на единичния  $j$ -слой. По този начин  $q$ -деформацията за обобщената  $sp_q(4)$  алгебра въвежда вероятностни характеристики от съдържащите се отделни  $j$ -нива на теорията.

В деформирания, както и в “класическия” случай, всяко крайно представяне се опъва върху напълно сдвоени състояния (5.91), които се конструират от двойките фермиони, свързани до пълнен ъглов момент и четност  $J^{\pi} = 0^+$  [8]. Базисните състояния (5.91) в пространството на множество орбити с размерност  $2\Omega$  е линейна комбинация на базисните състояния на отделните нива, които зависят от това, коя двойка, кое ниво заема [70, 71].

Състоянията (5.91) са собствени вектори на оператора на пълния брой частици  $N_{\pm 1}$  със собствени стойности  $N_{\pm} = 2n_{\pm 1} + n_0$ . И двата оператора  $N$  и  $\tau_0$  ( $T_0$ ) са диагонални в базиса (5.91) със собствени стойности  $n = 2(n_1 + n_{-1} + n_0)$  и  $i = n_1 - n_{-1}$ , съответно. Докато операторите на броя на фермионите на отделните  $j$ -слой  $N_{\pm 1}^{(j)}$  се проектират върху базиса на отделните нива, то  $q$ -деформирания им аналог (6.5) е диагонален в базиса (5.91) със собствена стойност  $2\Omega_j \left[ \frac{2n_{\sigma} + n_0}{2\Omega} \right]$ ,  $\sigma = \pm 1$ .

Обобщеният модел има същите свойства на симетрия като реализацията на теорията за едно ниво [A5]. Всички формули получени чрез комутационните съотношения на генераторите на алгебрата върху едно ниво ( като действието на генераторите на групата върху базисните състояния, операторите на Casimir, собствените стойности, нормировките на базисните вектори ) съвпадат на алгебрично ниво и имат същия вид след субституцията  $\Omega_j \rightarrow \Omega$ . Трите важни редукиционни редици на  $sp_q(4)$  алгебрата до  $u_q(2)$  тук са обобщени в Таблица 6.1 заедно със собствените стойности на първите и втори оператори на Casimir и базисните състояния във всяка от границите.

Таблица 6.1: Редукиционни граници на  $sp_q(4)$  алгебрата,  $\mu = \{T, 0, \pm\}$ .

$u_q^\mu(2)$	Генератори	Собствени стойности		Базисни състояния
		$C_1(u_q^\mu(2))$	$C_2(su_q^\mu(2))$	
$u_q^T(2)$	$T_{\pm}, T_0; N$	$n = 2n_1 + 2n_{-1} + 2n_0$	$2\Omega \left[ \frac{1}{2\Omega} \right] [T]_{\frac{1}{2\Omega}} [T+1]_{\frac{1}{2\Omega}}$	$ n, T, i\rangle$
$u_q^0(2)$	$F_0, G_0, \frac{N-2\Omega}{2}, T_0$	$i = n_1 - n_{-1}$	$2\Omega \left[ \frac{1}{2\Omega} \right] \left[ \frac{2\Omega - 2(n_1 + n_{-1})}{2} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \times \left[ \frac{2\Omega - 2(n_1 + n_{-1})}{2} + 1 \right]_{\frac{1}{2\Omega}}$	$ n_1, n_0, 0\rangle$ $ 0, n_0, n_{-1}\rangle$
$u_q^{\pm}(2)$	$F_{\pm 1}, G_{\pm 1}, \frac{N_{\pm 1} - \Omega}{2}, N_{\mp 1}$	$2n_{\mp 1} + n_0$	$\rho_{\pm} \Omega \left[ \frac{1}{\Omega} \right] \left[ \frac{\Omega - n_0}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}} \left[ \frac{\Omega - n_0}{2} + 1 \right]_{\frac{1}{\Omega}}$	$ n_1, 0, n_{-1}\rangle$ $ n_1, 1, n_{-1}\rangle$

И в този случай,  $q$ -деформираната симплектична алгебра се свежда до “класическата”, когато  $q \rightarrow 1$ . При приложенията в ядрената структура ние използваме набора от комутационни съотношения, който е симетричен по отношение на замяната  $q \leftrightarrow q^{-1}$  [A5].  $q$ -коэффициентите,  $\Psi_{lk}(N_p)$ , получени в [A5] за следните комутатори

$$[T_l, Y_{\pm k}] = \pm \frac{Y_{\pm l \pm k} \Psi_{\pm 1}(N_{\pm k})}{2[2]\sqrt{\Omega}}, \quad l, k \neq 0; \quad [F_l, G_{-k}] = \frac{T_{l+k} \Psi_{|l|-|k|}(N_{l-k})}{2[2]\sqrt{\Omega}}, \quad l+k \neq 0,$$

(където  $Y = F$  ( $G$ ) за ‘+’ (‘-’) случая) могат да се напишат в компактен вид по следния начин

$$\Psi_{\pm 1}(N_p) = 2\sqrt{\rho_+ \rho_-} \left[ 2N_{p \pm 1/2 - \Omega} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} = \begin{cases} \Psi_{l0}(N_p) \\ \Psi_{0k}(N_p) \end{cases}, \quad (6.6)$$

където е дефинирано  $[2X]_{\frac{1}{2\Omega}} \equiv \frac{[2X]_{\frac{1}{2\Omega}}}{[X]_{\frac{1}{2\Omega}}} = q^{\frac{X}{2\Omega}} + q^{-\frac{X}{2\Omega}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 2$ .

## 6.2 Действие на операторите от първи и втори ред върху базисните вектори

В допълнение на обобщението на  $sp_q(4)$  алгебрата за множество от  $j$ -слоеве, може да се даде и алгебричната форма за действието на произведения на два и повече генератора на симплектичната симетрия. Това позволява да бъде пресметнато прекриването на състоянията от последователност, в която е запазен броя на частиците, да се построи  $q$ -деформиран диагонален оператор от втори ред, от всичките 10 генератора на  $Sp_q(4)$ , и да се изчислят матричните елементи на моделен хамилтониан.

### 6.2.1 Границата определена от $su_q^T(2)$

В  $q$ -деформирания случай, комутаторите на повишаващият (понижаващ)  $T_{\pm}$  оператор с раждащите двойка еднакви частици оператори  $(F_{\mp})^{n_{\mp}+1}$  и  $(F_0)^{n_0}$ , които влизат в конструкцията на базисните състояния (5.91), са

$$\begin{aligned} [T_{\pm}, (F_{\mp})^{n_{\mp}+1}] &= F_0 (F_{\mp})^{n_{\mp}+1} \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_-}}{\sqrt{\Omega} [2]} [n_{\mp}+1]_{\frac{1}{2\Omega}} [2_{N_{\mp}+n_{\mp}+1/2-\Omega}]_{\frac{1}{2\Omega}} \\ [T_{\pm}, (F_0)^{n_0}]_{\left(\frac{[2]}{2}\right)^{n_0}} &= F_{\pm} (F_0)^{n_0-1} \frac{1}{2\sqrt{\Omega}} \sum_{p=0}^{n_0-1} \frac{[2]^p}{2^p} [2_{N_{\mp}+n_0-1-p}]_{\frac{1}{2\Omega}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Използвайки (6.7), може да се определи общата формула за действието на произведението от  $k$ -ти ред на операторите  $T_{\pm}$  върху базисното състояние с най-ниско (високо) тегло

$$\begin{aligned} T_{\pm}^k (F_{\mp})^{n_{\mp}+1} |0\rangle &= \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \left( \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_-}}{\sqrt{\Omega} [2]} [2_{n_{\mp}+1-i-\frac{1}{2}-\Omega}]_{\frac{1}{2\Omega}} \right)^{k-i} \frac{[n_{\mp}+1]_{\frac{1}{2\Omega}}! \theta(k, i)}{[n_{\mp}+1-k+i]_{\frac{1}{2\Omega}}!} \\ &\quad \times (F_{\pm})^i (F_0)^{k-2i} (F_{\mp})^{n_{\mp}+1-k+i} |0\rangle, \end{aligned} \quad (6.8)$$

където  $k \leq n_{\pm 1}$  и функциите в сумата са определени като

$$\theta(k, 0) = 1, \quad \text{за всяко } k \quad (6.9)$$

$$\theta(k, i) = \begin{cases} \frac{\theta(k-1, i) [2_{n_{\mp}+1-i-\frac{1}{2}-\Omega}]_{\frac{1}{2\Omega}}}{[2_{n_{\mp}+1-i-\frac{1}{2}-\Omega}]_{\frac{1}{2\Omega}}} + \frac{\theta(k-1, i-1)}{2\sqrt{\Omega}} \sum_{p=0}^{k-2i} \frac{[2]^p}{2^p} [2_{k-2i-p}]_{\frac{1}{2\Omega}}, & i \leq \lfloor k/2 \rfloor \\ 0, & i > \lfloor k/2 \rfloor. \end{cases}$$

Това означава, че  $\theta(k, \frac{k}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \theta(k-1, \frac{k}{2}-1)$ , когато  $k$  е четно. Започвайки от базисното състояние с най-ниско (най-високо) тегло, действието на оператора  $T_{\pm}$  (6.8)

дава всички вектори запазващи броя на частиците с определена максимална стойност на квантовото число  $T$ . (Да напомним, че за дадени  $n$  и  $i$ ,  $T$  приема стойностите,  $T = \frac{\tilde{n}}{2}, \frac{\tilde{n}}{2} - 2, \dots, 2[\frac{i}{2}]$ , където  $\tilde{n} = \min\{n, 4\Omega - n\}$ ). Останалите вектори с по-ниски стойности на  $T$  и същите квантови числа  $(n, i)$  могат да се намерят като независими ортогонални вектори на тези построени в (6.8).

В ядрените системи генераторите  $T_{\pm}$  представляват повишаващите и понижаващи изоспинови оператори и като такива те предизвикват преходите на  $\beta^{\mp}$ -разпад във веригите от изобари. Следователно изведената по-горе формула (6.8) може да се използва при пресмятането на тези преходи. Също така построяването на изоспиновите състояния (6.8) позволява да се пресмята припокриването им със сдвоените състояния (5.91) и със собствените вектори на моделния хамилтониан.

### 6.2.2 Действие на произведенията на два генератора върху базисните състояния

Може да се получи и аналитичния вид на действието на антикомутатора  $\{T_+, T_-\} = T_+T_- + T_-T_+$  върху базисните състояния

$$\begin{aligned} \{T_+, T_-\} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= \frac{M_{-1,+2,-1}^T}{\Omega} |n_1 - 1, n_0 + 2, n_{-1} - 1\rangle \\ &+ \frac{M_{0,0,0}^T}{\Omega} |n_1, n_0, n_{-1}\rangle + \frac{M_{+1,-2,+1}^T}{2\Omega} |n_1 + 1, n_0 - 2, n_{-1} + 1\rangle, \end{aligned} \quad (6.10)$$

където коефициентите  $M_{n'_1, n'_0, n'_{-1}}^T$  (с  $n'_1, n'_0, n'_{-1}$  показващи броя на добавените (+)/премахнатите (-) двойки от всеки вид) са  $q$ -деформирани функции на броя на двойките изразени  $n_{-1}, n_0, n_1$  по следния начин:

$$\begin{aligned} M_{-1,+2,-1}^T &= \frac{1}{4[2]^2} \{ \Psi(n_0, n_1 - 1) \Psi(n_0 + 1, n_{-1} - 1) \\ &+ \Psi(n_0, n_{-1} - 1) \Psi(n_0 + 1, n_1 - 1) \} \\ M_{0,0,0}^T &= \frac{1}{4[2]} \{ \Phi(n_0 - 1) (\Psi(n_0 - 1, n_1) + \Psi(n_0 - 1, n_{-1})) \\ &+ \Phi(n_0) (\Psi(n_0, n_1 - 1) + \Psi(n_0, n_{-1} - 1)) \} \\ M_{+1,-2,+1}^T &= \Phi(n_0 - 1) \Phi(n_0 - 2), \end{aligned} \quad (6.11)$$

където е дефинирано, че

$$\Phi(n_0) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{[2]^k}{2^k} [2_{n_0-k}], \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \Psi(n_0, n_{\pm 1}) &= [n_0 + 2n_{\pm 1} + 1]_{\frac{1}{2\Omega}} - [n_0 - 1]_{\frac{1}{2\Omega}} + [n_0 + 2n_{\pm 1} + 2 - 2\Omega]_{\frac{1}{2\Omega}} - [n_0 - 2\Omega]_{\frac{1}{2\Omega}} \\ &= 2\sqrt{\rho_+\rho_-} [n_{\pm} + 1]_{\frac{1}{2\Omega}} [2_{n_0+n_{\pm}+1/2-\Omega}]_{\frac{1}{2\Omega}}. \end{aligned}$$

Вторият израз за  $\Psi(n_0, n_{\pm 1})$  (6.12) позволява да презапишем недиагоналните членове, които разсейват две двойки от еднакви частици от различен вид в две двойки от различни частици (6.11), по следния начин:

$$M_{-1,+2,-1}^T = \frac{\rho_+\rho_-}{[2]^2} [n_1]_{\frac{1}{2\Omega}} [n_{-1}]_{\frac{1}{2\Omega}} \times \left\{ \left[ 2_{n_0+n_1-\Omega-\frac{1}{2}} \right] \left[ 2_{n_0+n_1-\Omega+\frac{1}{2}} \right] + \left[ 2_{n_0+n_1-\Omega+\frac{1}{2}} \right] \left[ 2_{n_0+n_1-\Omega-\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (6.13)$$

По подобен начин, действието на произведението  $F_0G_0$  върху базисните състояния дава следния недиагонален член

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Omega} M_{-1,+2,-1}^P &= -\frac{1}{\Omega} \tilde{n}_1 \tilde{n}_{-1} \\ &= -\frac{\rho_+\rho_-}{[2]^2 \Omega} [n_1]_{\frac{1}{2\Omega}} [n_{-1}]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[ 2_{n_1-\Omega-\frac{1}{2}} \right] \left[ 2_{n_{-1}-\Omega-\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

а за  $F_{+1}G_{+1} + F_{-1}G_{-1}$  получаваме

$$-\frac{1}{\Omega} M_{+1,-2,+1}^P = -\frac{1}{\Omega} \frac{\sqrt{\rho_+\rho_-}}{[2]} \sum_{k=1}^{n_0-1} S_q(k), \quad (6.15)$$

където е дефинирано

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{\pm 1} &\equiv \frac{1}{2[2]} ([2n_{\pm 1} - 1]_{\frac{1}{2\Omega}} + [2n_{\pm 1} - 2\Omega]_{\frac{1}{2\Omega}} + [2\Omega]_{\frac{1}{2\Omega}} + 1) \\ &= \frac{1}{[2]} \sqrt{\rho_+\rho_-} [n_{\pm 1}]_{\frac{1}{2\Omega}} [2_{n_{\pm 1}-\Omega-1/2}]_{\frac{1}{2\Omega}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} n_{\pm 1} \end{aligned}$$

и [A6]

$$S_q(k) \equiv [2_{k-\Omega-1/2}]_{\frac{1}{2\Omega}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{[2]^i}{2^i} [2_{k-1-i}]_{\frac{1}{2\Omega}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 4k.$$

Диагоналните елементи,  $M_{0,0,0}^P$ , на  $F_0G_0$  и  $F_{+1}G_{+1} + F_{-1}G_{-1}$  са обсъдени в детайли [A6].

### 6.2.3 Оператори от втори ред

Аналитичните изрази (6.11)-(6.15) дават възможност да намерим  $q$ -деформиран оператор от втори ред,  $O_2(sp_q(4))$ , който е диагонален в  $q$ -деформирания базис, и който в границата когато  $q$  клони към единица се свежда до инварианта на Casimir от втори порядък за алгебрата  $sp(4)$  [A5, 49],

$$O_2(sp_q(4)) = \frac{\gamma_1}{2} (\{F_{+1}, G_{+1}\} + \{F_{-1}, G_{-1}\}) + \gamma_0 \frac{C_2(su_q^0(2))}{\Omega} + \frac{C_2(su_q^T(2))}{\Omega}, \quad (6.16)$$

където  $\gamma$ -коэффициентите са  $q$ -функции на броя на двойките,

$$\gamma_1 = \frac{M_{+1,-2,+1}^T}{2M_{+1,-2,+1}^P} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 2$$

и

$$\gamma_0 = \frac{\left[2_{n_0+n_1-\Omega-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[2_{n_0+n_1-\Omega+\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}} + \left[2_{n_0+n_1-\Omega+\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[2_{n_0+n_1-\Omega-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}}}{2 \left[2_{n_1-\Omega-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[2_{n_1-\Omega-\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{2\Omega}}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 1 .$$

Участващите оператори на Casimir са пресметнати в [A5], като тук са дадени в по-удобна и компактна форма:

$$C_2(su_q^T(2)) = \Omega \left( \{T_+, T_-\} + \left[ \frac{1}{\Omega} \right] [T_0]_{\frac{1}{2\Omega}}^2 \right)$$

и

$$C_2(su_q^0(2)) = \Omega \left( \{F_0, G_0\} + \left[ \frac{1}{\Omega} \right] \left[ \frac{N}{2} - \Omega \right]_{\frac{1}{2\Omega}}^2 \right) .$$

Операторът от втори ред може да се запише в термини на операторите на Casimir [A5] на всичките четири граници,  $\mu = \{+, -, 0, T\}$ , като

$$O_2(sp_q(4)) = \sum_{k=+,-,0,T} \gamma_k \frac{C_2(su_q^k(2))}{\Omega} - \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{2}{\Omega} \right] \left\{ \rho_+ \left[ \frac{N_1 - \Omega}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}}^2 + \rho_- \left[ \frac{N_{-1} - \Omega}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}}^2 \right\} \quad (6.17)$$

където  $\gamma_{\pm} \equiv \gamma_1$ ,  $\gamma_T \equiv 1$  и

$$C_2(su_q^{\pm}(2)) = \frac{\Omega}{2} \left( \{F_{\pm 1}, G_{\pm 1}\} + \rho_{\pm} \left[ \frac{2}{\Omega} \right] \left[ \frac{N_{\pm 1} - \Omega}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}}^2 \right)$$

Неговата собствена стойност в набора от базисни състояния (5.91) (виж Таблица 6.1 и (6.11)-(6.15)) е

$$\begin{aligned} \langle O_2(sp_q(4)) \rangle &= \gamma_1 (\rho_+ + \rho_-) \left[ \frac{1}{\Omega} \right] \left[ \frac{\Omega - n_0}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}} \left[ \frac{\Omega - n_0}{2} + 1 \right]_{\frac{1}{\Omega}} \\ &\quad - \frac{\gamma_1}{2} \left[ \frac{2}{\Omega} \right] \left\{ \rho_+ \left[ \frac{2n_+ + n_0 - \Omega}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}}^2 + \rho_- \left[ \frac{2n_- + n_0 - \Omega}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}}^2 \right\} \\ &\quad + 2\gamma_0 \left[ \frac{1}{2\Omega} \right] \left[ \frac{2\Omega - 2(n_1 + n_{-1})}{2} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[ \frac{2\Omega - 2(n_1 + n_{-1})}{2} + 1 \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \\ &\quad + \frac{M_{0,0,0}}{\Omega} + \left[ \frac{1}{\Omega} \right] [n_1 - n_{-1}]_{\frac{1}{\Omega}}^2 \xrightarrow{q \rightarrow 1} \Omega + 3. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Операторът от втори ред (6.16) е инвариант на Casimir само в недеформираната граница на теорията. В този граничен случай с неговата собствена стойност  $(\Omega + 3)$  са означени представянията на  $Sp(4)$ . Докато за други схеми на  $q$ -деформация може да се намери явен вид на операторите на Casimir от втори порядък на  $sp_q(4)$  [56], това не се получава в този случай [A5], тъй като по конструкция направената деформация включва зависимост от слоестата структура, подходяща за приложения в ядрената

физика. Въпреки това важността на намерения оператор от втори ред (6.16) в  $q$ -деформирания случай е очевидна. Това е оператор, който се състои от запазващите броя на частиците произведения на всичките десет  $q$ -деформирани генератори на групата и сдвоените базисни състояния (5.91), които опъват цялото пространство за дадено представяне на  $Sp_q(4)$  са негови собствени вектори. Неговото нулево приближение комутира с генераторите на  $q$ -деформираната симплектична симетрия, което значи, че само членовете от по-висок порядък въвеждат зависимост от квантовите числа, с които са означени състоянията. Той също дава и пряка връзка между матричните елементи на произведенията от втори ред на генераторите, от които е построен  $O_2(sp_q(4))$ .

#### 6.2.4 Бозонно приближение

Въпреки че фермионното обобщение позволява разглеждането на множество  $j$ -орбитали, не трябва да се допуска твърде голямо нарастване на размерността на пространството, защото ефектът от деформацията намалява когато размера на моделното пространство расте. Например, в случая на много големи  $\Omega$  антикомутиционните съотношения на фермионите (6.1) се редуцират до по-простата форма  $\{\alpha_{j,\sigma,m}, \alpha_{j,\sigma,m'}^\dagger\}_{q^{\pm 1}} = \delta_{m,m'}$  и всички  $q$ -скоби  $[X]$  или  $[X]_{\frac{1}{(2)\Omega}}$  преминават в  $X$ , когато  $X$  не е функция на  $\Omega$ . В тази граница сдвояващите оператори удовлетворяват бозонни комутиционни съотношения и се получава бозонно приближение на теорията. В границата на големи  $\Omega \gg \{\frac{N}{2}, N_{\pm 1}\}$ , действието на операторите  $A \cdot B$  ( $F \cdot G$ ) върху базисните състояния дава броя на различните видове бозони:  $\langle F_0 G_0 \rangle$  брой двойките от неидентични частици и остава недеформиран;  $\langle F_{\pm} G_{\pm} \rangle$  брой двойките от еднакви частици и е недеформиран си аналог, само премащабиран с фактор  $\frac{1+q^{\pm 1}}{2}$ . Друго пряко следствие от зависимостта на деформацията от размера на пространството е, че в границата на големите  $\Omega$  е в сила прякото произведение на квантовите симплектични алгебри за отделните  $j$ ,  $sp_q(4) = \bigoplus_j sp_q^{(j)}(4)$ , както в недеформирания случай за всички  $\Omega$ .

В тази глава въведохме разширение на квантовата  $sp_q(4)$  алгебра, което важи за множество от  $j$ -слоеве. Докато в недеформирания случай това е пряка сума от симплектичните  $sp_q^{(j)}(4)$  алгебри за отделните  $j$ -та, в деформирания случай такъв резултат се получава само в бозонното приближение, което е приложимо в границата на големи пространства,  $\Omega \gg \{\frac{N}{2}, N_{\pm 1}\}$ . Зависимостта на деформацията от размерността на пространството прави полученото разширение уникално и нетривиално.



## Част II

Приложение на симплектичните алгебри  
за класификация на ядрени системи



## 7. Единно описание на нисколежащите състояния от основните ивици на четно-четните ядра

Нисколежащата част от спектрите на четно-четните ядра е най-богатата и добре изучена част от експерименталните данни във физиката на ядрената структура. Въпреки това интересът към нейното теоретично изследване [72–81] не намалява, което се дължи на възможността да се изучават някои общи характеристики на атомните ядра на базата на подходящо създадена тяхна систематика [82–85].

Целта на тази работа е да изследва общите характеристики на нисколежащите колективни състояния на колкото може повече четно-четни ядра. Такъв проблем изисква използването на систематика, в която физическите наблюдаеми, отговарящи на колективните степени на свобода, имат единно и гладко поведение. Създаването на такава систематика е силно свързано с избора на специфични ядрени характеристики, които предопределят разглежданото колективно явление. Този избор може да се мотивира от емперично доказаната главна роля на валентните нуклони в даден ядрен слой, като предопределящи колективното движение в ядрата. Това е също в основата на твърде успешната  $N_\pi N_\nu$  схема на Casten [83] и в добре известната протон-неутронна версия на модела на взаимодействащите бозони (МВБ) [86, 87].

За да бъдем напълно последователни, в нашите разглеждания е развита класификационна схема [85] за четно-четните ядра, като е използван метод подобен на тези за класификация на елементарните частици. Това е нов подход за теоретичната ядрена физика, но той може да се комбинира с много практичното и успешно понятие за група на динамична симетрия (DG). Традиционно групата на динамична симетрия се избира по такъв начин, че нейно подходящо неприводимо представяне съдържа целия спектър от колективни състояния на дадено ядро [72–75].

За да обясним класификационния проблем, приложен към картата на ядрените изотопи, ние въвеждаме понятието обобщена динамична група (GDG) [85], като група чиито неприводими представяния дават спектъра от колективни състояния не на едно, а на цяла последователност от ядра. В резултат за описанието на колективните състояния се предполага, че обобщената динамична група съдържа някакъв вид пряко или полупряко произведение на класификационна група (CG) и на динамичната група:

$$\text{GDG} \supset \text{CG} \otimes \text{DG} .$$

По този начин въвеждането на обобщената динамична група води до описание по единен начин на енергетичния спектър на серии от ядра, въвеждайки общ хамилтониан, чиито коефициенти са едни и същи функции на квантовите числа на представянията на класификационната група. Вида на участващите взаимодействия се дава от динамичната група. В тази глава, няма да се задълбочаваме в изследването на проблема за подходящия избор на динамичната група и следователно на обобщената динамична група.

### 7.1 $Sp(4, R)$ класификационна схема на четно-четните ядра

В настоящата Глава 7, главната ни цел е да мотивираме и приложим за реални четно-четни ядра, групата  $Sp(4, R)$  като класификационна група [A8, B6, B7, B8].

Разработената от нас, класификационна схема се основава на редукцията на бозонните представяния на алгебрата на некомпактната група  $Sp(4k, R)$ ,  $k \geq 1$  до подгрупата и  $SU(k)$  [6].  $sp(4, R)$  е най-простата, не съдържаща усложнения при приложенията си симплектична алгебра, която беше подробно изложена в математическата част на дисертацията в Глава 2 [A1, B2, B4]. Тук ще напомним, за да въведем подходящите за случая означения, нейната конструкция с помощта на два едномерни оператора на раждане ( $\pi^+$ ,  $\nu^+$ ) и унищожение ( $\pi$ ,  $\nu$ ) на бозони. Съответните генератори на алгебрата са:

$$\begin{aligned} \pi^+ \pi^+, \nu^+ \nu^+, \pi^+ \nu^+, & \quad \pi \pi, \nu \nu, \pi \nu, \\ N_\pi = \pi^+ \pi, N_\nu = \nu^+ \nu, & \quad F_+ = \pi^+ \nu, F_- = \nu^+ \pi. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Пространството на бозонните представяния на  $sp(4, R)$  означено с  $\mathcal{H}$  е приводимо и се разпада на две неприводими подпространства  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$ . Операторът

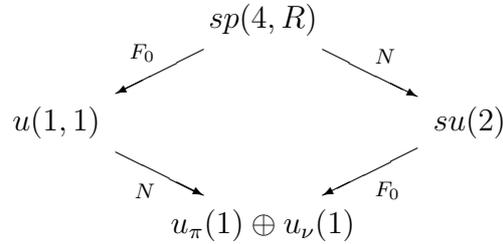
$$N = N_\pi + N_\nu \quad (7.2)$$

е инварианта на Casimir на максималната компактна подгрупа  $U(2)$  на  $Sp(4, R)$ . Действайки в пространствата  $\mathcal{H}_+$  и  $\mathcal{H}_-$ ,  $N$  ги резлага на пряка сума от напълно симетрични унитарни неприводими представяния (УНП) на  $su(2)$  означени за  $\mathcal{H}_+$  с  $N = 0, 2, 4, \dots$  (четно) и за  $\mathcal{H}_-$  с  $N = 1, 3, 5, \dots$  (нечетно). Бозонното представяне на  $sp(4, R)$  съдържа също компонентите  $F_\pm$  (7.1), както и третата компонента на оператора на  $F$ -спина

$$F_0 = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu), \quad (7.3)$$

която не се отличава съществено от инварианта на Casimir от първи порядък за некомпактната подгрупа  $U(1, 1)$ :  $F_0 = \frac{1}{2}(C_{1,1} + 1)$ . Чрез този оператор, в пространството  $\mathcal{H}$ , се определя стълбичното представяне на  $U(1, 1)$ , зададено от фиксираните собствени стойности на  $F_0$ . Същият оператор  $F_0$  (7.3) редуцира всяко  $U(2)$  представяне

(зададено с фиксирана стойност на  $N$ ) на представяния на прякото произведение  $u_\pi(1) \otimes u_\nu(1)$ , определено от стойностите на  $N_\pi$  и  $N_\nu$ . Същото се получава разлагайки  $U(1, 1)$  представянията с оператора  $N$ . Разцепването на бозонните пространства  $\mathcal{H}_\pm$ , съответстващо на редукциите



е представено в Таблиците 2.1 и 2.2, където колоните представляват стълбите определени от  $F_0$ , а редовете УНП на  $su(2)$  дефинирани чрез  $N$ . Всяка клетка съответства на дадено УНП на  $u_\pi(1) \oplus u_\nu(1)$ , определено от двойката числа  $(N_\pi, N_\nu)$ , дадени в таблиците или което е същото на двойката собствени стойности на  $(N, F_0)$ .

В така получените схеми могат да се класифицират четно-четните ядра, като се въведе подходящ физически смисъл на собствените стойности на редукционните оператори. Веднага се вижда, че

$$N_\pi = \frac{1}{2}(N_p - N_p^{\text{mag}}) \quad N_\nu = \frac{1}{2}(N_n - N_n^{\text{mag}}) \quad (7.4)$$

могат да се интерпретират като броя на протонни и неутронни валентни двойки за определено ядро, принадлежащо на даден слой, където  $N_p$  и  $N_n$  са пълния брой протони и неутрони в ядрото, а  $N_p^{\text{mag}}$  и  $N_n^{\text{mag}}$  са съответните магически числа, от които започва слоя, на който принадлежи ядрото. Тогава  $N$  (7.2) и  $F_0$  (7.3) са очевидно както в МВБ-2 [72–75], пълния брой валентни бозони и третата проекция на  $F$ -спина, свързани с ядрените характеристики по следния начин:

$$N = \frac{1}{2}(A - A^{\text{mag}}), \quad F_0 = \frac{1}{2}(M_T - M_T^{\text{mag}}), \quad (7.5)$$

където  $A = N_p + N_n$  е масовото число на ядрото и  $M_T = \frac{1}{2}(N_p - N_n)$  е третата проекция на изоспина.

При избраните съответствия, ядрата от даден главен слой се подреждат в симплектичните мултиплети от пространствата  $\mathcal{H}_\pm$  като слоевете се проектират върху схемите от Таблиците 2.1 и 2.2. Удобно е да задаваме слоевете с двойките числа,  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)})$  и  $(N_p^{(2)}, N_n^{(2)})$ , определящи двойно магическите ядра в началото и края на слоя, съответно  $(N_p^{(2)} > N_p^{(1)}; N_n^{(2)} > N_n^{(1)})$ . Двойката магически числа  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)})$  съответства на вакуумното състояние  $(N = 0, F_0 = 0)$  в  $\mathcal{H}$ . С помощта на формули (7.4) и (7.5) всяко ядро се поставя в определена клетка от пространствата  $\mathcal{H}_+$  или  $\mathcal{H}_-$ , които задават представяне на  $u_\pi(1) \oplus u_\nu(1)$ . УНП на  $u_\pi(1) \oplus u_\nu(1)$  са едномерни,

което значи, че всяко ядро е еднозначно представено в бозонното представяне на класификационната група  $Sp(4, R)$ . Получените по този начин симплектични мултиплети са означени с  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)} | N_p^{(2)}, N_n^{(2)})_+$  ако  $N$  е четно и с  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)} | N_p^{(2)}, N_n^{(2)})_-$  ако  $N$  е нечетно. Всеки ред на даден  $sp(4, R)$  мултиплет съдържа ядра (изобари), принадлежащи на  $u(2)$  подмултиплет, а всяка колона ядра (изофери) от  $u(1, 1)$  подмултиплетите.

В тази глава са дадени в Таблицы 7.2 – 7.11, представените по този начин симплектични мултиплети  $(28, 28 | 50, 50)_\pm$ ,  $(28, 50 | 50, 82)_\pm$ ,  $(50, 50 | 82, 82)_\pm$ ,  $(50, 82 | 82, 126)_\pm$  и  $(82, 126 | 126, 184)_\pm$ , съответно. Стойностите на ядрените характеристики (7.10) могат да се вземат от таблиците, тъй като  $N(\bar{N})$  номерират техните редове, а  $F_0(\bar{F}_0)$  колоните им.

## 7.2 Обобщено взаимодействие в ираст ивиците на класифицираните ядра

Целесъобразността на тази класификационна схема [85] по-нататък е мотивирана от качествения анализ на енергиите на първите възбудени  $2^+$  нива на ядрата подредени по описания начин в симплектичните мултиплети. Когато се начертаят като функции на  $N$  за всяка фиксирана стойност на  $F_0$ , тези енергии лежат на гладки непресичащи се криви. Нещо повече, във всеки слой и от слой в слой получените криви имат периодично поведение. Това ни доведе до идеята да обединим описанието на енергиите от основната ивица за трите основни видове ядрена колективност:

1. вибрационна [88]

$$E_v(L) = \alpha_1 L, \quad (7.6)$$

2. ротационна [88]

$$E_r(L) = \alpha_2 L(L + 1), \quad (7.7)$$

3. и преходна [89]

$$E_{tr}(L) = \alpha_3 L(L + \omega) \quad (7.8)$$

като определим техните моделни параметри  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ :

$$\alpha_i \{h_k\} = \alpha_i \{A_p, A_n, N, F_0, \bar{N}, \bar{F}_0\}, \quad (7.9)$$

като функции на набора  $\{h_k\}$  от класификационни квантови числа:

$$\begin{aligned} A_p &= N_p^{(1)} + N_p^{(2)}, & A_n &= N_n^{(1)} + N_n^{(2)}, \\ N &= N_\pi + N_\nu, & F_0 &= \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu), \\ \bar{N} &= \bar{N}_\pi + \bar{N}_\nu, & \bar{F}_0 &= \frac{1}{2}(\bar{N}_\pi - \bar{N}_\nu), \end{aligned} \quad (7.10)$$

свързани със квантовите числа на слоестия модел чрез представената систематика [85].  $N_\pi$  и  $N_\nu$  са определени в (7.4), докато  $\bar{N}_\pi$  и  $\bar{N}_\nu$  дават броя на съответните двойки от дупки.  $N, F_0$  от (7.10) съвпадат с тези дефинирани в (7.2), (7.3), докато  $\bar{N}$  е пълния брой валентни бозонни дупки и  $\bar{F}_0$  е третата проекция на  $\bar{F}$  спина съответно (виж [88, 89]).

Ясно е, даже само от емпиричен опит, че за да се опишат колективните моди са необходими точно 6 променливи, които са броя на протоните  $N_p$  и неутроните  $N_n$  в ядрото и четирите числа ограничаващи слоя  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)})$  и  $(N_p^{(2)}, N_n^{(2)})$ , на който то принадлежи. В нашия случай е удобно да се използва набора от 6 променливи (7.10), които се получават от тези основни квантови числа, но са свързани по естествен начин (7.2), (7.3) с квантовите числа на класификационната алгебра  $sp(4, R)$  и с много популярния в ядрената физика език на МВБ [88, 89].

В [88, 89] са получени прости и лесни за прилагане феноменологични формули за динамичните коефициенти на взаимодействията (7.6), (7.7) и (7.8), като е определена тяхната специфична функционална зависимост от квантовите числа (7.10). Тук се насочваме към проблема за обобщаване на взаимодействието, свързан с избора на динамична група, за да получим общо, единно описание на основните ивици на всички четно-четни ядра, вече класифицирани в симплектичните мултиплети.

Емпирична аргументация за обобщаването на взаимодействието на трите главни колективни колективни моди, а именно ротационната, вибрационната и преходната се получава от изследването на енергетичното отношение  $R_2 = E(4^+)/E(2^+)$ . Това отношение се използва широко като универсален показател за колективността [90]. Теоретичната стойност на това отношение за взаимодействието (7.8) може да се представи във вида:

$$R_2(\omega) = 2 + \frac{4}{(2 + \omega)}, \quad (7.11)$$

който показва експлицитно неговата зависимост от геометричния параметър  $\omega$ . Очевидно неговите гранични стойности  $R_2 = 2$  и  $R_2 = 3.33$  се получават за  $\omega \rightarrow \infty$  в (7.6) и  $\omega = 1$  в (7.7), съответно. Така стойностите на параметъра  $\omega$  отчитат промените в ядрената структура при ядрата от таблицата на изотопите, включвайки като гранични случаи взаимодействията от вида (7.6) и (7.7).

Подобна идея е въведена за първи път от формулата на Ejiri

$$E_L = aL(L + 1) + bL$$

съгласно която параметъра  $\omega = (a + b)/a$  скалира различните степени на колективност, като фиксира средното съотношение между членовете с  $L$  и  $L^2$  [77].

Взаимодействия от типа (7.8) могат да се намерят при преглед на моделите, описващи успешно нисколежащата част на различните видове колективни спектри. В хамилтонианите на точно решимите граници за вибрационните  $[SU(5)]$  и  $\gamma$ -меки  $[O(6)]$

ядра на МВБ-1 [77], членове с  $\omega \neq 1$  се появяват от собствените стойности на съответните оператори на Casimir, с които са означени разглежданите представяния. Тук ще отбележим, че енергитичния израз (7.8) изглежда като собствената стойност  $C_2 = 2f(f+2\omega)$  на оператора на Casimir от втори порядък за най-симетричното представяне  $D^f \equiv (f, 0, \dots, 0)$  на алгебрите от вида  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$  на групите  $O(2n+1)$ ,  $Sp(2n)$  и  $O(2n)$  с  $\omega = n - 1/2$ ,  $\omega = n$  и  $\omega = n - 1$ , съответно.

Както споменахме по-горе, взаимодействието (7.8) беше проверено при описанието на нисколежащите състояния от основните ивици на преходните ядра [89]. За да обединим тяхното описание, бяха определени едновременно параметъра  $\omega$  в геометричната част на взаимодействието и динамичните коефициенти пред него като функции на ядрените квантови числа за отделните слоеве. Нашите резултати бяха сравнени с наскоро установеното [91] за всички ядра с  $2.05 \leq R_2 \leq 3.15$ , универсално поведение на анхармоничен вибратор

$$E(4_1^+) = 2E(2_1^+) + \epsilon_4 \quad (7.12)$$

с почти постоянна анхармоничност  $\epsilon_4$ . Физическият смисъл на феноменологичния параметър  $\alpha_3$  може да се изясни чрез сравнението му с анхармоничността на двуфононото ниво  $\epsilon_4(\alpha_3 = 1/8\epsilon_4)$ . Въпреки, че анхармоничността е твърде постоянна, промените в лежащата в основата структура се отчитат чрез зависимостта на стойностите на  $\omega$

$$\omega = \frac{4E(2)}{\epsilon_4} - 2 = \frac{E(2)}{2\alpha_3} - 2 \quad (7.13)$$

от енергиите на първите възбудени  $2^+$  нива, които в отделните слоеве намаляват с растенето на  $N$  (7.2) от стойности  $> 1$  MeV близо до затворените обвивки, до много ниските стойности от порядъка на 100-200 keV за деформираните ротори в средата на слоя. Това допълнително оправдава въвеждането на параметъра  $\omega$  в геометричната част на взаимодействието, което всъщност показва как изследваните ядра преминават през преходните области. Но ефекта от единното описание на ядрата в преходната област беше получен в резултат на определянето на коефициента  $\alpha_3$  пред взаимодействието (7.8), свързано с динамичните аспекти на задачата, като функция на ядрените характеристики, изразени чрез квантовите числа на слоестия модел. Детайлният анализ на феноменологичната формула за него, въпреки съгласуваността си с анхармоничността, показва, че тя е приложима и за някои ротационни ядра с  $\omega = 1$ , като и за някои спектри с вибрационен характер с твърде големи  $\omega > 20$ . Доброто съгласие между експерименталните и теоретично пресметнатите с помощта на (7.8) енергии от спектрите на някои ротационни и вибрационни ядра, ясно предопределят по-натъшното обобщение на нашия подход. Различните типове колективно движение могат да се обединят с помощта на параметъра  $\omega = 1, 2, \dots$  в

израза за нисколежащите ираст енергии на всички четно-четни ядра.

$$E_L = \alpha L(L + \omega) . \quad (7.14)$$

Анализът на тези резултати не само дава по-задълбочено разбиране на възникването и развитието на колективността и деформацията в ядрата, а и нещо повече, води до възможността за обобщаване на твърде сложните и разнообразни взаимодействия за широка област от ядра. Създаването на такова обобщение, което обединява описанието на нисколежащите енергии на всички четно-четни ядра с колективни спектри е от съществен интерес. То, по наше мнение е мостът, който ще свърже наблюдаваните универсални характеристики на ядрените колективни спектри с лежащите в основата им слоеста структура и взаимодействия в атомните ядра.

За да се определят стойностите на  $\omega$ , сравняваме теоретичните отношения

$$R_L = \frac{E_{L+2}}{E_L} = \frac{(L+2)(L+2+\omega)}{L(L+\omega)} , \quad (7.15)$$

за  $L = 2, 4, 6, \dots$  и  $\omega = 1, 2, \dots$  с получените експериментално за всяко от разглежданите ядра. Това дава от една страна началната стойност  $\omega_0$  на параметъра  $\omega$ , при която ще се определя коефициента на взаимодействието  $\alpha$  в (7.14), както и броя на състоянията от дадено ядро, които ще бъдат включени във фитиращата процедура. Ивиците се прекъсват при стойности на  $L$ , за които възниква внезапна промяна на експерименталната стойност на  $\omega$ , която подсказва възникването на фазов преход от типа на backbending в дадената ивица.

### 7.3 Определяне на динамичните коефициенти на взаимодействието

Доброто съвпадение между теоретичните и експериментални резултати в ротационните, вибрационните и преходните ядра, за които целта ни е да бъдат включени като гранични случаи на общото описание на всички четно-четни ядра, определено налага необходимостта да се използва същия [88, 89] набор от квантови числа (7.10) като променливи в универсалната функция  $\alpha\{h_k\}$ , която разглеждаме като динамичен коефициент на обобщеното взаимодействие (7.14) с  $\omega \geq 1$ .

Както в [88] и [89] предполагахме, че параметъра  $\alpha(h_k)$  е полином от втори порядък на променливите (7.10), тъй като отчитаме само едночастични и двучастични взаимодействия. Формулата за динамичния параметър на взаимодействието получаваме, като определяме линейно независимите коефициенти в полинома от втори ред по ядрените характеристики. Константите в този полином са получени като решения на преопределената система от линейни уравнения

$$E_{\text{th}}^i = E_{\text{exp}}^i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (7.16)$$

където  $k = 927$  е броя на разгледаните ираст състояния и

$$E_{\text{th}}^i = \alpha(A_p, A_n, N, F_0, \bar{N}, \bar{F}_0)L(L + \omega) . \quad (7.17)$$

Обобщената формула (7.14) е приложена към 927 нива от основните ивици на 271 ротационни, вибрационни и преходни ядра, принадлежащи на симплектичните мултиплети  $(28, 28|50, 50)_{\pm}$ ,  $(28, 50|50, 82)_{\pm}$ ,  $(50, 50|82, 82)_{\pm}$ ,  $(50, 82|82, 126)_{\pm}$  и  $(82, 126|126, 184)_{\pm}$ . Повечето от ядрата, които не могат да се опишат с това просто обобщение са на границите на слоевете изобразени върху симплектичните мултиплети. Тези ядра са или със затворени протонни или неутронни обвивки или с минимални стойности на  $N$  или  $\bar{N}$ , или максимални стойности на  $|F_0|$  за мултиплета, който разглеждаме. Интерпретацията на този факт, е че направеното феноменологично обобщение на взаимодействията включва само чисто колективни степени на свобода, без да отчита влиянието от едночастичните или квазичастични движения.

Стойностите на  $E_{\text{exp}}^i$  са взети от [92] и [93] и за  $E_{\text{th}}^i$  се използва (7.17) с  $\alpha$  представяваща полином от втори порядък по ядрените характеристики, съдържащ 16 коефициента, които са едни и същи за всичките 271 ядра, тъй като стойностите на функцията  $\alpha$  зависят от квантовите характеристики на всяко ядро. Проблемата се решава чрез минимизация на функцията

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{W^2(E_{\text{th}}^i - E_{\text{exp}}^i)^2}{k - s} , \quad (7.18)$$

където  $k = 927$  е броя на разгледаните ядрени състояния,  $s$  е броя на независимите коефициенти в полинома от втори порядък и  $W$  е диагонална теглова матрица от  $k$ -ти ред. Фитирането се осъществява, като се използва авторегулационен итерационен метод от типа на Gauss-Newton [94]. Минимизиращата процедура е осъществена на две стъпки: (а) със единична теглова матрица  $W = \mathbf{E}$ ; и (б) със  $W = (E_{\text{th}}^i - E_{\text{exp}}^i)^{-1}$ , където  $E_{\text{th}}^i$  са пресметнати със стойности на параметрите  $D_i, i = 1, 2, \dots, 13$  получени от първата стъпка. Втората стъпка (б) се състои в прилагане на процедурата LCH [95]. Това позволява оценката на наследените грешки  $\pm \Delta D_i$  в параметрите  $D_i$ . Крайния резултат е проста формула за енергиите на всички състояния от основните ивици на широка област от четно-четни ядра от 5 главни слоя, като

$$\begin{aligned} \alpha(A_p, A_n, N, F_0, \bar{N}, \bar{F}_0) = & D_1 + D_2 N + D_3 \bar{N} + D_4 F_0 + D_5 \bar{F}_0 \\ & + D_6 N^2 + D_7 \bar{N}^2 + D_8 F_0^2 + D_9 \bar{F}_0^2 + D_{10} N F_0 + D_{11} \bar{N} \bar{F}_0 + D_{12} A_p + D_{13} A_n . \end{aligned} \quad (7.19)$$

Стойностите на параметрите  $D_i, i = 1, 2, \dots, 13$  и техните неопределености  $\pm \Delta D_i$  са дадени в Таблица 7.1.

Трябва да отбележим, че за неопределените стойности на числата  $N_p^{(2)}$  и  $N_n^{(2)}$  в мултиплета  $(82, 126|..., ...)_{\pm}$  се наложи, за да получим добър  $\chi^2$ , да използваме

Таблица 7.1: Параметрите  $D_i$ .

$i$	$D_i$ [MeV]	$\pm \Delta D_i$ [MeV]
1	+0.0261526	0.0001740
2	-0.0009279	0.0000284
3	-0.0021273	0.0000232
4	-0.0323361	0.0001986
5	-0.0302709	0.0001770
6	-0.0000098	0.0000002
7	+0.0000059	0.0000001
8	+0.0009395	0.0000064
9	-0.000730	0.0000049
10	+0.0001599	0.0000013
11	-0.000153	0.0000011
12	+0.001724	0.0000107
13	-0.001318	0.0000064

$N_p^{(2)} = 126$ ,  $N_n^{(2)} = 184$ , предсказани от слоестия модел. Пълното средно квадратично отклонение (rms)  $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^k (E_{\text{th}}^i - E_{\text{exp}}^i)^2 / k}$  ( $k = 927$  е броя на ядрените състояния на 271 ядра) е само 45 keV. Стойността на статистическия критерий  $\chi^2 = 1.0001$  отговаря на решението на задачата получено на втората стъпка. Неговата близост до единица показва, че полученото решение е добро и в статистически смисъл.

Като резултат от използваната числена процедура, началните 16 параметъра в полинома бяха редуцирани до 13. Интересно е да се сравнят формула (7.19) за динамичния коефициент на обобщеното взаимодействие със съответните формули за вибрационните (7.6)

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & B_1 + B_2(N + \bar{N}) + B_3(F_0 + \bar{F}_0) + B_4(4F_0^2 - 3\bar{F}_0^2) \\ & + B_5\bar{N}\bar{F}_0 + B_6A_p + B_7A_n, \end{aligned} \quad (7.20)$$

ротационните (7.7)

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & C_1A_n + C_2(N + \bar{N}) + C_3(F_0 + 0.5\bar{F}_0) \\ & + C_4(N^2 + 0.5\bar{N}^2) + C_5(F_0^2 - \bar{F}_0^2), \end{aligned} \quad (7.21)$$

и преходните ядра (7.8)

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & K_1 + K_2(N + \bar{N}) + K_3(F_0 + \bar{F}_0) + K_4(N^2 - 3\bar{N}^2) \\ & + K_5(F_0^2 - 0.7\bar{F}_0^2) + K_6(NF_0 - 2\bar{N}\bar{F}_0) + K_7A_p + K_8A_n, \end{aligned} \quad (7.22)$$

първоначално разгледани независимо [88,89], където са дадени стойностите на параметрите  $B_i$ , ( $i = 1, \dots, 7$ ),  $C_i$ , ( $i = 1, \dots, 5$ ) и  $K_i$ , ( $i = 1, \dots, 8$ ). Формула (7.19), която дава единно описание на енергиите на основните ивици на всички ядра, съдържа 13 независими коефициента в динамичния параметър на взаимодействието, докато в съответната ѝ формула за основните ивици на ротационните ядра (7.21) има само 5 коефициента, в тази за вибраторите (7.20) - 7 [88] и в случая на преходните ядра (7.22) коефициентите са 8 [89]. Във всички тези подслучаи много внимателно са изследвани корелациите между получените параметри. В обобщението направено тук се работи с огромно количество данни от много широка област от ядра и поради това, за да запазим точността на решението ние считаме всеки ненулев параметър за независим. Полученият в този случай, по-голям брой параметри може да се отдаде на този факт, което прави горния анализ на получената формула и нейното сравнение с предишните частни случаи по - ясно. Във всички случаи (7.19), (7.20) и (7.22) с изключение на ротационния (7.21) има още един свободен параметър, който при описанието на вибрационните енергии е много голям и всъщност това определя и високите им стойности на енергиите във всеки от слоевете.

Квадратичните членове по квантовите числа  $A_p$  и  $A_n$  определящи слоевете, не участват в нито една от формулите. В ротационния случай (7.21) не съществува даже първата степен на числото  $A_p$  на протонния слой, тъй като добре деформираните ядра принадлежат главно на мултиплетите в които валентните неутрони са от по-висок слой от протоните.

Членовете от първи порядък по протонните и неутронни квантови числа  $N(\bar{N})$  и  $F_0(\bar{F}_0)$  се получават както в трите частни случая (7.20),(7.21) и (7.22), така и в общия случай (7.19). В случаите с определена колективност (7.20),(7.21) и (7.22) числата на общият брой на бозоните и дупките имат еднакви коефициенти, отчитайки по този начин дължината на протонните и неутронни слоеве  $1/2[N_p^{(2)} - N_p^{(1)} + (N_n^{(2)} - N_n^{(1)})]$  и в резултат даващи еднакъв принос във всеки от тях. Същото се получава и за членовете зависещи от  $(F_0 + \bar{F}_0)$  в преходния и вибрационния случай, но със зависимост от  $F$ -спина на целия слой  $1/4[N_p^{(2)} - N_p^{(1)} - (N_n^{(2)} - N_n^{(1)})]$ .

Анализът на членовете от втори порядък е важен, тъй като чрез тях се получава зависимост от произведението  $N_\pi N_\nu$ , чийто смисъл и значимост се въвеждат и доказват от Casten [83]. Зависимост от квадрата на общия брой бозони (бозонни дупки)  $N^2(\bar{N}^2)$  се получава във всички случаи с изключение на вибрационния. Квадратичните членове на третата проекция на  $F$ -спина -  $F_0^2$  ( $\bar{F}_0^2$ ) също участват във всеки

от частните случаи, както и в общия, но с много малки стойности на параметрите пред тях. Смесени членове от типа  $NF_0$  и  $\overline{NF}_0$  не се явяват в описанието на добре деформираните ядра (7.21); само дупчестата версия се явява в ядрата близки до сферичните (7.20) и двата члена и то с различни параметри участват в динамичния коефициент на преходните ядра (7.22) и в общия случай. В тези случаи, където тези членове учасват, те допринасят за правилното отразяване на асиметричността на преходите от вибрационни към ротационни ядра и обратния. Такъв принос имат и другите бозонни или дупчести членове с различни коефициенти пред тях, като  $F_0$  и  $\overline{F}_0$ .

$\alpha$  се въвежда като фундаментална характеристика на ядрените спектри, защото:

- чрез определената за нея зависимост от слоевите квантови числа на всяко ядро, се въвежда единно описание на основните ивици на всички четно-четни ядра и то се свързва с микроскопичните характеристики на ядрената система;
- чрез полученото обобщение може да се изследва универсалното поведение на всички типове колективни ядрени спектри.

Таблица 7.2: Таблицата съдържа ядрата от слоя  $(28, 28|50, 50)_-$  изобразен върху нечетното  $\mathcal{H}_-$  ( $N$ -нечетно) подпространство на  $Sp(4, R)$ . Всяко ядро е определено от общия брой валентни бозони  $N$  или бозонни дупки  $\bar{N}$ , които номерират редовете съответно от ляво и от дясно, и третите проекции на  $F$  ( $\bar{F}$ ) спина, които номерират колоните от горе и от долу съответно. След означението на всяко ядро са дадени в скоба стойностите на  $(\omega)$  и броя на състоянията с добро описание на енергиите.

$F_0$						
$N$	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2	-9/2	$\bar{N}$
1	$^{58}\text{Ni}$					21
3	$^{62}\text{Zn}(28), 2$	$^{62}\text{Ni}$				19
5	$^{66}\text{Ge}(26), 2$	$^{66}\text{Zn}(31), 2$	$^{66}\text{Ni}$			17
7	$^{70}\text{Se}(22), 2$	$^{70}\text{Ge}(26), 2$	$^{70}\text{Zn}(21), 2$			15
9	$^{74}\text{Kr}(8), 5$	$^{74}\text{Se}(13), 3$	$^{74}\text{Ge}(13), 2$	$^{74}\text{Zn}$		13
11	$^{78}\text{Sr}(4), 3$	$^{78}\text{Kr}(9), 5$	$^{78}\text{Se}(13), 3$	$^{78}\text{Ge}(13), 2$	$^{78}\text{Zn}$	11
13	$^{82}\text{Zr}(6), 4$	$^{82}\text{Sr}(10), 2$	$^{82}\text{Kr}(15), 3$	$^{82}\text{Se}(14), 2$	$^{82}\text{Ge}$	9
15		$^{86}\text{Zr}(13), 2$	$^{86}\text{Sr}(19), 2$	$^{86}\text{Kr}$		7
17		$^{90}\text{Mo}(15), 2$	$^{90}\text{Zr}$			5
19		$^{94}\text{Ru}$				3
21	$^{98}\text{Cd}$					1
$N$	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	$\bar{N}$
$\overline{F}_0$						

Таблица 7.3: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(28, 28|50, 50)_+$ .

$F_0$					
$N$	0	-1	-2	-3	$\bar{N}$
0	$^{56}\text{Ni}$				22
2	$^{60}\text{Zn}(30), 2$	$^{60}\text{Ni}$			20
4		$^{64}\text{Zn}(30), 2$	$^{64}\text{Ni}$		18
6		$^{68}\text{Ge}(27), 2$	$^{68}\text{Zn}(30), 2$		16
8		$^{72}\text{Se}(18), 2$	$^{72}\text{Ge}(13), 2$	$^{72}\text{Zn}$	14
10		$^{76}\text{Kr}(8), 4$	$^{76}\text{Se}(12), 4$	$^{76}\text{Ge}(13), 2$	12
12		$^{80}\text{Sr}(6), 5$	$^{80}\text{Kr}(11), 3$	$^{80}\text{Se}(19), 2$	10
14		$^{84}\text{Zr}(9), 3$	$^{84}\text{Sr}(14), 3$	$^{84}\text{Kr}(17), 3$	8
16		$^{88}\text{Mo}(15), 2$	$^{88}\text{Zr}(18), 2$	$^{88}\text{Sr}$	6
18			$^{92}\text{Mo}$		4
$N$	0	1	2	3	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$					

Определяйки в общия случай от (7.19),  $\epsilon_4 = 8\alpha$ , получаваме следните средни стойности на константата на анхармоничност (7.12) [91] за разгледаните 271 ядра във всеки от петте главни слоеве

$$\begin{aligned}
(28, 28|50, 50)_\pm - \epsilon_4 &= 172 \pm 46 \text{ keV } 38; \\
(28, 50|50, 82)_\pm - \epsilon_4 &= 156 \pm 47 \text{ keV } 43; \\
(50, 50|82, 82)_\pm - \epsilon_4 &= 167 \pm 59 \text{ keV } 49; \\
(50, 82|82, 126)_\pm - \epsilon_4 &= 101 \pm 36 \text{ keV } 105; \\
(82, 126|126, 184)_\pm - \epsilon_4 &= 57 \pm 9 \text{ keV } 36.
\end{aligned}$$

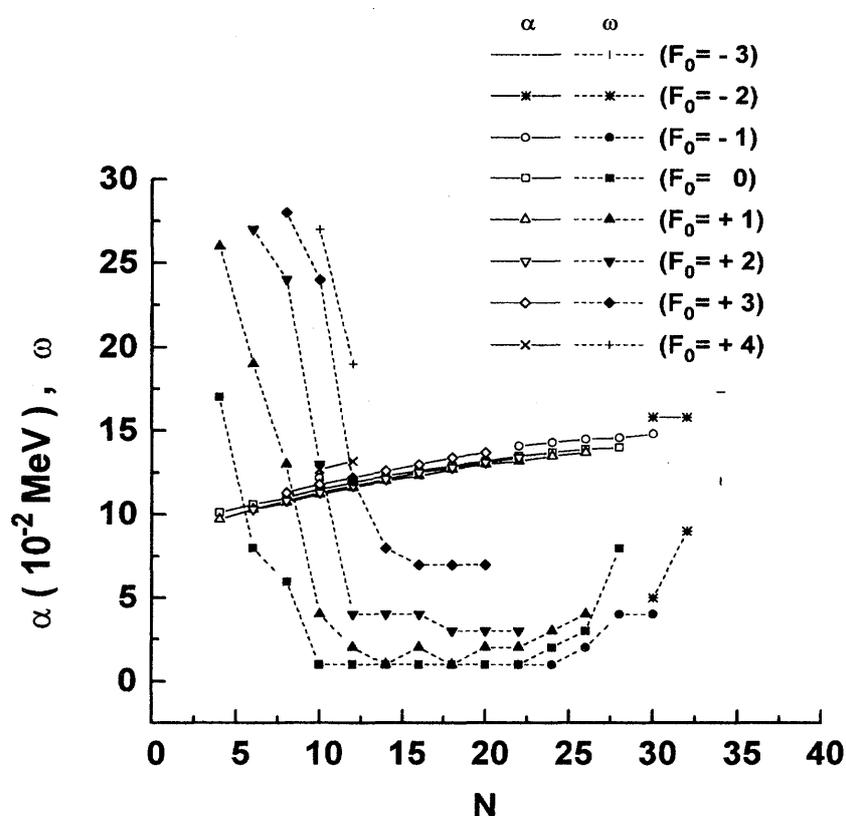
Тези стойности са с около 20% по-малки от получените за преходните ядра, въпреки че тук са включени ротационните и вибрационните ядра. Те са все още в добро съгласие със стойностите получени по метода на най-малките квадрати в [91]. Ще подчертаем още веднъж, че прилагайки формула (7.17) ние определяме точно константата на анхармоничността за всяко ядро, зависеща от 13-те параметъра  $D_i$  от Таблица 7.1 и слоевите му характеристики.

След определянето на  $\alpha$  съвпадението на теорията с експеримента се подобрява още веднъж, като се уточнява началната стойност на  $\omega_0$  с помощта на (7.13) за  $L = 2$ , както това е направено за преходните ядра в [89]. Без да се влошава точността на фитирането, за всяко ядро ние вземаме за  $\omega$  най-близката до получената от (7.13) цяла стойност за него, определена с вече получената стойност на  $\alpha$ . Ние се придържаме към началната идея  $\omega$  да е цяло, поради това, че така взаимодействията приличат на собствени стойности на инварианти на Casimir за някои групи, които в

последствие могат да се разглеждат като групи на динамична симетрия. Стойностите на параметъра  $\omega$  за всяко ядро са дадени в скоби до означението му в Таблицы 7.2 – 7.11.

#### 7.4 Анализ на резултатите

От анализа на стойностите на параметъра  $\alpha$  дадени на Фигура 7.1, може да се види, че въпреки, че те са много близки една до друга, те бавно нарастват с  $N$  в даден  $F_0$ -мултиплет. Във фиксиран  $N$ -мултиплет отклоненията в  $\alpha$  за различните стойности на  $F_0$  са много по слаби и това е случая, когато те могат да се считат почти като константи.



Фигура 7.1: Стойности на динамичния коефициент  $\alpha$  (плътни линии) и на геометричния параметър  $\omega$  (пунктирани линии) като функции на  $N$  при всяка фиксирана стойност на  $F_0$  за мултиплета  $(50, 82|82, 126)_+$ .

Важно е да се отбележи още, че след добавянето на ротационните и вибрационните ядра в обобщението на преходните, което е настоящия случай, не се получава драматична разлика в поведението на константата на взаимодействието  $\alpha$ , за различните типове колективност - ротационна, вибрационна и преходна.

По-нататък е интересно да се изследват промените в стойностите на  $\omega$  в този общ случай в сравнение със частния случай на преходните ядра, където те са въведени

Таблица 7.4: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(28, 50|50, 82)_+$ .

$F_0$						
$N$	0	1	2	3	4	$\bar{N}$
6		$^{90}\text{Kr}(22), 2$	$^{90}\text{Sr}(24), 2$			21
8		$^{94}\text{Sr}(25), 2$	$^{94}\text{Zr}$			19
10	$^{98}\text{Sr}(2), 2$	$^{98}\text{Zr}$	$^{98}\text{Mo}(19), 2$	$^{98}\text{Ru}(17), 3$	$^{98}\text{Pd}$	17
12	$^{102}\text{Zr}(1), 2$	$^{102}\text{Mo}(5), 2$	$^{102}\text{Ru}(11), 3$	$^{102}\text{Pd}(13), 3$	$^{102}\text{Cd}(20), 2$	15
14	$^{106}\text{Mo}(2), 3$	$^{106}\text{Ru}(5), 2$	$^{106}\text{Pd}(12), 3$	$^{106}\text{Cd}(16), 3$		13
16	$^{110}\text{Ru}(3), 4$	$^{110}\text{Pd}(7), 3$	$^{110}\text{Cd}(15), 3$			11
18	$^{114}\text{Pd}(5), 3$	$^{114}\text{Cd}(11), 2$				9
20	$^{118}\text{Cd}(9), 2$				7	
$N$	$-5/2$	$-7/2$	$-9/2$	$-11/2$	$-13/2$	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$						

първоначално. В настоящия случай  $\omega$  има максимални стойности за всичките 35 ядра, описани с помощта на (7.6) като вибрационни. За повечето преходни ядра сега  $\omega$  са по-големи, отколкото когато те бяха разглеждани отделно в [89]. Така че, най-големите стойности на  $\omega$  са получени за ядрата близки до сферичните,

Таблица 7.5: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(28, 50|50, 82)_-$ .

$F_0$									
$N$	$9/2$	$7/2$	$5/2$	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$-5/2$	$\bar{N}$
3				$^{84}\text{Se}$	$^{84}\text{Ge}$				24
5			$^{88}\text{Sr}$	$^{88}\text{Kr}(23), 2$	$^{88}\text{Se}$				22
7		$^{92}\text{Mo}$	$^{92}\text{Zr}$	$^{92}\text{Sr}$	$^{92}\text{Kr}$				20
9	$^{96}\text{Pd}$	$^{96}\text{Ru}$	$^{96}\text{Mo}(21), 2$	$^{96}\text{Zr}$	$^{96}\text{Sr}(21), 2$				18
11	$^{100}\text{Cd}$	$^{100}\text{Pd}(16), 3$	$^{100}\text{Ru}(14), 3$	$^{100}\text{Mo}(12), 2$	$^{100}\text{Zr}(3), 2$	$^{100}\text{Sr}(1), 2$			16
13	$^{104}\text{Sn}$	$^{104}\text{Cd}(16), 3$	$^{104}\text{Pd}(14), 4$	$^{104}\text{Ru}(7), 4$	$^{104}\text{Mo}(2), 2$				14
15		$^{108}\text{Sn}$	$^{108}\text{Cd}(15), 2$	$^{108}\text{Pd}(9), 3$	$^{108}\text{Ru}(4), 2$	$^{108}\text{Mo}$			12
17			$^{112}\text{Sn}$	$^{112}\text{Cd}(13), 2$	$^{112}\text{Pd}(6), 2$	$^{112}\text{Ru}(3), 2$			10
19				$^{116}\text{Sn}$	$^{116}\text{Cd}(10), 2$	$^{116}\text{Pd}(5), 2$			8
21					$^{120}\text{Sn}$	$^{120}\text{Cd}(8), 2$			6
23						$^{124}\text{Sn}$	$^{124}\text{Cd}$		4
25							$^{128}\text{Sn}$		2
27								$^{132}\text{Sn}$	0
$N$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	0	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$									

разглеждани като вибрационни в [88] или в преходните ядра, които са близо до тях. Те са разположени предимно в горните граници на мултиплетите и по близките до тях диагонали. Това са ядрата с най-малките стойности на  $N$  и най-големите стойности на  $\bar{N}$ . Това нарастване на стойностите на  $\omega$  в общия случай е причината за намаляването на стойностите на  $\alpha$  във всеки слой, но трябва да се отбележи, че за ядра, за които стойността на  $\omega$  се е запазила като в разглежданите частни случаи, като повечето ротационни ядра и някои преходни, се получават еднакви стойности на  $\alpha$  при определянето ѝ с формули (7.17) и (7.21) или (7.22).

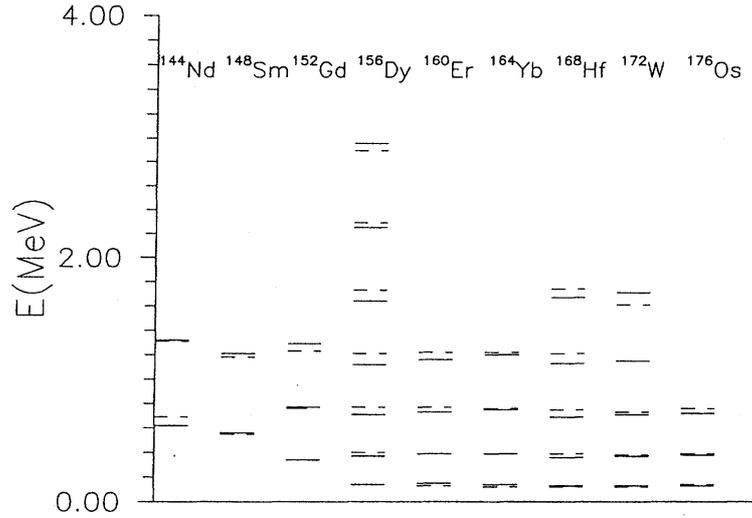
Изобщо във всеки от  $F_0$ -мултиплетите (колониите в таблиците)  $\omega$  започва с най-високата си стойност, постепенно намалява с нарастването на  $N$  и после отново по-бавно се повишава, но не до такива високи стойности като в началото (виж Фигура 7.1). Очевидно е, че стойностите на  $\omega$  следват поведението на енергиите  $E_2$  на  $2^+$  състоянията [85] и отразяват асиметрията в двете половини на  $F_0$ -мултиплетите.

В по-леките слоеве, където ротационни ядра все още не се наблюдават, мултиплетите са по-къси и промените в  $\omega$  са по-стръмни. Повечето от ротационните ядра са в по-тежките слоеве  $(50, 82|82, 126)_\pm$  и  $(82, 126|126, 184)_\pm$ . Разглеждайки ги в рамките на общата схема, някои от тях от областта на редките земи се описват по-добре с малко по-големи стойности на  $\omega = 2, 3$ . В [88] са описани като ротационни 70 ядра, а в общия случай представен тук с  $\omega = 1$  са само 49 от тях.

В  $(50, 82|82, 126)_\pm$  слоя, в средата на  $F_0$ -мултиплетите се наблюдават серии от ядра с почти равни или много близки стойности на  $\omega$ . Това са така наречените области

Таблица 7.6: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(50, 50|82, 82)_-$ .

		$F_0$							
$N$	$-1/2$	$-3/2$	$-5/2$	$-7/2$	$-9/2$	$-11/2$	$-13/2$	$-15/2$	$\bar{N}$
3	$^{106}\text{Te}$	$^{106}\text{Sn}$							29
5	$^{110}\text{Xe}$	$^{110}\text{Te}$	$^{110}\text{Sn}$						27
7		$^{114}\text{Xe}$	$^{114}\text{Te}(18), 2$	$^{114}\text{Sn}$					25
9			$^{118}\text{Xe}(6), 4$	$^{118}\text{Te}(15)$	$^{118}\text{Sn}$				23
11			$^{122}\text{Ba}(3), 4$	$^{122}\text{Xe}(7), 4$	$^{122}\text{Te}(13), 2$	$^{122}\text{Sn}$			21
13			$^{126}\text{Ce}$	$^{126}\text{Ba}(5), 5$	$^{126}\text{Xe}(8), 4$	$^{126}\text{Te}(16), 2$	$^{126}\text{Sn}$		19
15			$^{130}\text{Nd}(1), 3$	$^{130}\text{Ce}(4), 4$	$^{130}\text{Ba}(7), 4$	$^{130}\text{Xe}(11), 3$	$^{130}\text{Te}(19), 2$	$^{130}\text{Sn}$	17
17			$^{134}\text{Sm}$	$^{134}\text{Nd}(5), 3$	$^{134}\text{Ce}(8), 3$	$^{134}\text{Ba}(12), 2$	$^{134}\text{Xe}(19), 2$	$^{134}\text{Te}$	15
19			$^{138}\text{Gd}$	$^{138}\text{Sm}(6), 3$	$^{138}\text{Nd}(9), 4$	$^{138}\text{Ce}(16), 2$	$^{138}\text{Ba}$		13
21				$^{142}\text{Gd}(8), 3$	$^{142}\text{Sm}(14), 2$	$^{142}\text{Nd}$			11
23				$^{146}\text{Dy}(11), 2$		$^{146}\text{Gd}$			9
25				$^{150}\text{Er}$					7
27				$^{154}\text{Hf}$					5
$N$	$1/2$	$3/2$	$5/2$	$7/2$	$9/2$	$11/2$	$13/2$	$15/2$	$\bar{N}$
		$\bar{F}_0$							



Фигура 7.2: Сравнение на теоретичните  $E_{th}$  (плътни линии) и експерименталните  $E_{exp}$  (пунктирани линии) стойности на енергиите на ядрата, принадлежащи на  $F_0 = 2$  колоната на мултиплета  $(50, 82|82, 126)_+$ .

на наситена колективност ( $\omega \sim 3$ ) или деформация ( $\omega = 1$ ). Очевидно, ядрата от тези области на  $F_0$ -мултиплетите имат много подобни ираст ивици, които могат да се разглеждат в някои случаи и като идентични. Следвайки откриването на идентични ивици [96] в областта на супердеформациите и тяхното установяване сред “нормалните” [97] ивици, ние специално локализирахме в симплектичните мултиплети на класификационната схема, най-интересните от тях [98].

Таблица 7.7: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(50, 50|82, 82)_+$ .

		$F_0$								
$N$		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	$\bar{N}$
2	$^{104}\text{Sn}$									30
4			$^{108}\text{Sn}$							28
6			$^{112}\text{Te}(17), 2$	$^{112}\text{Sn}$						26
8			$^{116}\text{Xe}(8), 2$	$^{116}\text{Te}(16), 2$	$^{116}\text{Sn}$					24
10			$^{120}\text{Ba}(2), 2$	$^{120}\text{Xe}(6), 2$	$^{120}\text{Te}(13), 2$	$^{120}\text{Sn}$				22
12			$^{124}\text{Ce}$	$^{124}\text{Ba}(4), 4$	$^{124}\text{Xe}(7), 5$	$^{124}\text{Te}(14), 2$	$^{124}\text{Sn}$			20
14			$^{128}\text{Nd}(1), 3$	$^{128}\text{Ce}(3), 3$	$^{128}\text{Ba}(5), 5$	$^{128}\text{Xe}(9), 3$	$^{128}\text{Te}(18), 2$	$^{128}\text{Sn}$		18
16			$^{132}\text{Sm}$	$^{132}\text{Nd}(4), 2$	$^{132}\text{Ce}(6), 4$	$^{132}\text{Ba}(9), 3$	$^{132}\text{Xe}(14), 2$	$^{132}\text{Te}$	$^{132}\text{Sn}$	16
18				$^{136}\text{Sm}$	$^{136}\text{Nd}(6), 4$	$^{136}\text{Ce}(11), 3$	$^{136}\text{Ba}(18), 2$	$^{136}\text{Xe}$		14
20				$^{140}\text{Gd}$	$^{140}\text{Sm}(9)$	$^{140}\text{Nd}(15), 2$	$^{140}\text{Ce}$			12
22				$^{144}\text{Dy}$	$^{144}\text{Gd}(13), 2$		$^{144}\text{Sm}$			10
24				$^{148}\text{Er}(10), 2$	$^{148}\text{Dy}$					8
26				$^{152}\text{Yb}$						6
$N$		1	2	3	4	5	6	7	-8	$\bar{N}$
		$\bar{F}_0$								

Таблица 7.8: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(50, 82|82, 126)_+$ .

$F_0$										
$N$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	$\bar{N}$
0						$^{132}\text{Sn}$				38
2					$^{136}\text{Xe}$	$^{136}\text{Te}$				36
4				$^{140}\text{Ce}$	$^{140}\text{Ba}(26), 2$	$^{140}\text{Xe}(17), 2$				34
6			$^{144}\text{Sm}$	$^{144}\text{Nd}(27), 2$	$^{144}\text{Ce}(19), 3$	$^{144}\text{Ba}(8), 4$	$^{144}\text{Xe}$			32
8		$^{148}\text{Dy}$	$^{148}\text{Gd}(28), 2$	$^{148}\text{Sm}(24), 2$	$^{148}\text{Nd}(13), 3$	$^{148}\text{Ce}(6), 3$	$^{148}\text{Ba}$			30
10	$^{152}\text{Yb}$	$^{152}\text{Er}(27), 2$	$^{152}\text{Dy}(24), 2$	$^{152}\text{Gd}(13), 3$	$^{152}\text{Sm}(4), 7$	$^{152}\text{Nd}(1), 4$	$^{152}\text{Ce}(1), 2$			28
12	$^{156}\text{Hf}$	$^{156}\text{Yb}(19), 2$	$^{156}\text{Er}(12), 5$	$^{156}\text{Dy}(4), 7$	$^{156}\text{Gd}(2), 7$	$^{156}\text{Sm}(1), 4$	$^{156}\text{Sn}$			26
14	$^{160}\text{W}$	$^{160}\text{Hf}$	$^{160}\text{Yb}(8), 4$	$^{160}\text{Er}(4), 4$	$^{160}\text{Dy}(1), 5$	$^{160}\text{Gd}(1), 4$				24
16	$^{164}\text{Os}$	$^{164}\text{W}$	$^{164}\text{Hf}(7), 4$	$^{164}\text{Yb}(4), 4$	$^{164}\text{Er}(1), 5$	$^{164}\text{Dy}(1), 5$				22
18	$^{168}\text{Pt}$	$^{168}\text{Os}$	$^{168}\text{W}(7), 4$	$^{168}\text{Hf}(3), 5$	$^{168}\text{Yb}(1), 6$	$^{168}\text{Er}(1), 5$	$^{168}\text{Dy}$			20
20		$^{172}\text{Pt}$	$^{172}\text{Os}(7), 4$	$^{172}\text{W}(3), 5$	$^{172}\text{Hf}(2), 6$	$^{172}\text{Yb}(1), 6$	$^{172}\text{Er}$			18
22			$^{176}\text{Pt}$	$^{176}\text{Os}(3), 5$	$^{176}\text{W}(2), 6$	$^{176}\text{Hf}(1), 5$	$^{176}\text{Yb}(1), 5$			16
24			$^{180}\text{Hg}$	$^{180}\text{Pt}$	$^{180}\text{Os}(3), 5$	$^{180}\text{W}(2), 5$	$^{180}\text{Hf}(1), 4$			14
26			$^{184}\text{Pb}$	$^{184}\text{Hg}$	$^{184}\text{Pt}(4), 4$	$^{184}\text{Os}(3), 6$	$^{184}\text{W}(3), 5$	$^{184}\text{Hf}$		12
28				$^{188}\text{Pb}$	$^{188}\text{Hg}$	$^{188}\text{Pt}(8), 5$	$^{188}\text{Os}(4), 3$	$^{188}\text{W}$		10
30					$^{192}\text{Pb}$	$^{192}\text{Hg}$	$^{192}\text{Pt}(9), 2$	$^{192}\text{Os}(5), 4$		8
32						$^{196}\text{Pb}$	$^{196}\text{Hg}$	$^{196}\text{Pt}(9), 3$	$^{196}\text{Os}$	6
34							$^{200}\text{Pb}$	$^{200}\text{Hg}$	$^{200}\text{Pt}(12), 2$	4
36								$^{204}\text{Pb}$	$^{200}\text{Hg}$	2
38									$^{208}\text{Pb}$	0
$N$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$										

Таблица 7.9: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(50, 82|82, 126)_-$ .

$F_0$											
$N$	11/2	9/2	7/2	5/2	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2	$\bar{N}$
1						$^{134}\text{Te}$	$^{134}\text{Sn}$				37
3					$^{138}\text{Ba}$	$^{138}\text{Xe}(27), 2$	$^{138}\text{Te}$				35
5				$^{142}\text{Nd}$	$^{142}\text{Ce}(30), 2$	$^{142}\text{Ba}(16), 2$	$^{142}\text{Xe}$				33
7			$^{146}\text{Gd}$	$^{146}\text{Sm}(28), 2$	$^{146}\text{Nd}(20), 2$	$^{146}\text{Ce}(11), 2$	$^{146}\text{Ba}(7), 3$				31
9		$^{150}\text{Er}$	$^{150}\text{Dy}(27), 2$	$^{150}\text{Gd}(26), 2$	$^{150}\text{Sm}(13), 5$	$^{150}\text{Nd}(4), 4$	$^{150}\text{Ce}(3), 4$				29
11	$^{154}\text{Hf}$	$^{154}\text{Yb}$	$^{154}\text{Er}(21), 2$	$^{154}\text{Dy}(12), 4$	$^{154}\text{Gd}(4), 7$	$^{154}\text{Sm}(1), 6$	$^{154}\text{Nd}(1), 4$				27
13	$^{158}\text{W}$	$^{158}\text{Hf}$	$^{158}\text{Yb}(12), 4$	$^{158}\text{Er}(7), 4$	$^{158}\text{Dy}(2), 5$	$^{158}\text{Gd}(1), 6$	$^{158}\text{Sm}(1), 4$				25
15		$^{162}\text{W}$	$^{162}\text{Hf}(10), 4$	$^{162}\text{Yb}(6), 4$	$^{162}\text{Er}(3), 5$	$^{162}\text{Dy}(1), 7$	$^{162}\text{Gd}$				23
17		$^{166}\text{Os}$	$^{166}\text{W}$	$^{166}\text{Hf}(5), 5$	$^{166}\text{Yb}(2), 6$	$^{166}\text{Er}(1), 5$	$^{166}\text{Dy}(1), 2$				21
19		$^{170}\text{Pt}$	$^{170}\text{Os}$	$^{170}\text{W}(4), 4$	$^{170}\text{Hf}(2), 6$	$^{170}\text{Yb}(1), 7$	$^{170}\text{Er}(1), 5$				19
21			$^{174}\text{Pt}$	$^{174}\text{Os}(4), 3$	$^{174}\text{W}(3), 5$	$^{174}\text{Hf}(1), 6$	$^{174}\text{Yb}(1), 4$				17
23			$^{178}\text{Hg}$	$^{178}\text{Pt}$	$^{178}\text{Os}(3), 5$	$^{178}\text{W}(2), 6$	$^{178}\text{Hf}(1), 6$	$^{178}\text{Yb}$			15
25				$^{182}\text{Hg}$	$^{182}\text{Pt}(4), 4$	$^{182}\text{Os}(3), 4$	$^{182}\text{W}(2), 4$	$^{182}\text{Hf}(1), 4$			13
27				$^{186}\text{Pb}$	$^{186}\text{Hg}$	$^{186}\text{Pt}(5), 4$	$^{186}\text{Os}(3), 3$	$^{186}\text{W}(3), 4$			11
29					$^{190}\text{Pb}$	$^{190}\text{Hg}$	$^{190}\text{Pt}(9), 3$	$^{190}\text{Os}(5), 3$	$^{190}\text{W}$		9
31						$^{194}\text{Pb}$	$^{194}\text{Hg}$	$^{194}\text{Pt}(9), 3$	$^{194}\text{Os}(5), 2$		7
33							$^{198}\text{Pb}$	$^{198}\text{Hg}$	$^{198}\text{Pt}(11), 3$		5
35								$^{202}\text{Pb}$	$^{202}\text{Hg}$		3
37									$^{206}\text{Pb}$	$^{206}\text{Hg}$	1
$N$	-17/2	-15/2	-13/2	-11/2	-9/2	-7/2	-5/2	-3/2	-1/2	1/2	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$											

Четно-четните ядра, с много близки енергии на преходите в основните ивици, принадлежат предимно на едни и същи  $F_0$ -мултиплети и имат еднакви или много близки стойности на  $\omega$ . Хубав пример са това е дадената в [98] серия от ядра  $^{156}\text{Dy}$  ( $\omega=4$ ),  $^{160}\text{Er}$  ( $\omega=4$ ),  $^{164}\text{Yb}$  ( $\omega=4$ ),  $^{168}\text{Hf}$  ( $\omega=3$ ),  $^{172}\text{W}$  ( $\omega=3$ ) и  $^{180}\text{Os}$  ( $\omega=3$ ). Първите 5 от тях принадлежат на мултиплета с  $F_0 = 2$  от слоя (50, 82|82, 126) с  $N = 12, 14, 16, 18, 20$ , съответно. Последното  $^{180}\text{Os}$  е от  $F_0 = 1$  с  $N = 24$  и може да се замени с ядрото  $^{176}\text{Os}$  ( $\omega=3$ ,  $F_0 = 2$ ,  $N = 22$ ), без да се развалят характеристиките определящи идентичността на ивиците. Сравнението, между теоретично определените с помощта на (7.17) и експерименталните енергии за  $F_0 = 2$  колоната от (50, 82|82, 126)<sub>+</sub> мултиплета (Таблица 7.8) е представено на Фигура 7.2. Съгласието на нашите резултати с експерименталните данни е много добро за всички ядра и е много лесно да се забележат тези, които имат идентични ивици. Като притежаващи такива, могат да се разглеждат всички ядра от един и същи  $F_0$  мултиплет (колона) на Таблиците 7.2 – 7.11 с еднакви стойности на  $\omega$ .

С помощта на тези стойности на  $\omega$  и коефициента на взаимодействието  $\alpha$  в (7.17) се получава добро теоретично описание на различен брой нисколежащи състояния в различните ядра. Броя на описаните състояния е даден до стойностите на  $\omega$  в Таблиците 7.2 – 7.11. Най-високи стойности за  $L$  са получени при описанието на ротационните ядра и тези близо до тях в последните два слоя.

В резултат на направеното обобщение на взаимодействията с помощта на параметъра  $\omega$  ние успяхме да включим в разглежданията си и да опишем 12 ядра повече, отколкото бяха описани в трите отделни случаи - вибрационни - 35, ротационни - 70 и преходни - 159. Те се намират предимно по границите на леките мултиплети и по-този начин бяха разширени границите на приложимост на модела.

Това още веднъж доказва, че симплектичната класификационна схема, която е в основата на направеното разглеждане е много богата на възможности за изследване на съществуващите общи характеристики, както и на специфичните особености в колективните спектри на четно-четните ядра.

В заключение, като резултат от изследването им в рамките на симплектичната класификационна схема, се наблюдава гладко периодично поведение на експерименталните енергии от основните ивици на четно-четните ядра. Това позволява обобщаване на колективното взаимодействие, без да се въвеждат никакви детайли за участващите ядрени сили. Използваните за класификацията квантови числа, разкриват важността на ядрените слоести характеристики при описанието на колективните явления. Това дава възможност за единно описание на ядрените спектри, като се определи зависимостта на параметъра на взаимодействието от слоестите квантови числа, определени в (7.10). Въпреки, че получените резултати са много прости и лесни за прилагане, те са същевременно достатъчно общи за да покрият твърде

Таблица 7.10: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(82, 126|126, 184)_-$ .

$F_0$							
$N$	3/2	1/2	-1/2	-3/2	-5/2	-7/2	$\bar{N}$
1		$^{210}\text{Po}$	$^{210}\text{Pb}$				50
3	$^{214}\text{Ra}$	$^{214}\text{Rn}$	$^{214}\text{Po}$	$^{214}\text{Pb}$			48
5	$^{218}\text{Th}$	$^{218}\text{Ra}(19), 2$	$^{218}\text{Rn}(18), 2$	$^{218}\text{Po}$			46
7	$^{222}\text{U}(22), 2$	$^{222}\text{Th}(9), 4$	$^{222}\text{Ra}(5), 2$	$^{222}\text{Rn}(1), 2$			44
9		$^{226}\text{U}$	$^{226}\text{Th}(3), 3$	$^{226}\text{Ra}(3), 2$	$^{226}\text{Rn}$		42
11			$^{230}\text{U}(1), 8$	$^{230}\text{Th}(2), 5$	$^{230}\text{Ra}$		40
13			$^{234}\text{Pu}$	$^{234}\text{U}(1), 6$	$^{234}\text{Th}(2), 4$		38
15			$^{238}\text{Cm}$	$^{238}\text{Pu}(1), 6$	$^{238}\text{U}(1), 6$		36
17		$^{242}\text{Fm}$	$^{242}\text{Cf}$	$^{242}\text{Cm}(1), 3$	$^{242}\text{Pu}(1), 6$	$^{242}\text{U}(2)$	34
19			$^{246}\text{Fm}$	$^{246}\text{Cf}$	$^{246}\text{cm}(1), 4$	$^{246}\text{Pu}(1), 2$	32
21			$^{250}\text{No}$	$^{250}\text{Fm}$	$^{250}\text{Cf}(1), 4$	$^{250}\text{Cm}$	30
23				$^{254}\text{No}$	$^{58}\text{Fm}(1), 2$	$^{254}\text{Cf}$	28
25					$^{258}\text{No}$	$^{258}\text{Fm}$	26
$N$	-5	-4	-3	-2	-1	0	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$							

широка област от ядра и различни типове колективност. Анализирайки ги, може да се изясни физиката която е в основата на ядрената структура. Този подход може да доведе до установяване на връзките между феноменологичните моделни параметри на колективните степени на свобода и тяхната микроскопична зависимост от

Таблица 7.11: Също като в Таблица 7.2 за слоя  $(82, 126|126, 184)_+$ .

$F_0$						
$N$	1	0	-1	-2	-3	$\bar{N}$
2	$^{212}\text{Rn}$	$^{212}\text{Po}$				49
4	$^{216}\text{Ra}$	$^{216}\text{Rn}$				47
6		$^{220}\text{Ra}(9), 2$	$^{220}\text{Rn}(14), 2$			45
8		$^{224}\text{Th}(5), 2$	$^{224}\text{Ra}(4), 3$			43
10			$^{228}\text{Th}(2), 5$	$^{228}\text{Ra}(2), 3$		41
12			$^{232}\text{U}(1), 7$	$^{232}\text{Th}(1), 8$		39
14			$^{236}\text{Pu}(1), 7$	$^{236}\text{U}(1), 6$		37
16				$^{240}\text{Pu}(1), 7$	$^{240}\text{U}(1), 2$	35
18			$^{244}\text{Cf}$	$^{244}\text{Cm}(1), 4$	$^{244}\text{Pu}(1), 6$	33
20				$^{248}\text{Cf}$	$^{248}\text{Cm}(1), 9$	31
22				$^{252}\text{Fm}$	$^{252}\text{Cf}(1), 2$	29
24					$^{256}\text{Fm}(2), 4$	27
$N$	-9/2	-7/2	-5/2	-3/2	-1/2	$\bar{N}$
$\bar{F}_0$						

квантовите числа на слоестия модел. По фундаментално разбиране на различните типове колективност е възможно да се постигне чрез определяне на групите на динамична симетрия, зависещи от въведения в геометричната част на взаимодействието параметър  $\omega$ .

## 8. Определяне на ядрените маси като функция на параметъра $P$ и $F$ -спина в слоя с $Z=28-50$ , $N=28-50$

Ядрените маси са една от най-важните компоненти при изчисляването на ядрения синтез на изобилие от елементи при специфични звездни сценарии. Счита се, че богатите на протони ядра от областта  $A = 80$  се създават в гр-процесите, в които участват голямо количество неизвестни ядра. За дълги години изучаването на атомните маси се е основавало на различни систематики, които водят до извеждането на масови формули включващи различни физически характеристики. Както изяснихме в предишната Глава 7 [A8, B6, B7, B8] такива систематики са успешни, ако се основават на такива ядрени характеристики, като функции на които, изучаваните наблюдаеми показват единно и гладко поведение [99]. Много от тези наблюдаеми, свързани с ядрените възбуждания [83, 85] се държат по този начин, когато са представени като функции на величини характеризиращи валентното пространство на разглежданите ядра. Това е съвсем естествено, тъй като валентните частици в даден ядрен слой предопределят колективното поведение на ядрото.

В двете цитирани по-горе систематики, класификационните квантови числа, които се използват са функции на броя на валентните протонни  $N_p$  и неутронни  $N_n$  двойки (бозони). Първата [83] е създадена чрез въвеждането на параметъра

$$P = \frac{N_p N_n}{N_p + N_n}, \quad (8.1)$$

където  $N_p = 2N_\pi$  и  $N_n = 2N_\nu$ . Тази ядрена характеристика (8.1) очевидно има смисъл на интегрирано валентно протон-неутронно взаимодействие на отделен валентен нуклон.

Успешната систематика, представена в Глава 7 и [85] на ираст енергиите в [A8] се основава на въвеждането на мултиплетите на  $F$ -спина [100], действащи в пространствата на бозонните представяния на некомпактната  $Sp(4, R)$  [6]. Физическата интерпретация на въведените алгебрични оператори и в двете класификации е свързана с добре известната протон-неутронна версия на модела на взаимодействащите бозони /IBM/-2 [86, 87]. Важно предимство при използването и на двете систематики е тяхната способност да предсказват чрез интерполация неизвестни още данни за ядрената структура. Тяхното успешно приложение при описанието на разнообразни ядрени наблюдаеми и тяхните възможности за предсказване поставят въпроса за

тяхното сравняване и установяването на съществуващата връзка между тях.

Тук целта ни е да изследваме тази връзка в едно общо подходящо приложение, като използваме получената чрез тях информация за ядрената структура, заедно с възможността да се извлече от тази информация единно, обобщено описание на разглежданите ядрени свойства.

В тази връзка, интереса ни е насочен към една важна компонента на ядрените маси, наречена “полумпирична микроскопична маса” (означена като  $/SEM/(semiempirical microscopic mass)$ )

$$SEM = M_{\text{exp}} - M_{\text{macr}}, \quad (8.2)$$

получена чрез изваждане на пресметнатите [101] сферични макроскопични  $M_{\text{macr}}$  от експерименталните  $M_{\text{exp}}$  [102] маси. Независимата от структурата макроскопична част  $M_{\text{macr}}$  се определя явно за сферичната форма като зависи от масовото число  $A$ , броя на неуроните  $N$ , или протоните,  $Z$ , на разглежданото ядро. Очевидно остатъчната микроскопична част -  $SEM$  (8.2) на ядрените маси съдържа информацията за зависимостта от структурата и деформацията, която може да се изследва най-добре в рамките на споменатите систематики, свързани с валентните ядрени слоеве. Такова изследване е направено в [103] за областите  $Z = 84 - 104$  с  $N > 128$  и  $Z = 52 - 66$  с  $N = 84 - 104$ . Ние се насочваме към областта от ядра с  $A$  около 80, която напоследък е от голям интерес при изучаването на ядрената структура и процесите на нуклеонния синтез в астрофизиката [104].

### 8.1 Връзка между $P$ и $F_0$ като класификационни параметри

Тук ще използваме отново алгебричния подход, който е в основата на класификационната схема разработена в [A8]. С помощта на този подход бяха успешно обобщени наблюдаваните закономерности в експерименталните данни по нисколежащата част на спектъра [100] на четно-четните ядра с фиксиран брой бозони (7.2)  $N_t = N_\pi + N_\nu$ , чрез въвеждане на понятието за  $F$ -спин мултиплет. Влагането на  $F$ -спин мултиплетите в представянията на по-широката динамична група  $Sp(4, R)$  [6, 105] е същността на класификацията на всички четно-четни ядра от даден главен слой. Така е въведено и понятието класификационна група, като съдържаща разглежданите ядрени характеристики на всички класифицирани ядра. Редукцията на бозонните представяния на класификационната група  $Sp(4, R)$  до компактната  $U(2)$  и на компактната  $U(1, 1)$  подгрупа [6] (7.2) дава математическата основа на класификацията. Тя се реализира чрез операторите  $N_t$  (7.2), който е и първия инвариант на  $u(2)$ , и оператора  $F_0 = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu)$  (7.3), който не се отличава съществено от оператора на Casimir от първи порядък за  $u(1, 1)$ .

Връзката между алгебричните оператори използвани в класификационната схема и ядрените характеристики във валентния слой се определя от съотношенията (7.4)  $N_\pi = \frac{1}{2}(N_p - N_p^{\text{mag}})$  и  $N_\nu = \frac{1}{2}(N_n - N_n^{\text{mag}})$ , които дефинират броя на протонните и неутронни валентни двойки (бозони) за ядрата от даден слой. В резултат  $N_t$  и  $F_0$  са точно операторите осъществяващи редукциите в пространствата на  $sp(4, R)$  и тяхната интерпретация отговаря на тази от МВБ-2 [86,87], като оператора на пълния брой валентни бозони и трета проекция на  $F$ -спина съответно. В Глава 7 ядрата принадлежащи на главните ядрени слоеве определени чрез ограничаващите ги магически числа  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)} | N_p^{(2)}, N_n^{(2)})_+$  ако  $N_t$  е четно и с  $(N_p^{(1)}, N_n^{(1)} | N_p^{(2)}, N_n^{(2)})_-$  ако  $N_t$  е нечетно, като  $(N_p^{(2)} > N_p^{(1)}$  и  $N_n^{(2)} > N_n^{(1)})$  са класифицирани в два  $Sp(4, R)$ -мултиплета  $\mathcal{H}_+$  или  $\mathcal{H}_-$ , определени от  $N_t$  четно или нечетно.

### 8.1.1 Включване на ядра с нечетно $A$

Тук ние ще направим обобщение на класификационната схема, като въведем възможността собствените стойности на редукционните оператори (7.2), (7.3) да допускат и разглеждането на ядра различаващи се и само с един нуклон. Това включва разглеждането на фермионни степени на свобода, което разширява симплектичните пространства  $\mathcal{H}$  да включват и ядра с нечетно  $A$ . В това се състои възможното от алгебрична гледна точка суперсиметрично разширение на симплектичната алгебра и съответства на направеното такова [106] за протон-неутронната версия на МВБ. Съществуването на такива суперсиметрични  $N_{st}$ - мултиплети ( $N_{st} = \frac{k}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$ ) в областта с  $A = 130$  е изследвана при нисколежащата част на колективните спектри [107]. Полуцелите стойности на  $N_{st}$  отговаряят на нечетен брой протони или неутрони и отчитат въвеждането на единични фермиони в класификацията на ядрата. Тук се използва това обобщение, за да се разгледат всички ядра принадлежащи на даден главен слой определен от  $Sp(4, R)$ -мултиплетите. В обобщената класификационна схема, всички ядра с четно и нечетно  $A$  се определят по същия начин от стойностите на квантовите числа  $N_{st}$  и третата проекция на  $F$ -спина ( $F = \frac{N_{st}}{2}$ )  $F_{s_0} = -F, -F + \frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \dots, F - \frac{1}{4}, F$ . Стойностите на  $N_{st}$  и  $F_{s_0}$  определят вектори в тези разширени пространства отговарящи на всички четно-четни, нечетно-четни, четно-нечетни и нечетни-нечетни ядра.  $F_{s_0}$  мултиплетите от главния слой (28, 28|50, 50) образувани по този начин са обект на настоящото изследване. Това е симетричен слой и с помощта на (7.4), се вижда,  $F_{s_0} = \frac{1}{2}T$ , където  $T$  е изоспина на ядрената система и  $N_{st} = \frac{1}{2}(A - A^{(1)})$  където  $A$  е масовото число на всяко от разглежданите ядра, а  $A^{(1)}$  е това на магическото ядро в началото на слоя. По нататък няма да пишем имдекса  $s$ , означаващ суперсиметричното разширение на класификационните оператори като ще се подразбира, че операторите  $N_\sigma$ ,  $\sigma = p, n$  вземат четни и нечетни стойности.

### 8.1.2 Отчитане на частици и дупки

Сега трябва да отбележим, че ако броим само частици от началото до края на слоя,  $F$ -spin мултиплетите са два пъти по-дълги, отколкото в МВБ, където се броят частици само до средата на слоя и после се броят дупки. Освен това по този начин всяка клетка от класификационните схеми съответства на определено ядро и е еднозначно дефинирана. Но при пресмятането на параметъра  $P$  (8.1), който е свързан с протон-неутронното ядрено взаимодействие е по-удобно от физическа гледна точка да се отчитат частици и дупки. Така както в МВБ частиците  $N_{\bar{p}} = 2N_{\pi}$  и  $N_{\bar{n}} = 2N_{\nu}$  (7.4) се броят до средата на протонния и неутронни слоеве, дефинирани като :

$$K_p = \frac{1}{2}(Z^{(2)} - Z^{(1)}) \quad K_n = \frac{1}{2}(N^{(2)} - N^{(1)}). \quad (8.3)$$

След средата на слоя  $N_{\bar{p}} > K_p$  и/или  $N_{\bar{n}} > K_n$ , въвеждаме дупки, които се броят по следния начин:

$$\begin{aligned} N_{\underline{p}} &= 2N_{\pi} = 2K_p - N_{\bar{p}}; N_{\bar{p}} > K_p \\ N_{\underline{n}} &= 2N_{\nu} = 2K_n - N_{\bar{n}}; N_{\bar{n}} > K_n \end{aligned} \quad (8.4)$$

Тук и понататък частиците означаваме с тире над индекса за вида им  $\bar{\rho} = \bar{p}, \bar{n}$ , а дупките с тире под него  $\underline{\rho} = \underline{p}, \underline{n}$ . Броят на дупките в протонните и неутронни слоеве (8.4) е изразен чрез броя на частиците  $N_{\bar{p}}, N_{\bar{n}}$  (7.4) и съответните размери на слоя  $2K_p, 2K_n$  (8.3), което дава възможност да се получат класификационните числа в двата подхода в термини само на частици или на частици и дупки. Въвеждането на частично-дупчеста интерпретация в класификационната схема налага физически ограничения за размерностите на слоевете, върху безкрайномерните пространства на бозонните представяния на  $sp(4, R)$ .

В резултат на въвеждането на дупки можем да различим четири типа на интегрираното протон-неутронно взаимодействие  $P$  (8.1): частично-частично  $-P_{\bar{p}\bar{n}}$ , частично-дупчесто  $-P_{\underline{p}\underline{n}}$ , дупчесто-частично  $-P_{\bar{p}\underline{n}}$  и дупчесто-дупчесто  $-P_{\underline{p}\bar{n}}$ , които означаваме общо с  $P_{\{i\}}$ , където  $\{i\} = \{\bar{p}\bar{n}, \bar{p}\underline{n}, \underline{p}\bar{n}, \underline{p}\underline{n}\}$ . Във всеки от тези случаи, както и в МВБ-2 [86, 87] ядрените характеристики  $N_{\{i\}}^t$  и  $F_{\{i\}}^0$  могат да се дефинират както в (7.2) и (7.3), но по отношение на съответните оператори на броя на частиците (7.4) или дупките (8.4):

$$\begin{aligned} N_{\bar{p}\bar{n}}^t &= \frac{1}{2}(N_{\bar{p}} + N_{\bar{n}}) = N_t \\ F_{\bar{p}\bar{n}}^0 &= \frac{1}{4}(N_{\bar{p}} - N_{\bar{n}}) = F_0 \\ N_{\bar{p}\underline{n}}^t &= \frac{1}{2}(N_{\bar{p}} + N_{\underline{n}}) = 2F_0 + K_n \\ F_{\bar{p}\underline{n}}^0 &= \frac{1}{4}(N_{\bar{p}} - N_{\underline{n}}) = \frac{1}{2}(N_t - K_n) \\ N_{\underline{p}\bar{n}}^t &= \frac{1}{2}(N_{\underline{p}} + N_{\bar{n}}) = K_p - 2F_0 \\ F_{\underline{p}\bar{n}}^0 &= \frac{1}{4}(N_{\underline{p}} - N_{\bar{n}}) = \frac{1}{2}(K_p - N_t) \\ N_{\underline{p}\underline{n}}^t &= \frac{1}{2}(N_{\underline{p}} + N_{\underline{n}}) = K_p + K_n - N_t \\ F_{\underline{p}\underline{n}}^0 &= \frac{1}{4}(N_{\underline{p}} - N_{\underline{n}}) = \frac{1}{2}(K_p - K_n) - F_0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Тези дефиниции са дадени във втората колона на (8.5).

Сега може лесно да се получи зависимостта на ядрения параметър  $P_{\{i\}}$  от характеристиките на класификационната схема  $N_{\{i\}}^t$  и  $F_{\{i\}}^0$ . От уравненията (8.5) първо определяме броя на частиците от всеки вид  $N_{\tau}\{i\}$ ,  $\tau = \pi, \nu$  различавайки частици и дупки според стойността на комплексния индекс  $\{i\} = \{\bar{p}\bar{n}, \bar{p}\underline{n}, \underline{p}\bar{n}, \underline{p}\underline{n}\}$  на двойката оператори  $N_{\{i\}}^t$  и  $F_{\{i\}}^0$ :

$$N_{\pi}\{i\} = \frac{1}{2}N_{\{i\}}^t + F_{\{i\}}^0 = \frac{1}{2}N_p\{i\} \quad (8.6)$$

$$N_{\nu}\{i\} = \frac{1}{2}N_{\{i\}}^t - F_{\{i\}}^0 = \frac{1}{2}N_n\{i\} \quad (8.7)$$

Замествайки (8.6) и (8.7) в определения от същото  $\{i\}$  оператор  $P_{\{i\}}$ , се получава съотношението:

$$P_{\{i\}} = \frac{1}{2N_{\{i\}}^t} \{(N_{\{i\}}^t)^2 - 4(F_{\{i\}}^0)^2\}. \quad (8.8)$$

От (8.8),  $(F_{\{i\}}^0)^2$  се изразява като функция на  $N_{\{i\}}^t$  и  $P_{\{i\}}$  по следния начин:

$$(F_{\{i\}}^0)^2 = \frac{N_{\{i\}}^t}{2} \left( \frac{N_{\{i\}}^t}{2} - P_{\{i\}} \right) \quad (8.9)$$

Полученият израз (8.9) изглежда като собствената стойност на някакво обобщено вдвояващо взаимодействие, което играе важна роля, особено в този слой.

Както споменахме по-горе  $Sp(4, R)$  класификацията се реализира чрез операторите  $N_t$  (7.2) и  $F_0$  (7.3), като се отчитат само частици, пълнеци целия слой, което съответства на първите два реда от (8.5). Тъй като операторите даващи броя на дупките (8.4) за  $N_{\bar{p}} > K_p$  и/или  $N_{\bar{n}} > K_n$  се изразяват чрез броя на частиците и размера на съответния слой, в третата колона на (8.5) частично-дупчестите оператори  $N_{\{i\}}^t$  и  $F_{\{i\}}^0$  са представени като функции на  $N_t$ ,  $F_0$  и половината дължина на слоевете  $K_p, K_n$  (8.3). Техните стойности могат да се въведат в изразите за  $P_{\{i\}}$  (8.1) и да се получи неговата зависимост от класификационните квантови числа. По този начин разглеждането на частично-дупчестото взаимодействие въвежда зависимост от размерите на протонните и неутронни слоеве. Трябва да се отбележи още, че в частично-дупчестите случаи  $\{i\} = \bar{p}\underline{n}, \underline{p}\bar{n}$  ролята на съответните оператори на броя  $N_{\{i\}}^t$  и проекцията  $F_{\{i\}}^0$ -се обръща. Тези резултати могат да се прилагат към всички главни слоеве или подслоеви, определени от граничните стойности на магическия брой протони и неутрони. В разглеждания конкретен случай протоните и неутроните запълват един и същи главен слой с  $N = Z = 28 - 50$ , така че  $K_p = K_n = K = 11$ , което води до опростяването  $F_{\underline{p}\underline{n}}^0 = F_0$ .

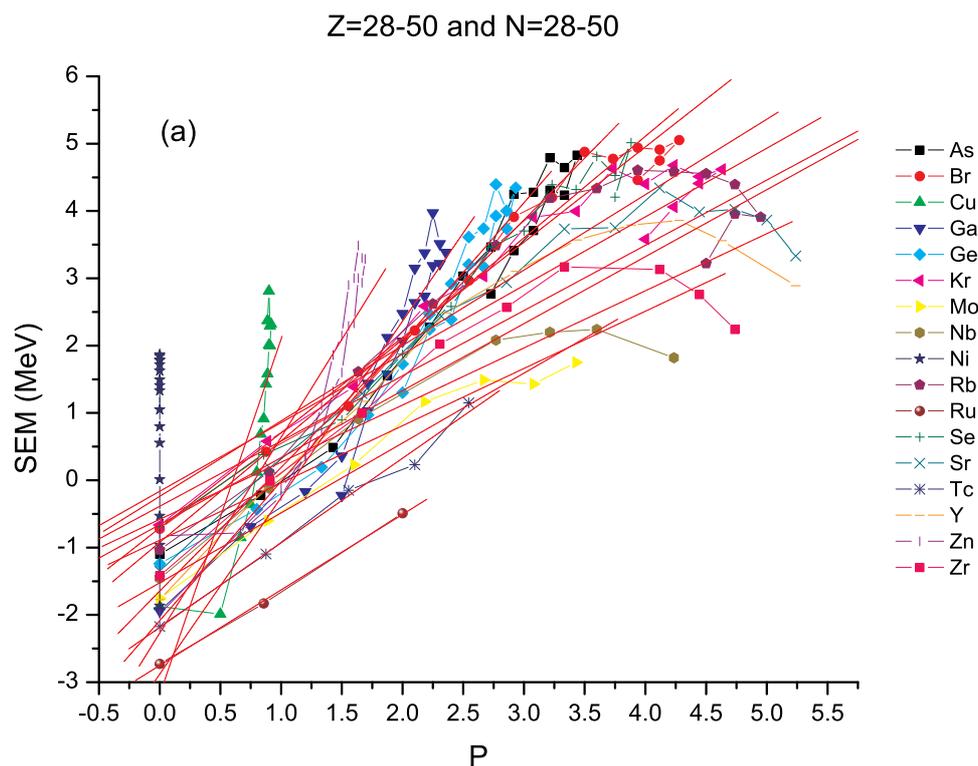
Интересно е да се разгледа поведението на параметрите  $P_{\{i\}}$  (8.1), съответстващи на всяко от ядрата, така както са класифицирани по отношение на квантовите числа

Таблица 8.1: Стойности на  $P$  (8.1) за ядрата от слоя  $(28, 28|50, 50)_-$ .

$N$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$F_0$
1	$^{58}\text{Zn}(0)$	$^{58}\text{Ni}(0)$						21
3	$^{62}\text{Ge}(\frac{1}{3})$	$^{62}\text{Zn}(\frac{1}{3})$	$^{62}\text{Ni}(0)$					19
5	$^{66}\text{Se}(\frac{3}{5})$	$^{66}\text{Ge}(\frac{3}{5})$	$^{66}\text{Zn}(\frac{2}{5})$	$^{66}\text{Ni}(0)$				17
7	$^{70}\text{Ni}(\frac{6}{7})$	$^{70}\text{Se}(\frac{6}{7})$	$^{70}\text{Ge}(\frac{5}{7})$	$^{70}\text{Zn}(\frac{3}{7})$	$^{70}\text{Ni}(0)$			15
9	$^{74}\text{Sr}(\frac{10}{9})$	$^{74}\text{Kr}(\frac{10}{9})$	$^{74}\text{Se}(\frac{9}{9})$	$^{74}\text{Ge}(\frac{7}{9})$	$^{74}\text{Zn}(\frac{4}{9})$	$^{74}\text{Ni}(0)$		13
11	$(\frac{15}{11})$	$^{78}\text{Sr}(\frac{15}{11})$	$^{78}\text{Kr}(\frac{14}{11})$	$^{78}\text{Se}(\frac{12}{11})$	$^{78}\text{Ge}(\frac{9}{11})$	$^{78}\text{Zn}(\frac{5}{11})$	$^{78}\text{Ni}(0)$	11
13	$\frac{21}{13}$	$^{82}\text{Zr}(\frac{21}{13})$	$^{82}\text{Sr}(\frac{20}{13})$	$^{82}\text{Kr}(\frac{18}{13})$	$^{82}\text{Se}(\frac{15}{13})$	$^{82}\text{Ge}(\frac{11}{13})$	$(\frac{6}{13})$	9
15	$\frac{28}{15}$	$^{86}\text{Mo}(\frac{28}{15})$	$^{86}\text{Zr}(\frac{27}{15})$	$^{86}\text{Sr}(\frac{25}{15})$	$^{86}\text{Kr}(\frac{22}{15})$			7
17	$\frac{36}{17}$	$^{90}\text{Ru}(\frac{36}{17})$	$^{90}\text{Mo}(\frac{35}{17})$	$^{90}\text{Zr}(\frac{33}{17})$				5
19	$\frac{45}{19}$	$^{94}\text{Pd}(\frac{45}{19})$	$^{94}\text{Ru}(\frac{44}{19})$					3
21	$\frac{55}{19}$	$^{98}\text{Cd}(\frac{55}{19})$						1
$\overline{N}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$		$\overline{F}_0$

$N_{\{i\}}^t$  и  $F_{\{i\}}^0$  (вж. Таблица 8.1. В частност ние ще разгледаме неговото изменение по изотопичните вериги, където по нататък ще изследваме полумпиричните микроскопични маси  $SEM'$ .  $P_{\{i\}} = 0$  в диагоналите ограждащи слоя, тъй като  $N_\pi = 0$ . Ако разглеждаме само частици, всяко ядро се характеризира с една единствена стойност на  $P_{\{i\}}$ . Стойностите на  $P_{\{i\}}$  са еднакви за стойностите  $\pm F_0$ , поради квадратичната зависимост от него в (8.8). Това значи, че стойностите на  $P$  са равни за огледално симетричните изотопични и изотонични вериги от ядра, за които  $N_p \rightleftharpoons N_n$ . Те плавно нарастват от началото на съответната изотопична (изотонична) верига (малки стойности на  $N_{\{i\}}^t$ ), отличавайки се при всеки две съседни ядра с постоянно число  $2k$ , където  $k = N_p(N_n) = 0, 1, 2, \dots$  дава реда на разглеждания диагонал спрямо границата на мултиплета при  $k = 0$ . В частично-дупчестите случаи това нарастване се наблюдава до средата на слоя и после  $P_{\{i\}}$  започва да намалява по същия начин до неговото затваряне.

Същото поведение се наблюдава във всички други симплектични мултиплети, но физическото пространство на слоевете се проектира върху различни области от



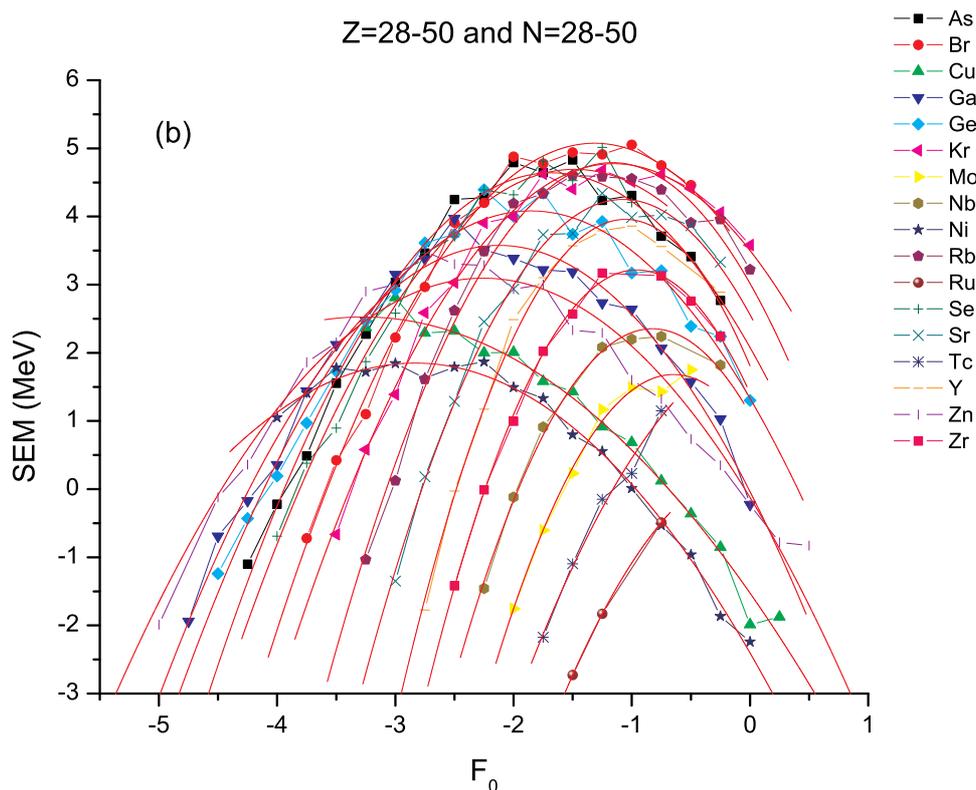
Фигура 8.1: Експериментални стойности на  $SEM$  (фигурки) в слоя  $(28, 28|50, 50)$  начертани като функции на: (а)  $P_{\{i\}}^l$  и тяхните линейни апроксимации (плътни линии) със функциите (8.10).

пространството на представянията, в зависимост от това, кои подслоеве се запълват от валентните протони и неутрони. В разглеждания тук случай, неутроните и протоните заемат един и същи слой, но с превес на неутроните, така че е заета преимуществено страната с  $F_0 < 0$  от симетричните симплектични пространства.

## 8.2 Емпирично изследване на зависимостта на масите от $P$ и $F_0$

Започваме с емпирично изследване на поведението на полуемпиричните микроскопични маси  $SEM$ , като функции на параметъра  $P_{\{i\}}$  и  $F_0$  за всички ядра с четно и нечетно  $A$  от главния слой  $(28, 28|50, 50)$ . Съществуващите експериментални данни съответстващи на всяка изотопична верига лежат на гладки криви. В началото на слоя (на изотопичните вериги) поведението на масите на изотопите е твърде различно от това около неговото затваряне.

За всяка от изотопичните вериги, полуемпиричните микроскопични маси начертани като функции на  $P_{\{i\}}$  (виж Фигура 8.1(а)) показват плавно нарастващо линейно поведение, след което рязко тръгват надолу. За малки стойности на параметъра  $P_{\{i\}}$  тази промяна е толкова рязка, че данните за съответните изотопи изглеждат почти като вертикални, прави линии. Съответните им точки са силно струпани около тях,



Фигура 8.2: Експериментални стойности на  $SEM$ -и (фигурки) в слоя  $(28, 28|50, 50)$  начертани като функции на: (b)  $F_{\{i\}}^0$  и техните параболични апроксимации (плътните линии) с функциите (8.10).

с изключение на тези за някои изотопи - Zr, Nb, Mo, Tc и Ru близо до затварянето на слоя с  $Z = 40 - 44$ .

Графиките на полуемпиричните микроскопични маси като функции на  $F_0$  (виж Фигура 8.2(b)) показват ясно изразено параболично поведение в изотопичните вериги. Параболите образуват купол от твърде равномерно разпределени точки. Те се прекъсват при  $F_0 = 0$  или непосредствено след това, което е в резултат на излишъка на неутрони в ядрата от този слой.

### 8.3 Формули за определяне на полуемпиричните микроскопични маси и сравняване на резултатите

Наблюдаваното гладко поведение на полуемпиричните микроскопични маси  $SEM$ , начертани като зависещи от параметрите  $P_{\{i\}}$  и  $F_{\{i\}}^0$  за всички ядра с четно и нечетно  $A$  от главния слой  $(28, 28|50, 50)$ , позволява да се изведат общи и в същото време прости формули за определяне на тези важни ядрени характеристики. Те са получени чрез фитиране към експерименталните данни [102] на подходящо избрани функции на променливите  $P_{\{i\}}$  и  $F_{\{i\}}^0$ .

Най-простият подход е да определим полуемпиричните микроскопични маси като линейни функции на параметъра  $P_{\{i\}}$  (правите линии на Фигура 8.1(a)) за всяка от 17 изотопични вериги с  $Z = 28 - 45$  от ядра принадлежащи на разглеждания слой.

$$SEM(P_{\{i\}}^l) = B_0^l + B_1^l P_{\{i\}}^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 16 \quad (8.10)$$

където индексът  $l = 0, 1, 2, \dots, 16$  означава изотопичните вериги, от фиксиран брой валентни протони  $N_p^l = Z_l - 28$ . За всяка изотопична верига (фиксирано  $l$ ), броя на валентните неутрони  $N_n\{i\}$  се мени, като така се получава броя на ядрата принадлежащи на всяка от веригите, който варира между 3 – 22. От фитиращата процедура се определят стойностите на параметрите  $B_0^l$  и  $B_1^l$  от (8.10) поотделно за всяка изотопична верига, включително и техните неопределености  $\Delta B_0^l$  и  $\Delta B_1^l$ . Точността на фитирането е твърде добра със средна стойност на коефициентите на корелации  $R^2 = 0.94 \pm 0.05$  във всяка изотопична верига. Минимални стойности на  $R^2$  се получават за изотопичните вериги със само няколко протона над затворения слой, като Cu, Zn. Апроксимирането на полуемпиричните микроскопични маси с линейни функции на  $P_{\{i\}}$  (8.10) е твърде естествено, тъй като  $P_{\{i\}}$  са съответно квадратични функции на  $F_{\{i\}}^0$  (8.8). Тъй като в този случай имаме по 2 коефициента за всяка от 17-те изотопични вериги, съдържащи 219 ядра, единно описание на всички ядрени изотопи се получава като се определи набора от стойности за всеки от коефициентите  $B_0^l$  и  $B_1^l$  с функции на броя на валентните протони  $N_p^l = Z_l - 28$ . Така следващата стъпка при получаване на общ израз за  $SEM$  на всяко ядро в слоя е апроксимирането на всеки от коефициентите  $B_i^l, i = 0, 1$  в границите на техните неопределености с полиноми от втори порядък

$$B_i^l(N_p^l) = A_0^i + A_1^i N_p^l + A_2^i N_p^{l2}, \quad i = 0, 1 \quad (8.11)$$

по отношение на броя на валентните протони  $N_p^l$ , които определят изотопичните вериги. Тези на Zr, Nb, Mo, Tc, Ru с  $11 < N_p^l = 12 - 16$  (след средата на слоя) съдържащи общо 31 ядра са изключени от второто фитиране. Причината за това е, че те се намират близо до протонната линия на препълване (proton drip line) и за тях няма достатъчно надеждна експериментална информация за да се получи добра статистика при фитирането. Изчислените за тях стойности на  $SEM$ -и могат да се считат като предсказания при определянето на точността на получената обща формула.

Стойностите на параметрите  $A_k^i, k = 0, 1, 2; i = 0, 1$  заедно със стойностите на техните неопределености  $\Delta A_k^i$  и  $R^2$  са дадени в Таблица 8.2.

Коефициентите  $B_0^l, B_1^l$  също показват твърде гладко и периодично поведение като функции на  $N_p^l$ , но с противоположни знаци. Така за да получим стойността на  $SEM$  за дадено ядро трябва да определим първо броя на валентните протони и

Таблица 8.2: Стойности на параметрите  $A_k^i, k = 0, 1, 2; i = 0, 1$ .

$i \setminus A_k^i$	$A_0^i$	$\Delta A_0^i$	$A_1^i$	$\Delta A_1^i$	$A_2^i$	$\Delta A_2^i$	$R^2$
0	-4.240	0.575	0.726	0.192	-0.032	0.015	0.883
1	4.045	0.324	-0.581	0.095	0.027	0.007	0.961

неутрони, разглеждайки ги като частици или дупки в зависимост от положението им спрямо средата на слоя. След това да изчислим съответната стойност на  $P_{\{i\}}^l$ . После като въведем 6-те коефициента  $A_k^i, k = 0, 1, 2; i = 0, 1$ , от Таблица 8.2 в (8.11) получаваме стойностите на параметрите  $B_i^l, i = 0, 1$ . Замествайки тези стойности във формула (8.10) се получава стойността на  $SEM$  за разглежданото ядро. Това е твърде проста, но обща процедура за пресмятане и предсказване на масите на ядрата в разглеждания слой. Изключение правят ядрата, за които  $P_{\{i\}}^l = 0$ . За разглеждания слой това са изотопите на Ni с  $N_p^0 = 0$ . Както се вижда от (8.10) за всички тези ядра  $SEM(0) = B_0^0 = A_0^0$ , което очевидно не може да бъде разумна оценка за техните маси.

Сега ще разгледаме и другата възможност – да определим общата функционална зависимост на  $SEM_l$  от  $F_{\{i\}}^0$  Фигура 8.2 в изотопичните вериги на разглеждания слой. От Фигура 8.2(b) е ясно, че най-подходящата функция за апроксимация е параболата:

$$SEM(F_{\{i\}}^0) = C_0^l + C_1^l F_{\{i\}}^0 + C_2^l F_{\{i\}}^0{}^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 16. \quad (8.12)$$

Точността на фитиране в случая е много добра със средно  $R^2 = 0.988 \pm 0.012$  за коефициентите  $C_i, i = 0, 1, 2$ . След това, последните се апроксимират отново с полиноми от втори порядък по отношение на  $N_p^l = Z_l - 28$ ,

$$C_i^l(N_p^l) = D_0^i + D_1^i N_p^l + D_2^i N_p^l{}^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (8.13)$$

Изотопичните вериги с  $N_p^l > 11$  отново не са включени във втората спъпка на фитиращата процедура. В резултат са определени 9-те коефициента  $D_k^i, k = 0, 1, 2; i = 0, 1, 2$  (8.13), с помощта на които определяме масите. Те са дадени в Таблица 8.3.

Таблица 8.3: Стойности на параметрите  $D_k^i, k = 0, 1, 2; i = 0, 1, 2$ .

$i \setminus D_k^i$	$D_0^i$	$\Delta D_0^i$	$D_1^i$	$\Delta D_1^i$	$D_2^i$	$\Delta D_2^i$	$R^2$
0	-2.593	0.070	1.331	0.040	-0.079	0.004	0.975
1	-3.000	0.084	0.055	0.046	-0.006	0.005	0.896
2	-0.529	0.021	-0.048	0.011	-0.004	0.001	0.866

Като резултат се получава общия израз (8.12) за полуемпиричните микроскопични маси на 188 ядра от слоя  $(28, 28|50, 50)$ , зависещи от 9 феноменологични парамет-

ри дадени в Таблица 8.3. Сравнявайки средните стойности за  $R^2$ , получени в двете процедури на фитиране при извеждането на изразите за  $SEM$  като функции на  $P_{\{i\}}$  и  $F_{\{i\}}^0$ , е ясно, че във втория случай се получава по-добра точност, което може да се очаква, и само поради по-големия брой параметри.

В този случай за масите на ядрата с  $P_{\{i\}}^l = N_p^l = 0$  се получава по-точно предсказание, тъй като за тях  $F_{\{i\}}^0 = -\frac{1}{4}N_{n\{i\}} \neq 0$  и  $C_i^l = D_0^i, i = 0, 1, 2$ . Формулата за определяне на  $SEM$ и на ядрата от изотопичната верига с  $P_{\{i\}}^l = 0$ :

$$SEM(N_{n\{i\}}) = D_0^0 - \frac{1}{4}D_0^1 N_{n\{i\}} + \frac{1}{16}D_0^2 (N_{n\{i\}})^2,$$

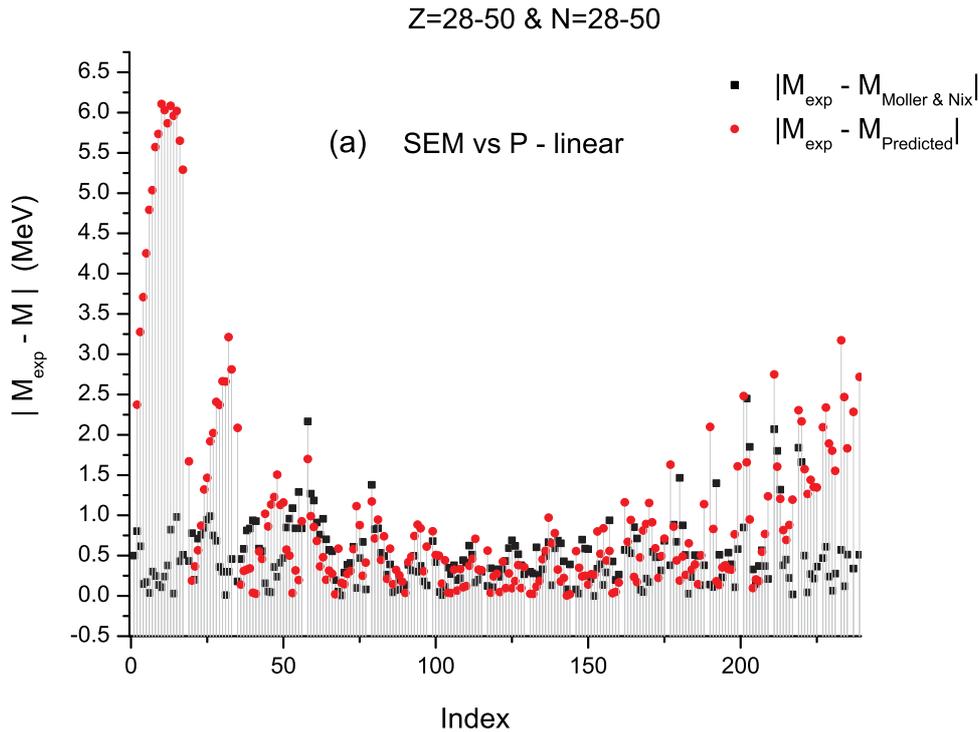
където коефициентите  $D_0^i, i = 0, 1, 2$  могат да се вземат от първата колона на Таблица 8.3.

Друг важен, частен случай при определянето на  $SEM$  като функции на  $F_{\{i\}}^0$  представляват ядрата с  $N = Z$  в този симетричен слой, което в нашите означения се изразява като  $N_{n\{i\}} = N_{p\{i\}}$  и  $F_{\{i\}}^0 = 0$ . Следователно от (8.12) и (8.13) стойностите на полуемпиричните микроскопични маси за тези ядра се дават от:

$$SEM(N_{p\{i\}}) = C_0 = D_0^0 + D_1^0 N_{p\{i\}} + D_2^0 (N_{p\{i\}})^2,$$

където феноменологичните параметри  $D_k^0, k = 0, 1, 2$  са в първия ред на Таблица 8.3. Техните стойности са получени с най-добър коефициент на определеност  $R^2$ . Индекса  $\{i\}$  е даден към функциите  $SEM$  и техните променливи за да напомня, че трябва да се използват правилните стойности на частици и/или дупки за операторите на броя на валентните протони и неутрони на разглежданото ядро.

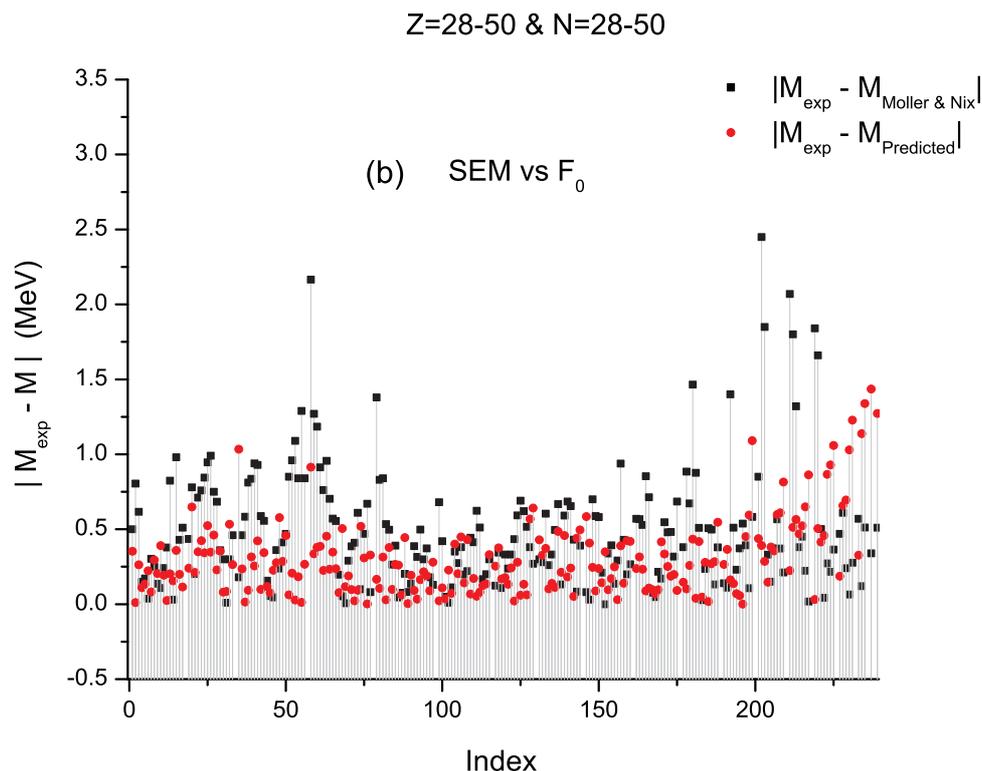
На края за да проверим точността и предсказващите възможности на получените общи формули за полуемпиричните микроскопични маси като функции на  $P_{\{i\}}$  (8.10) и  $F_{\{i\}}^0$  (8.12) ние изчисляваме масите на всичките 219 ядра от главния слой (28, 28|50, 50), използвайки феноменологичните параметри от Таблицы 8.2 и 8.3 съответно. Стойностите за набора от изотопи Zr, Nb, Mo, Tc и Ru, които не бяха включени в фитирането могат да се считат за предсказания при тяхното определяне. Теоретичните стойности на масите на нуклидите –  $M_{\text{Predicted}} = SEM + M_{\text{macro}}$  са получени като са използвани получените стойности за  $SEM$  и могат да се сравнят с тези на експерименталните маси  $M_{\text{Exp}}$  от [102]. За да оценим нашите резултати на Фигури 8.3 и 8.4, ние представяме разликите  $|M_{\text{Exp}} - M_{\text{Predicted}}|$  и ги сравняваме с разликите  $|M_{\text{Exp}} - M_{\text{Moller\&Nix}}|$ , където  $M_{\text{Moller\&Nix}}$  са масите получени от твърде сложната и подробна оценка от Moller и Nix [101]. Резултатите получени от параболичната зависимост на  $SEM$  от  $F_0$  (Фигура 8.3(а)) са за около 75% от ядрата по-близки до експерименталните данни отколкото тези от [101]. В първия случай на зависимост на полуемпиричните маси от  $P_{\{i\}}$ , включваща само 6 коефициента ние получаваме



Фигура 8.3: Сравнение на разликите  $|M_{\text{Exp}} - M_{\text{Moller\&Nix}}|$  между експерименталните и предсказаните от Moller\&Nix [101] маси с: (a) нашите предсказания  $|M_{\text{Exp}} - M_{\text{Predicted}}|$  с линейна апроксимация по  $F_{\{i\}}^l$ .

също в повечето случаи по-добри резултати с изключение на граничните за слоя изотопи, за които  $P = 0$  или много малко (Фигура 8.4(b)). За последните се получават много добри резултати в  $F_{\{i\}}^0$  подхода.

Полученото просто съотношение между третата проекция на  $F$ -спина и параметъра  $P$  поставя  $F_0$  на по-обоснована теоретична основа, като класификационно число на редица ядрени характеристики. По отношение на ядрените маси това позволява те да бъдат изследвани за ядрата от цял главен слой с помощта на само едно уравнение свързващо ги с  $P$  или  $F_0$ . Според представените тук резултати, всички ядра от областта с  $A = 80$  и  $N = Z = 28 - 50$  са описани от една феноменологична формула с 6 параметъра в първия случай и 9 параметъра във втория. Както бе показано, получените резултати са твърде точни и могат да бъдат използвани за предсказване на масите на неизвестни още ядра, които представляват интерес (Фигури 8.1(a) и 8.2(b)). Осреднените грешки между предсказаните и измерени маси в областта с  $A = 80$  са сравними използвайки двата подхода, основани на  $P$ -фактора или на  $F$ -спина (Фигури 8.3(a) и 8.4(b)). Комбинирани двата подхода са доста мощни. Функционалната зависимост на полуемпиричните микроскопични маси от класификационното число  $F_0$  позволява да се избегнат проблемите свързани с ядрата



Фигура 8.4: Сравнение на разликите  $|M_{\text{Exp}} - M_{\text{Moller\&Nix}}|$  между експерименталните и предсказаните от Moller\&Nix [101] маси с: (b) нашите предсказания с параболчна апроксимация по  $F_{l\{i\}}^0$ .

със затворени обвивки, докато параметризацията чрез коефициента  $P$  е по-проста и позволява нови интерпретации при изследването на затварянето на слоевете и подслоевете, като се използват експерименталните резултати за масите на ядрата.

Тъй като  $F_0$  беше дефинирано само за четно-четни ядра, се наложи неговата интерпретация да бъде разширена за да се включат и ядрата с нечетно  $A$ , така че представените резултати са валидни за всякакъв тип ядрени структури, включително четно-нечетни и нечетно-нечетни. Частично-дупчестите корелации също са отчетени коректно при извеждането на връзката между  $F_0$  и  $P$ . Така развития подход е приложим за всички главни ядрени слоеве, включително и тези в които протоните и неутроните пълнят различни слоеве [108].

## 9. Систематика в структурата на главите на нисколежащите възбудени ивици в спектрите на силно деформираните ядра

Различни характеристики на нисколежащите нива на четно-четните ядра, могат да се използват за изследване на приложимостта на колективните модели на ядрената структура. Предположенията, които определят тези модели обикновено се основават първо на анализа на структурата на състоянията от основната ивица и след това на свойствата на възбудените ивици, в частност на структурата на тяхните начални състояния (глави). Това може да доведе до различаващи се интерпретации на едни и същи характеристики на спектъра. Типичен пример в това отношение представлява поведението на ивиците построени върху първите възбудени  $0^+$  и  $2^+$  състояния в силно деформираните ядра [109]. Свойствата на тези нива обикновено се определят и описват в рамките на геометричния подход към ядрената структура като глави на  $\beta$  и  $\gamma$  ивици, които възникват в резултат на квадруполните вибрации на повърхността на деформирана течна капка [110, 111]. Успоредно с развитието на нови експериментални методи и натрупването на допълнителни данни от тях, бяха въведени и нови, по-усъвършенствани модели, за да се постигне добро обяснение и описание на нарастващия обем от нови резултати [112]. Внимателното и систематично изследване на свойствата на много от нисколежащите неирасови състояния разкрива големи различия в получените данни за тях, дори в съседни нуклиди. Могат да се намерят много примери в подкрепа на различни интерпретации на тези конфигурации, които се означават с  $K^\pi = 0_2^+ = 0_\beta^+$  (второто възбудено  $0^+$  състояние или главата на  $\beta$  ивицата) и  $K^\pi = 2_\gamma^+$  (която може да бъде или не второто възбудено  $2^+$  състояние). Изглеждащото сложно и променливо поведение на най-ниските възбудени неирасови ивици налага по-задълбоченото им изследване и изясняването на тяхната микроскопична структура.

Обединеното изучаване на голямото количество данни за ядрената структура, естествено се основава на систематичното изследване на свойствата на разглежданите системи. Тук отново се използва систематиката от Глава 7 [A8, B6, B7, B8] по отношение на структурата на ключови за нея нива от ядрените спектри - главите на  $\gamma$  и  $\beta$  ивиците и естествено тяхното положение относно нивата от основната ивица в нискоенергетичната част на серия от тежки деформирани ядра, които се различават

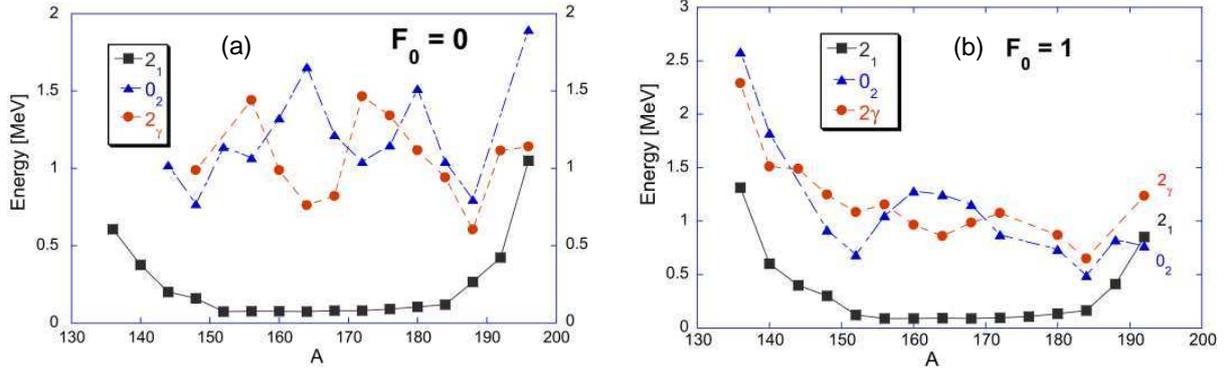
едно от друго с подобна на  $\alpha$ -частица нуклонна конфигурация. Този подход е изпобван емпирично и в Глава 7 е показано, че е много подходящ за единно описание на нисколежащите ираст енергии на четно-четните ядра [A8, 113]. Главите  $K^\pi = 0_2^+$  - на  $\beta$  и  $K^\pi = 2_\gamma^+$  на  $\gamma$  ивиците, противно на гладкото, периодично поведение на ираст състоянията, показват доста остри осцилации, и то в областите с ясно изразено ротационно поведение в спектрите. Следователно, сериозно предизвикателство представлява изучаването на причините за това поведение и неговото описание, за да могат да се предсказват и анализират новите данни за такива състояния, както и да се прилагат в системи, които предстои да бъдат изследвани.

За тълкуването и възпроизвеждането на емпирично установените в резултат на класификацията свойствата на нисколежащите спектри на деформираните четно-четни ядра, тук се прилага протон - неутронната версия на псевдо- $SU(3)$  слоестия модел [39]. Този подход е особено подходящ, тъй като в него се комбинират съображенията за микроскопична ядрена структура с опросяващите, но общи принципи на симетрията в нея. В частност, установено е, че псевдо- $SU(3)$  модела е подходящ за описание на нисколежащия спектър в силно деформираните ядра [114–116]. Друго предимство на модела е, че той съдържа и геометрична интерпретация на многонуклеонните състояния, посредством установените съотношения между  $SU(3)$ -инвариантите и променливите  $\beta$  и  $\gamma$  на геометричния модел [117], описващи формата на ядрената система.

### 9.1 Емпирично изследване на поведението на $K^\pi = 0_2^+$ и $2_\gamma^+$

В резултат на емпирично изследване на енергиите на ираст състоянията на всички четно-четни ядра в Глава 7 [A8], беше намерено единното им теоретично описание с помощта на класификационна схема, която свързва в симплектични мултиплети ядрата от главните валентни слоеве. Класификационната схема е основана само на две квантови числа, общия брой на валентните бозони  $N = N_\pi + N_\nu$  (7.2) и третата проекция  $F_0 = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu)$  (7.3) на  $F$ -спина. Това всъщност едновременно води до класификация на ядрата в термини на операторите  $N_\pi = \frac{1}{2}(N_p - N_p^1)$  и  $N_\nu = \frac{1}{2}(N_n - N_n^1)$  (7.4), които определят броя на протонните и неутронни валентни бозони (двойки от фермиони) в даден слой, т.е. над затворената обвивка, определена от магическите числа, които тук означаваме с  $N_p^1$  и  $N_n^1$ ). Подреждането на нуклидите в тази схема може да се осъществи, като въвеждаме последователности от ядра с нарастващ с две брой на бозоните  $N$ , при фиксирания стойност на разликата  $F_0$ .

Тук целта ни е да изследваме поведението на  $2^+$  състоянията от основните ивици, първите възбудени  $0_2^+$  състояния и главите  $2_\gamma^+$  на  $\gamma$ -ивицата, които не са задължително вторите по енергия  $2^+$  състояния на ядрата в  $F_0 = 0$  мултиплета на слоя, в който



Фигура 9.1: Експериментални енергии на  $J^\pi = 2^+$  от основната  $K^\pi = 0^+$  ивица, и възбудените  $J^\pi = 0_2^+$  и  $J^\pi = 2_2^+$  състояния на деформираните ядра с:  
(a)  $F_0 = 0$  и (b)  $F_0 = 1$ .

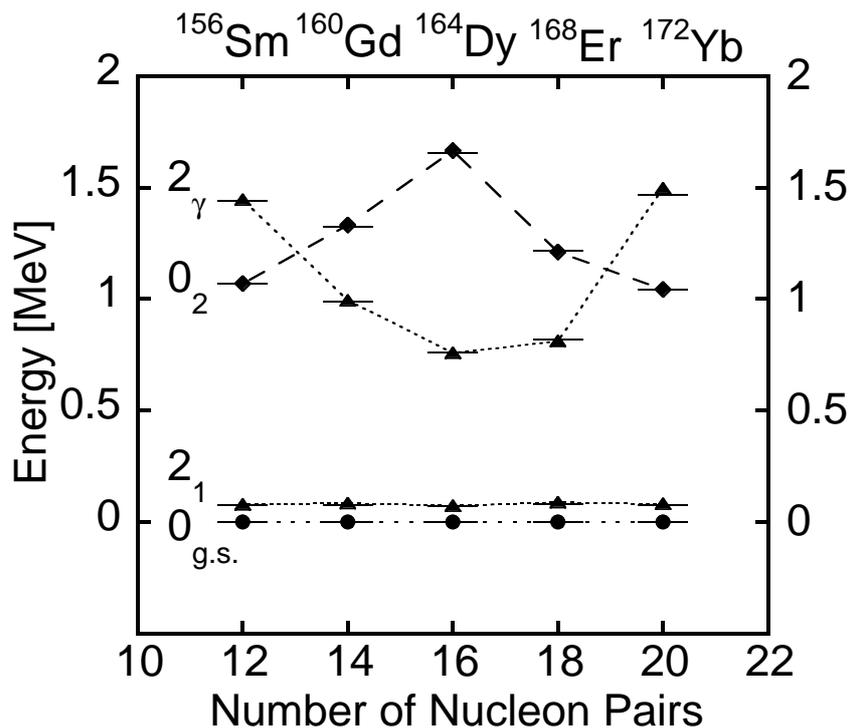
броя на протоните е между 50 и 82, а броя на неутроните между 82 и 126. Ядрата, които разглеждаме имат равен брой валентни протонни и неутронни двойки и следователно в  $F_0$  мултиплета се различават едно от друго с кластер подобен на  $\alpha$ -частица (вж. Таблица 7.9). Както се вижда от експерименталните данни [93], поведението на тези нива илюстрирано на Фигура 9.1 е твърде различно не само в различните слоеве, но и вътре в даден слой, и даже в различните  $F_0$  мултиплети в него. Изключение правят състоянията от ираст ивиците, за които се наблюдава сходно поведение в съседните  $F_0$  мултиплети от даден слой. Енергиите на първите възбудени, неирастови, начални състояния на ивици осцилират с противоположни фази с нарастването на  $N$ . Това е особено ясно изразено в средата на слоя ( $10 < N < 22$ ), където се намират силно деформираните ядра. За да извлечем все пак някакви общи черти в това поведение, ние насочваме вниманието си към добре деформираните ядра от областта на лантанидите, тъй като тези ядра представляват интересно предизвикателство [118], както от теоретична, така и от експериментална гледна точка [119].

Поведението на разглежданите състояния в набора от ядра избран за престапителен при тяхното изследване е дадено на Фигура 9.2.

Тези ядра могат да се разделят на три групи, в които разглежданите нива имат сходно поведение:

1. в началото на областта  $\rightarrow {}^{152}\text{Nd}, {}^{156}\text{Sm}$ , за които  $E(2_2^+) > E(0_2^+)$ ;
2. в средата на мултиплета  $\rightarrow {}^{160}\text{Gd}, {}^{164}\text{Dy}, {}^{168}\text{Er}$ , за които  $E(2_2^+) < E(0_2^+)$ ;
3. на края на областта  $\rightarrow {}^{172}\text{Yb}, {}^{176}\text{Hf}$ , за които  $E(2_2^+) > E(0_2^+)$ .

Енергиите на състоянията  $J^\pi = 2^+$  от основната ивица на тези ядра лежат на почти права линия на  $\sim 0.07$  MeV. Противоположно на това, енергиите на  $0_2^+$  и  $2_2^+$



Фигура 9.2: Експериментални и теоретични енергии на  $J^\pi = 2^+$  от основната  $K^\pi = 0^+$  ивица, и възбудените  $J^\pi = 0_2^+$  и  $J^\pi = 2_\gamma^+$  състояния на деформираните ядра с  $F_0 = 0$ . Експерименталните стойности са означени с чертички, а теоретичните с точки.

състоянията осцилират с противоположни фази като функции на  $N$ . Тенденциите в положенията на енергиите на тези състояния образуват диаграма, която е почти симетрична по отношение на средата на ротационната област при  $N = 16$  за  $^{164}\text{Dy}$ . В тази точка енергията на първото възбудено  $K^\pi = 0^+$  състояние има максимална, а главата на  $\gamma$ -ивицата има минимална стойност. От двете страни на  $^{164}\text{Dy}$ , за  $^{160}\text{Gd}$  и  $^{168}\text{Er}$ , също имаме  $E(2_\gamma^+) < E(0_2^+)$ . Обаче, отдалечавайки се от  $^{164}\text{Dy}$ , на ляво при ( $^{152}\text{Nd}$  и  $^{156}\text{Sm}$ ) и на дясно при ( $^{172}\text{Yb}$ ,  $^{176}\text{Hf}$ ), двете неирасови  $J^\pi = 0_2^+$  и  $K^\pi = 2_\gamma^+$  състояния сменят наредбата си по енергия,  $E(2_\gamma^+) > E(0_2^+)$ . Така от кривите които свързват тези енергии се образуват три примки, като първата и третата са много подобни. Нашата цел по нататък е да разберем и възпроизведем това поведение, което има различни моделни интерпретации [109].

За да бъде то разбрано е необходимо да се изследва по-задълбочено микроскопичната структура на тези ядра [118]. Тук свойствата на нисколежащите спектри на деформираните четно-четни ядра са изследвани и обяснени чрез прилагането на протон-неутронната версия на алгебричния слоест модел с псевдо- $SU(3)$  симетрия [39].

## 9.2 Протон-неутронна версия на псевдо- $SU(3)$ модела

В основата на този модел е моделът на Elliott [38], в който се използват групово-теоретични методи за изследване на класификацията на частиците в потенциал на тримерен хармоничен осцилатор, в основата на който е  $SU(3)$  симетрията. В псевдо- $SU(3)$  версията на модела, псевдо-слоя  $\tilde{\eta} = \eta - 1$  се определя като изходния “пораждащ” слой  $\eta$  без най-високото  $j = \eta + \frac{1}{2}$  “вмъкнато” от следващия слой ниво. В псевдо-слоя съдържащ само състояния с нормална четност, съответното спин-орбитално взаимодействие е пренебрежимо и следователно (псевдо)  $SU(3)$  симетрията се възстановява. Това проектиране от  $\eta$  на  $\tilde{\eta} = \eta - 1$  слоя води до продиктувано от симетрията ограничаване на моделното пространство до подмножество от неприводими представяния на  $SU(3)$ , които отговарят на най-голямата (псевдо) вътрешна деформация [116].

Протон-неутронната версия на псевдо- $SU(3)$ -слоестия модел е микроскопична теория, в която се отчита принципа на Pauli, за разлика от класификационната схема, където се приема, че двойки от протони и неутрони се проявяват като бозони, както е в модела на взаимодействащите бозони [41]. Протонните и неутронни числа на запълване  $n_\sigma$  ( $\sigma = \pi$  и  $\nu$ , съответно) се определят чрез последователно подреждане отдолу нагоре на двойка частици върху всяко от едночастичните нива на Nilsson [120] при фиксирана стойност на деформацията ( $\beta \sim 0.3$ ). Промени в очакваните стойности на числата на запълване като функции на деформацията за нормалната ѝ област на изменение от  $\beta \sim 0.25$  до  $\beta \sim 0.35$  са малко вероятни. При това запълване, се разглеждат като спектроскопично активни само нуклоните на орбиталите с нормална четност  $n_\sigma^+$ , като тези от вмъкнатите орбити  $n_\sigma^-$  се приемат само като ренормализиращи. Това допускане е в съответствие с резултатите от други приложения на модела, в които е доказано, че то работи добре при нисколежащите състояния [121]. Тъй като ядрата от  $F_0 = 0$  мултиплета имат равен брой валентни протони и неутрони, класификационното число  $N$  е равно на броя на частиците от всеки вид. Важно е да се отбележи обаче, че в случая протоните и неутроните запълват два различни слоя,  $\tilde{\eta}_\pi = 3$  и  $\tilde{\eta}_\nu = 4$ , съответно, в резултат на което се получават различни водещи  $SU(3)$  неприводими представяния (с максимална стойност на  $C_2 = (\lambda + \mu)(\lambda + \mu + 3) - \lambda\mu$ ) за протоните и неутроните. Квадрупол-квадруполното взаимодействие  $Q \cdot Q$ , като част от втория инвариант на  $SU(3)$  [ $\tilde{C}_2 = (\tilde{Q} \cdot \tilde{Q} - 3\tilde{L}^2)$  с  $\tilde{Q} = \tilde{Q}^\pi + \tilde{Q}^\nu$  и  $\tilde{L} = \tilde{L}^\pi + \tilde{L}^\nu$ ], дава преимущество на разпънатите (stretched) куплирани представяния  $(\lambda, \mu) = (\lambda_\pi + \lambda_\nu, \mu_\pi + \mu_\nu)$ , но за да се опише богатата и сложна структура на спектъра е необходимо да се включат най-малко 5 – 6 допълнителни протонни и неутронни псевдо- $SU(3)$  неприводими представяния, като те също се избират според стойностите на техните  $C_2$ , като тези с най-голями стойности се считат за най-важни. Това

Таблица 9.1: Числа на запълване за ядрата от  $F_0 = 0$  мултиплета. тези числа са използвани за определяне на базисните състояния на  $SU(3)$ . Квантовите числа на водещите куплирано, протонно и неутронно  $SU(3)$  представяне са дадени в последните три колони.

ядро	$N$	$n_\nu$	$n_\nu^+$	$n_\nu^-$	$n_\pi$	$n_\pi^+$	$n_\pi^-$	$(\lambda, \mu)$	$(\lambda_\pi, \mu_\pi)$	$(\lambda_\nu, \mu_\nu)$
$^{152}\text{Nd}$	10	10	6	4	10	6	4	(30,0)	(12,0)	(18,0)
$^{156}\text{Sm}$	12	12	6	6	12	6	6	(30,0)	(12,0)	(18,0)
$^{160}\text{Gd}$	14	14	8	6	14	8	6	(28,8)	(10,4)	(18,4)
$^{164}\text{Dy}$	16	16	10	6	16	10	6	(30,8)	(10,4)	(20,4)
$^{168}\text{Er}$	18	18	10	8	18	10	8	(30,8)	(10,4)	(20,4)
$^{172}\text{Yb}$	20	20	12	8	20	12	8	(36,0)	(12,0)	(24,0)
$^{176}\text{Hf}$	22	22	14	8	22	14	8	(8,30)	(0,12)	(8,18)

поражда огромно пространство от представяния на произведенията им, което се налага пак да се ограничи по същия начин (най-големите стойности на  $C_2$ ) до към общо около 20 куплирани представяния на  $SU(3)$ . В Таблица 9.2 са дадени за разглежданите тук ядра, разпределението на валентните протони и неутрони върху орбитите с нормална (+) и обратна (-) четност, заедно само с водещите неприводими  $SU(3)$  представяния (в пресмятанията са включени повече представяния) за нуклоните на нормалните орбити. Тъй като в случая разглеждаме само четно-четни ядра, се отчитат само конфигурации с псевдо-спин нула [114, 116].

Развитието на компютърна програма за пресмятане на приведените матрични елементи на физическите оператори между различни неприводими представяния на  $SU(3)$  [122] прави възможно включването на колективни взаимодействия, които нарушават  $SU(3)$  симетрията. Важната роля на сдвояващите корелации в средата на деформираната област е изтъквана в много изследвания на  $K^\pi = 0^+$  състоянията [123], поради което те са включени в използвания моделен хамилтониан. Хамилтонианът, който е подходящ за описание на спектъра на разглежданите ядра съдържа сферични едночастични членове за протони и неутрони  $H_{sp}^\sigma$ ; членове на протонното и неутронно сдвояване  $H_P^\sigma$ ; изоскаларно квадрупол-квадруполно взаимодействие  $Q \cdot Q$ ; и четири по-малки “ротационно-подобни” членове, които запазват псевдо- $SU(3)$  симетрията:

$$\begin{aligned}
 H = & H_{sp}^\pi + H_{sp}^\nu - G_\pi H_P^\pi - G_\nu H_P^\nu - \frac{1}{2} \chi Q \cdot Q \\
 & + a J^2 + b K_J^2 + a_3 C_3 + a_s C_2,
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

където  $C_2$  и  $C_3$  са инвариантите от втори и трети порядък на  $SU(3)$ , които са свързани с аксиалната и триаксиалната деформация на ядрото. В пресмятанията са приети

стандартните стойности за протонните и неутронните едночастични енергии и фиксирани стойности [124] за силите на сдвояването ( $G_\pi = 21/A$ ,  $G_\nu = 17/A$ ), както и за силата на квадрупол-квадруполното взаимодействие ( $\chi = 35A^{-5/3}$ ). Силите на останалите взаимодействия се варират за да се получи най-точно описание на втората  $0^+$  (главата на  $\beta$ -ивицата), първата  $2^+$  и  $2_\gamma^+$  нивата [124]. Членът пропорционален на  $K_\gamma^2$  сваля  $SU(3)$  израждането на различните К ивици [125],  $J^2$  членът дава малка корекция с която се донагласява инерчния момент, и последния член,  $\tilde{C}_2$ , се въвежда за да се различават  $SU(3)$  представянията с  $\lambda$  и  $\mu$  и двете четни от останалите с едно или две нечетни числа [126]. Фитирането се извършва по следния начин: силите на взаимодействията  $a_3$  пред  $C_3$ , и  $a_s$  пред  $C_2$ , се варират за да се получи енергията на второто  $0^+$  състояние. Коефициентът  $b$  на  $K_\gamma^2$  се варира за да се определи енергията на  $2_\gamma^+$  главата. Силата на взаимодействието  $a$  пред  $J^2$  се варира много леко докато се получи добро съвпадение с инерчния момент на основната ивица. В този подход разцепването и смесването на псевдо  $-SU(3)$  представянията се получава в резултат на протонните и неутронните едночастични енергии ( $H_{sp}^{\pi/\nu}$ ) и на включването на сдвояващите взаимодействия. Както се вижда от следващия анализ това смесване играе много съществена роля при възпроизвеждането на поведението на нисколежащите колективни състояния.

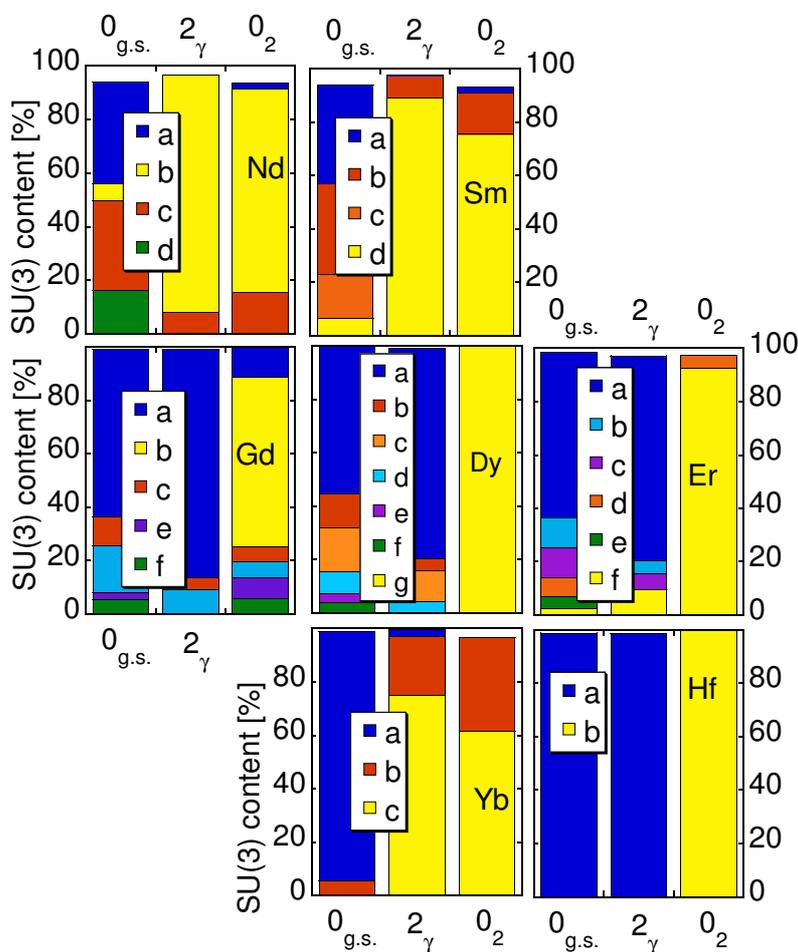
### 9.3 Микроскопичната интерпретация на относителното положение на колективните ивици

Микроскопичната интерпретация на относителното положение на колективните ивици, както и на нивата вътре в тях, е резултат от определянето на основното съдържание на  $SU(3)$  представяния в колективните състояния. Връзката между микроскопичните квантови числа  $(\lambda, \mu)$  и колективните променливи определящи формата на ядрото  $(\beta, \gamma)$  е добре известна [117]. Нашите резултати показват, че ако основните конфигурации съответстват на триаксиалност ( $\mu \neq 0$ , която достига максимум при  $\mu \approx \lambda$ ), тогава основната и  $\gamma$  ивиците принадлежат на едно и също  $SU(3)$  представяне; ако водещата  $SU(3)$  конфигурация е удължена при полюсите (prolate) ( $\mu = 0$ ), ивиците с  $K^\pi = 0_2^+$  и  $K^\pi = 2_\gamma^+$  имат подобни  $SU(3)$  структури. Нивата вътре в дадена структура имат много сходно съдържание. Резултатите от изследването на  $SU(3)$  структурите на разглежданите колективни състояния са представени на Фигура 9.3 и Таблица 9.3. Определени са всички произведения на  $SU(3)$  конфигурации, които имат повече от 2% принос към пълното съдържание на вълновите функции.

Следва по-детайлен анализ на вълновите функции, за обяснение на резултатите от направеното емпирично изследване.

В първата област разглежданите ивици в ядрата  $^{152}\text{Nd}$  и  $^{156}\text{Sm}$ , имат много близко

$SU(3)$  съдържание. Състоянията от основната ивица са разпределени върху почти всички включени в пресмятанията неприводими представяния на  $SU(3)$  с максимум но по-малък от 40%, в най-симетричното водещо представяне  $(12, 0) \otimes (18, 0) \rightarrow (30, 0)$ . Началните състояния на  $K^\pi = 0_2^+$  и  $\gamma$  ивиците са силно смесени, като около 89% от  $\gamma$  ивицата е в куплираната конфигурация  $(12, 0) \otimes (12, 6) \rightarrow (24, 6)$  (виж Таблица 9.3). В този случай главата на  $\gamma$  ивицата е над основното състояние на  $K^\pi = 0_2^+$  ивицата. За ядрото  $^{152}\text{Nd}$ , не е наблюдавано експериментално състояние с ъглов момент  $J^\pi = 2^+$  в  $K^\pi = 2^+$  ивицата. Нашите резултати показват и то с точност, която е сравнима с точността ни за всички останали състояния, които описваме, че такова състояние трябва да се наблюдава при около 1.31 MeV. Това съответства на останалите  $J^\pi = 2^+$ ,  $K^\pi = 2^+$  състояния, с които започват  $\gamma$  ивиците в разглежданата последователност от ядра.



Фигура 9.3: Съдържание на  $SU(3)$  [%] представянията във вълновите функции на колективните състояния от основната ивица,  $K^\pi = 0_2^+$ , и  $K^\pi = 2^+$  състоянията в  $^{148}\text{Nd}$  (горе ляво),  $^{156}\text{Sm}$  (горе дясно),  $^{160}\text{Gd}$  (средата ляво),  $^{164}\text{Dy}$  (средата),  $^{168}\text{Er}$  (средата дясно),  $^{172}\text{Yb}$  (долу ляво) and  $^{176}\text{Hf}$  (долу дясно). С различни цветове са означени различните  $SU(3)$  представяния дадени в Таблица 9.3.

Таблица 9.2: Съдържание на  $SU(3)[\%]$  представянията във вълновите функции на състоянията от основната ивица и възбудените състояния  $K^\pi = 2^+$  и  $K^\pi = 0_2^+$  в седемте ядра дадени на Фигура 9.2. Дадени са всички състояния, които имат повече от 2% принос.

nucl	state	$(\lambda_\pi, \mu_\pi)$	$\otimes$	$(\lambda_\nu, \mu_\nu)$	$\rightarrow$	$(\lambda, \mu)$	$0_{g.s.}$	$2_\gamma^+$	$0_2^+$
$^{152}\text{Nd}$	a	(12, 0)	$\otimes$	(18, 0)	$\rightarrow$	(30, 0)	38.0		2.2
	b	(12, 0)	$\otimes$	(12, 6)	$\rightarrow$	(24, 6)	6.1	88.6	75.9
	c	(12, 0)	$\otimes$	(14, 2)	$\rightarrow$	(26, 2)	33.7	8.1	15.5
	d	(8, 2)	$\otimes$	(18, 0)	$\rightarrow$	(26, 2)	16.2		
$^{156}\text{Sm}$	a	(12, 0)	$\otimes$	(18, 0)	$\rightarrow$	(30, 0)	37.0		2.3
	b	(12, 0)	$\otimes$	(14, 2)	$\rightarrow$	(26, 2)	34.2	8.6	15.5
	c	(8, 2)	$\otimes$	(18, 0)	$\rightarrow$	(26, 2)	16.3		
	d	(12, 0)	$\otimes$	(12, 6)	$\rightarrow$	(24, 6)	6.5	89.1	75.6
$^{160}\text{Gd}$	a	(10, 4)	$\otimes$	(18, 4)	$\rightarrow$	(28, 8)	62.7	85.5	11.1
	b	(10, 4)	$\otimes$	(18, 4)	$\rightarrow$	(30, 4)			63.7
	c	(10, 4)	$\otimes$	(20, 0)	$\rightarrow$	(30, 4)	11.0	4.4	5.6
	d	(12, 0)	$\otimes$	(18, 4)	$\rightarrow$	(30, 4)	17.5	9.3	5.6
	e	(10, 4)	$\otimes$	(18, 4)	$\rightarrow$	(32, 0)	2.4		7.9
	f	(12, 0)	$\otimes$	(20, 0)	$\rightarrow$	(32, 0)	5.6		6.0
$^{164}\text{Dy}$	a	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(30, 8)	55.3	78.8	
	b	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(32, 4)	8.4	4.3	
	c	(10, 4)	$\otimes$	(22, 0)	$\rightarrow$	(32, 4)	12.9	4.4	
	d	(12, 0)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(32, 4)	16.2	11.6	
	e	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(34, 0)	3.3		
	f	(12, 0)	$\otimes$	(22, 0)	$\rightarrow$	(34, 0)	3.9		
	g	(10, 4)	$\otimes$	(14, 10)	$\rightarrow$	(24, 14)			100.0
$^{168}\text{Er}$	a	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(30, 8)	62.0	76.9	
	b	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(32, 4)	11.2	4.6	
	c	(12, 0)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(32, 4)	11.3	6.0	
	d	(10, 4)	$\otimes$	(22, 0)	$\rightarrow$	(32, 4)	6.8		4.8
	e	(10, 4)	$\otimes$	(20, 4)	$\rightarrow$	(34, 0)	4.8		
	f	(10, 4)	$\otimes$	(14, 10)	$\rightarrow$	(24, 14)	2.3	9.7	92.7
$^{172}\text{Yb}$	a	(12, 0)	$\otimes$	(24, 0)	$\rightarrow$	(36, 0)	93.5		2.6
	b	(12, 0)	$\otimes$	(16, 10)	$\rightarrow$	(28, 10)	5.4	35.0	22.3
	c	(4, 10)	$\otimes$	(16, 10)	$\rightarrow$	(20, 20)		61.6	74.8
$^{176}\text{Hf}$	a	(0, 12)	$\otimes$	(8, 18)	$\rightarrow$	(8, 30)	98.7	98.6	
	b	(3, 9)	$\otimes$	(11, 15)	$\rightarrow$	(14, 24)			100.0

За трите ядра от средата на слоя ( $^{160}\text{Gd}$ ,  $^{164}\text{Dy}$ , и  $^{168}\text{Er}$ ), основните състояния на  $\gamma$ -ивиците лежат под главите на  $K^\pi = 0_2^+$  ивицата. Водещите  $SU(3)$  представяния за тези ядра имат квантови числа  $\mu > 0$  и  $\lambda > \mu$ . Фигура 9.3 показва пресметнатото  $SU(3)$  съдържание за състоянията на  $^{160}\text{Gd}$ ,  $^{164}\text{Dy}$ , и  $^{168}\text{Er}$ . В случая нивата от основната и  $\gamma$  ивиците са твърде силно смесени с най-голямо процентно съдържание на дадено неприводимо представяне в състоянията от  $\gamma$  ивицата.  $K^\pi = 0_2^+$  ивицата е главно в друга  $SU(3)$  конфигурация. В случая на  $^{164}\text{Dy}$ , където главата на  $\gamma$  лежи най-високо по енергия изобщо няма смесване. Началното състояние е 100% в  $(10, 4) \otimes (14, 10) \rightarrow (24, 14)$ . Трябва да се отбележи, че в този случай  $\mu$  също достига най-високата си стойност.

В третата област, експерименталната ситуация е много подобна на тази в първата област. Обаче има и някои важни различия, които ще разгледаме подробно:

а) Основното състояние на ядрото  $^{172}\text{Yb}$  е почти 100% в представянето  $(12, 0) \otimes (24, 0) \rightarrow (36, 0)$  с малка смесица от конфигурацията  $(12, 0) \otimes (16, 10) \rightarrow (28, 10)$ , която играе важна, но не определяща роля в структурите на главите на  $\gamma$  и  $K^\pi = 0_2^+$  ивиците.  $\gamma$  ивицата показва най-голямо смесване с  $0_2^+$  с най-висок процент ( $\approx 62\%$ ) в триаксиалното представяне  $(4, 10) \otimes (16, 10) \rightarrow (20, 20)$ .

б) В случая на  $^{176}\text{Hf}$ , протоните и неутроните на орбитите с нормална четност запълват повече от половината слой. Това значи, че за квантовите числа на водещите  $SU(3)$  представяния за протоните  $(0, 12)$  и неутроните  $(8, 18)$  е в сила  $\lambda < \mu$ , което отговаря на сплескани на полюсите (oblate) вътрешни форми на всяка от системите и води до квантови числа на водещото куплирано  $SU(3)$  представяне  $(8, 30)$  също с  $\lambda < \mu$ . В този случай се използва факта, че при сплесканите ядра правилата за определяне на числото  $K$  на ивиците и на съдържащите се в тях ъглови моменти  $L$  се определя като за издължените ядра, но при замяната  $(\lambda, \mu) \rightarrow (\mu, \lambda)$ . Следователно, може да се предполага, че в този случай основното състояние и главата на  $\gamma$  ивицата принадлежат на една и съща  $SU(3)$  структура, и действително точно това се наблюдава. Но трябва да се има предвид, и промяната на формата от удължена в сплескана, което води до съответните изменения в спектъра, зависещи от инварианта от трети порядък ( $C_3 = \frac{1}{9}(2\lambda + \mu + 3)(\lambda - \mu)(\lambda + 2\mu + 3)$ ), който участва в хамилтониана. Освен това е важно да се напомни, че стойността на коефициента пред  $Q \cdot Q$ , или пряко или чрез коефициента  $a_s$  умножаващ  $C_2$ , определя тежестта, с която  $Q \cdot Q$  участва във взаимодействието и в случая на  $^{176}\text{Hf}$ , параметърът  $a_s$  е сравнително по-голям и се използва за уточняване на разположението на началните състояния на  $K = 0_2$  и  $\gamma$  ивиците по начин подобен на ядрата от първата област.

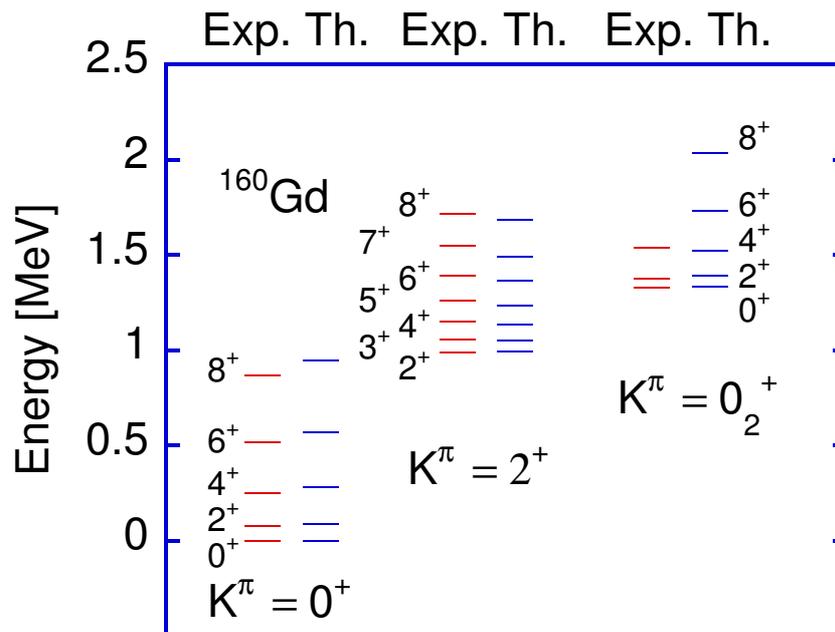
Получените от фитирането параметри на хамилтониана (9.1) за всички разглеждани тук ядра са дадени в Таблица 9.3.

Пълното изясняване на колективните свойства на състоянията от основната и

Таблица 9.3: Сили на взаимодействията (коэф.) определени при фитирането на пресметнатите собствени енергии на хамилтониана към съответните експериментални стойности за разглежданите ядра.

коэф./ядра	<sup>152</sup> Nd	<sup>156</sup> Sm	<sup>160</sup> Gd	<sup>164</sup> Dy	<sup>168</sup> Er	<sup>172</sup> Yb	<sup>176</sup> Hf
$a_3 \times 10^{-4}$	2.57	2.59	1.93	0.65	0.75	0.31	0.43
$a$	0.000	0.000	0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.007
$b$	0.00	0.55	0.153	0.042	0.022	0.12	0.3
$a_s$	0.000	0.000	0.004	0.001	0.001	0.001	0.006

първите възбудени  $K^\pi = 0_2^+$  и  $2_\gamma^+$  ивици трябва да отчита смесването, и то не само на водещите  $SU(3)$  конфигурации при структурирането на техните състояния, което е предизвикано от използвания моделен хамилтониан (9.1). На пример, едночастичните членове и сдвояващите взаимодействия разцепват и смесват  $SU(3)$  представянията [87], и тъй като смесването обикновено включва състояния с по-големи стойности на  $\mu$ , ефекта от сдвояването се свежда до намаляване на аксиалната симетрия на деформираната система и включването на структури, които увеличават триаксиалността. Така всъщност трябва да се разбира общоприетото схващане, че сдвояването предизвиква възстановяване на сферичната форма на ядрената система. Квадрупол-квадруполното взаимодействие тласка протонната и неутронна системи към издължени (prolate) форми, ако осцилаторния им слой е по-малко от половината пълн и към сплескани (oblate) форми в случая, когато е пълн повече от половината. В допълнение на квадрупол-квадруполните ( $\chi$ ) и сдвояващите сили ( $G_\pi$  и  $G_\nu$ ), които се менят много гладко като функция на масите, финното нагласяване на енергиите на неирастовите състояния изисква използването на останалите четири параметъра  $a_3$ ,  $a$ ,  $b$  и  $a_s$ , които са достъпни за да се възпроизведе правилно поведението на разглежданите състояния и даже различията в енергиите на ядра с еднакви нуклонни конфигурации. Това се отнася за случаите на <sup>152</sup>Nd, <sup>156</sup>Sm и <sup>164</sup>Dy, <sup>168</sup>Er (виж Таблица 9.2). Еквивалентността на съответстващите им  $SU(3)$  конфигурации е следствие от факта, че в използваната тук версия на модела се разглеждат само частиците заемащи орбити с нормална четност. Ядрата с еднакви водещи  $SU(3)$  представяния (виж Таблица 9.2) се различават по броя на частиците, заемащи орбити с противоположна на основната четност от схемите на Nilsson. С използваните сили на взаимодействията дадени в Таблица 9.3, получените теоретични спектри са в добро съгласие един със друг (промяната в тях, като функция на масите на ядрата, е систематична) и с експерименталните данни, не само за главите на ивиците, върху които предимно, е направен анализа на емпиричните резултати, но също и за останалите възбудени състояния от разглежданите ивици. Като пример на Фигура 9.4 даваме нисколежащата част на спектъра на ядрото <sup>160</sup>Gd.



Фигура 9.4: Сравнение на експерименталния и изчисления спектър от нисколежащи състояния на  $^{160}\text{Gd}$ .

Четири параметъра дадени в Таблица 9.3, които бяха фитирани за да се получи правилно възпроизвеждане на енергиите на разглежданите състояния са твърде важни и трябва да се разглеждат в съчетание с  $SU(3)$  представяннията при определяне на формите на различните ядра. На пример, в зависимост от знака и големината на  $a_3$ , който определя силата пред инварианта от трети ред  $C_3$  на  $SU(3)$  в хамилтониана може да се прибавя или изважда деформацията към системата, като по този начин се включват или изключват триаксиалните конфигурации. Параметърът  $b$  основно определя поведението на главата  $2_\gamma^+$ . Силата на квадрупол-квадруполното взаимодействие, което участва директно в хамилтониана с коефициент  $\chi$ , е увеличена или намалена в зависимост от знака и големината на  $a_8$ , тъй като освен адитивната  $L^2$  част, която променя ефективния момент на инерция на системата, инвариантът от втори порядък  $C_2$  на  $SU(3)$  е точно  $Q \cdot Q$ .

Алгебричните модели се появяват в резултат на необходимостта да се възпроизведат експерименталните наблюдения с прости пресмятания. При развитието на  $SU(3)$  модела, а по-късно и на псевдо- $SU(3)$  модела, една от главните мотивации е да се получи добро описание на деформираните ядра, като се използва малко, но реалистично конфигурационно пространство. Микроскопичната интерпретация на относителните положения на колективните ивици, както и на състоянията от тях се получава в резултат на определянето на основното съдържание на  $SU(3)$  представянния в колективните състояния. То е силно свързано с деформацията на ядрените подсистеми [115]. В частност, правилното описание на колективните свойства на пър-

вите възбудени  $K^\pi = 2^+$  и  $K^\pi = 0_2^+$  състояния трябва да отчита смесването на различните  $SU(3)$  представяния, което се предопределя от хамилтониана.

Тази теория може да се използва за предсказване на развитието на деформацията в основната и неирасовите колективни ивици, като функция на масовите числа на ядрата. Успехът на направеното изследване дава основания за прилагането му и към други  $F_0$ - мултиплети, които се съдържат в бозонните представяния на  $sp(4, R)$  алгебрата [6]. Това изследване също препотвърждава, че неутронните и протонни конфигурации с нулев псевдоспин и не много псевдо- $SU(3)$  конфигурации с голяма деформация (стойности на  $C_2$ ), са достатъчни за да се получи добро съгласие с експеримента по нисколежащите ираст и възбудени състояния в деформираните ядра (виж Фигура 9.4). Теорията проследява едновременно измененията в ивиците и в тяхните основни състояния (глави) в последователност от ядра, които се отличават с кластер подобен на  $\alpha$  частица, състоящ се от два протона и два неутрона.

## 10. Приложение на деформираната $sp(4, R)$ алгебра

На края на тази част, ще представим едно приложение на деформираната  $Sp(4, R)$ , в което тя се използва, не като класификационна, а като група на динамична симетрия, определяща ядреното взаимодействие [A11].

Алгебричните модели основани на идеята за група на динамична симетрия, се оказаха твърде успешни при описанието на многообразието от колективни спектри на атомните ядра [41]. Общ елемент в тези модели е редукцията  $su(3) \supset so(3)$ , която определя връзката между квадруполната степен на свобода на системата и нейния ъглов момент, който се използва за класификация на състоянията на системата [38]. С оглед на приложения в ядрената структура, основани на квантово деформирани ( $q$ -деформирани) алгебри в Част I, Глава 4 [A3, A4, B3] беше представена конструкцията на  $q$ -деформирана тензорна  $SU(3)$ , както и редукцията ѝ до алгебрата на ъгловия момент. Въз основа на това тук представяме  $q$ -аналог на двумерен модел на взаимодействията бозони, с  $q$ -деформирана  $SU(3)$  група на динамична симетрия [127]. Дадена е в явен вид реализация на модела в термини на  $q$ -тензорни оператори по отношение на стандартната  $su_q(2)$  алгебра. Разгледаната структура на групите и техните подгрупи дава и физическа интерпретация на генераторите в рамките на предложения модел.

### 10.1 Двумерен $q$ -деформиран модел на взаимодействията бозони

Получената в Глава 4 и [A3] деформирана  $SU(3)$  група може да се разгледа като група на динамична симетрия на  $q$ -аналог на двумерен модел на взаимодействията бозони /МВБ/. Двумерно ядро, в което нуклоните са куплирани в бозони с проекции на ъгловия момент  $-2, 0, 2$  се описва от квантовите неприводими тензорни оператори от първи ранг  $b_m^\dagger$  и  $b_m$  с  $m = -1, 0, 1$  по отношение на квантовата група  $SU_q(2)$ , получени с помощта на проекционен метод.

Енергиите на състоянията на ядрената система са собствени стойности на общ  $q$ -деформиран хамилтониан,

$${}_qH = \sum \varepsilon_{i,j} b_i^\dagger b_j + \sum V_{ijkl} b_i^\dagger b_k^\dagger b_j b_l ,$$

където  $\varepsilon_{i,j}$  са едночастичните енергии с проекции  $0$  и  $\pm 2$ , а параметрите на взаимодействието  $V_{ijkl}$  са матрични елементи на двучастичния потенциал  $V$ . Членовете в

хамилтониана са избрани така, че  ${}_qH$  е скалар по отношение на  $q$ -деформираните ротации в двумерното координатно пространство и е самоспрегнат по отношение на спрягането на операторите  $b^\dagger$  и  $b$ .

Групата на динамична симетрия на хамилтониана е  $q$ -деформираната група  $SU_{\bar{q}}(3)$  тъй като той е изразен чрез генераторите  $\dot{y}$ , именно неприводимия тензорен оператор /НТО/ от втори ранг  $Q^{(2)}$  (4.22) и НТО от първи ранг  $L^{(1)}$  (4.9), интерпретирани като квадруполен оператор и оператор на ъгловия момент, съответно. Неприводимия скалар  $S \equiv [N]$  (??), който генерира  $U_{\bar{q}}(1)$  е първия оператор на Casimir за  $U_{\bar{q}}(3)$  и следователно комутира с хамилтониана.  ${}_qH$  не е инвариантен по отношение на  $q$ -деформираната група  $SU_{\bar{q}}(3)$ , но притежава точна симетрия по отношение на  $SO_{\bar{q}}(2)$  генерирана от оператора

$$\Lambda_0^1 = \frac{[2]}{\sqrt{[4]}} \left( b_1^\dagger b_{-1} - b_{-1}^\dagger b_1 - \theta b_0^\dagger b_0 \right), \quad \theta = q - q^{-1} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0 .$$

$\Lambda_0^1$  е  $q$ -аналог на недеформирания оператор на проекцията на ъгловия момент свързана със състоянията с проекции 2, -2, 0.

Между основната група на модела  $SU_{\bar{q}}(3)$  и точната симетрия на хамилтониана  $SO_{\bar{q}}(2)$  лежат две редици от подгрупи. Едната от тях отговаря на  $q$ -деформиран вибрационен спектър

$$U_{\bar{q}}(3) = SU_{\bar{q}}(3) \otimes U_{\bar{q}}(1) \supset SU_{\bar{q}}(2) \supset SO_{\bar{q}}(2),$$

а другата описва състоянията на  $q$ -деформиран ротатор

$$U_{\bar{q}}(3) = SU_{\bar{q}}(3) \otimes U_{\bar{q}}(1) \supset SU_{\bar{q}}(3) \supset SO_{\bar{q}}(3) \supset SO_{\bar{q}}(2) .$$

## 10.2 Ротационна граница

Групата  $SO_{\bar{q}}(3)$  се генерира от трите компоненти  $L_{\pm,0}$  (4.9) на НТО от първи порядък по отношение на  $SU_{\bar{q}}(2)$ , които удовлетворяват комутационните съотношения (4.1)

$$[L_+, L_-] = [2] L_0 q^{-2J_0}, \quad [L_0, L_+] = q^{-1} L_+ q^{-2J_0}, \quad [L_0, L_-] = -q L_- q^{-2J_0},$$

и съотношенията за спрягане

$$(L_m)^\dagger = q^{-m} L_{-m}, \quad m = -1(-), 0, 1(+).$$

Техния явен вид е даден от (4.9). Инвариантът на Casimir от втори порядък се дава от

$$C'_2 \sim (L \otimes L)_0^0 .$$

Той е определен така, че да комутира с трите генератора  $L_{\pm,0}$  на  $SO_{\bar{q}}(3)$  и се дава от

$$C'_2 = \frac{1}{[2]} \{q^{-1}L_+L_- + qL_-L_+ + [2](L_0)^2\} .$$

Състоянията на системата с ротационна симетрия се означават със собствените стойности на операторите на Casimir на подгрупите от редицата:

$$\begin{array}{ccccc} U_{\bar{q}}(3) & \supset & SO_{\bar{q}}(3) & \supset & SO_{\bar{q}}(2) \\ [N] & & C'_2(l) & & L_0(m) . \end{array}$$

Генераторите, които са  $q$ -аналози на оператора на третата проекция на ъгловия момент са равни до числен множител,

$$\Lambda_0^1 = [2] L_0 ,$$

и следователно съществува съотношение между техните собствени стойности  $M = 2m$ . В същност квантовите числа  $N, l, m$  са  $s$ -числа получени от съответните собствени стойности на операторите на Casimir в границата  $q \rightarrow 1$ . В резултат състоянията са означени както в недеформирания случай от три квантови числа  $|N, l, M\rangle$  като  $N = (0), 1, 2, \dots$ ;  $l = N, N - 2, \dots, 0$  ( $N$ -четно) или  $1$  ( $N$ -нечетно);  $M = -2l, -2(l - 2), \dots, 2l$ . Тъй като генераторът  $[N]$ , който е  $q$ -аналог на оператора на общия брой бозони  $N$ , е фиксиран за дадено ядро, зависимостта от  $N$  не се отчита.

$U_{\bar{q}}(3)$  - представянето за  $N = 1$  описва състояния с ъглов момент  $l = N = 1$  и  $M = 0, \pm 2$ :

$$|1, 2\rangle = \frac{1}{[4]^{1/4}} b_1^\dagger |0\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{[4]^{1/4}} b_0^\dagger |0\rangle, \quad |1, -2\rangle = \frac{1}{[4]^{1/4}} b_{-1}^\dagger |0\rangle,$$

които са ортонормални. Действието на  $SO_{\bar{q}}(3)$  генераторите върху състоянията,

$$\begin{array}{ll} L_+ |1, 2\rangle = 0 & \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0 \\ L_+ |1, 0\rangle = \sqrt{[2]} q^{-1} |1, 2\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sqrt{2} |1, 2\rangle \\ L_+ |1, -2\rangle = \sqrt{[2]} |1, 0\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ \\ L_- |1, 2\rangle = \sqrt{[2]} |1, 0\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sqrt{2} |1, 0\rangle \\ L_- |1, 0\rangle = \sqrt{[2]} q |1, -2\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sqrt{2} |1, -2\rangle \\ L_- |1, -2\rangle = 0 & \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0 \\ \\ L_0 |1, 2\rangle = q |1, 2\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} 1 \cdot |1, 2\rangle \\ L_0 |1, 0\rangle = \theta |1, 0\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} 0 \\ L_0 |1, -2\rangle = -q^{-1} |1, -2\rangle & \xrightarrow{q \rightarrow 1} -1 |1, -2\rangle \end{array}$$

съвпада с действието на стандартната група на ъгловия момент  $SO(3)$  в границата  $q \rightarrow 1$ .

Собствените стойности на оператора на Casimir от първи порядък  $[N]$  за  $U_q(3)$  и от втори порядък  $C'_2$  за  $SO_q(3)$  са равни на съответстващите им недеформираны стойности в границата  $q \rightarrow 1$ :

$$[N_1] | 1, M \rangle = \xi \sqrt{\frac{[4]}{[3]}} | 1, M \rangle, \quad C'_2 | 1, M \rangle = \frac{[4]}{[2]} | 1, M \rangle, \quad M = 0, \pm 2.$$

$q$ -аналога на общото действие на  $L_{\pm}$  върху базисните състояния се дава от

$$L_+ | l, M \rangle = q^{-(l+\frac{M}{2})} \sqrt{\left[l - \frac{M}{2}\right] \left[l + \frac{M}{2} + 1\right]} | l, M + 2 \rangle$$

$$L_- | l, M \rangle = q^{l-\frac{M}{2}} \sqrt{\left[l + \frac{M}{2}\right] \left[l - \frac{M}{2} + 1\right]} | l, M - 2 \rangle, \quad M = 0, \pm 2,$$

и действието на  $L_0$

$$L_0 | l, M \rangle = \frac{1}{[2]} \frac{1}{\theta} \left( \frac{[4l+2]}{[2l+1]} - q^{-M} [2] \right) | l, M \rangle$$

се получава с помощта на съотношението

$$L_0 = \frac{1}{[2]} (L_+ L_- - L_- L_+) q^{2J_0}.$$

В резултат за  $C'_2$  получаваме

$$C'_2 | l, M \rangle = \frac{1}{[2]^2} [2l] [2l+2] | l, M \rangle, \quad M = 0, \pm 2.$$

Ротационно инвариантният  $q$ -деформиран хамилтониан  ${}_q H$ , зависещ от операторите на Casimir ( $[N], C'_2, (L_0)^2$ ) на разглежданата верига от подгрупи има вида

$${}_q H = A_r C'_2 + B_r (L_0)^2 + D_r,$$

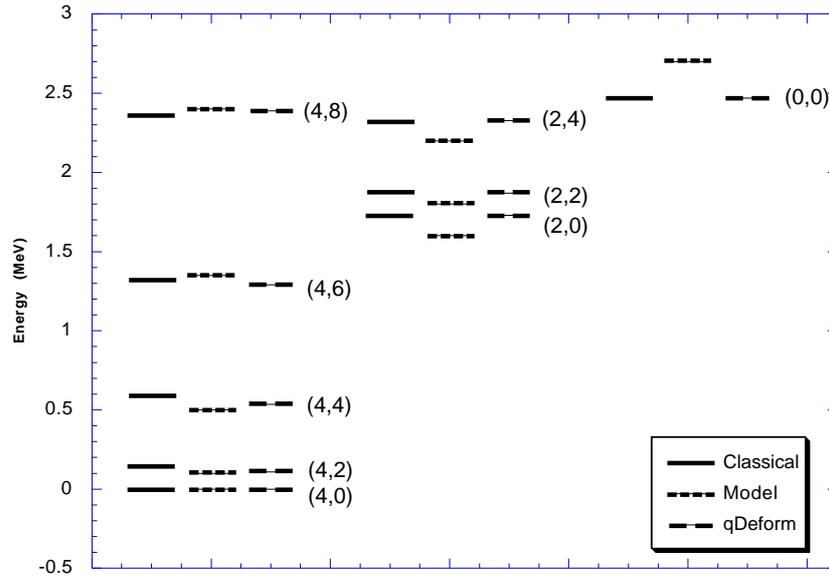
Собствените му стойности се получават чрез собствените стойности на операторите на Casimir,

$${}_q H | l, M \rangle = E_{l,M} | l, M \rangle.$$

Те зависят от независимите параметри  $A_r, B_r$  и от параметъра на деформацията  $\tau$  съгласно определението му като  $q = \exp \tau$ ,  $[x] = \sinh(x\tau)/\sinh \tau$ . Стойностите на недеформираните енергии се определят само от два параметъра  $A_r, B_r$ :

$$E_{cl(l,M)} = A_r (l(l+1) - 20) + B_r M^2.$$

Сравнението на енергетичните стойности на състоянията  $| l, M \rangle$  в  $q$ -деформираната и “класическата теория” илюстрирани на Фигура 10.1 показва, че отклоненията от



Фигура 10.1: Схема на енергетичните нива на моделен ротатор за  $N = 4$  бозона, означени с квантовите числа  $(l, M)$ . Дадени са енергетичните спектри на  $q$ -деформирания случай и класическата му граница.

типичните моделни стойности, в квантовия случай са много по-малки от колкото в “класическия”. Следователно може да се счита, че квантовата теория дава по добро описание на нивата от ротационния спектър, отколкото недеформирания модел, въпреки че стойността на параметъра на деформация  $\tau = -0.0071$  е твърде малка. Ролята на деформацията в този случай, но с комплексни стойности на  $q$  е изследвана в [128], като неговата физическа интерпретация е свързана с параметъра на “мекост” (свиваемост) на модела с променящ се инерчен параметър.

### 10.3 Вибрационна граница

Унитарната симетрия генерирана от произведенията на операторите  $b_m^\dagger$  и  $b_m$ ,  $m = \pm 1$  определя  $q$ -деформирания подгрупа  $U_{\bar{q}}(2)$ , която влиза в каноническата редукция  $U_{\bar{q}}(3) \supset U_{\bar{q}}(2)$ . Всеки от множителите  $b_{\pm 1}^\dagger$ ,  $b_{\pm 1}$  може да се разглежда като компонента на НТО от ранг 1/2 (спинор). Явния вид на  $U_{\bar{q}}(2)$  представянето определено от  $b_m^\dagger$  и  $b_m$ ,  $m = \pm 1$  се дава от операторите

$$I_{+1} = b_{+1}^\dagger b_{+1}, \quad I_{-1} = b_{-1}^\dagger b_{-1}, \quad I_0 = \frac{1}{[2]_4} \left( q^3 b_{+1}^\dagger b_{-1} - q^{-3} b_{-1}^\dagger b_{+1} \right), \quad (10.1)$$

$$[N] = \left( q^{-1} b_{+1}^\dagger b_{-1} + q^1 b_{-1}^\dagger b_{+1} \right) = [N_1 + N_{-1}]_4, \quad (10.2)$$

където  $[X]_4 = (q^{4x} - q^{-4x}) / (q^4 - q^{-4})$ . Операторите (10.2) комутират като обикновена алгебра на Ли ( $k = 0, \pm 1$ )

$$[I_{+1}, I_{-1}] = [2]_4 I_0 q^{-8J_0}, \quad [I_0, I_k] = k q^{-4k} I_k q^{-8J_0}, \quad [[N], I_{0,k}] = 0, \quad k = \pm 1,$$

и удовлетворяват съотношения на спрягане

$$(I_k)^\dagger = I_{-k}, \quad k = 0, \pm 1 .$$

Скаларът  $[N]$  генерира  $q$ - деформираната подгрупа  $U_{\bar{q}}(1)$  и е оператор на Casimir от първи порядък на  $U_{\bar{q}}(2)$ , която  $U_{\bar{q}}(2) = SU_{\bar{q}}(2) \otimes U_{\bar{q}}(1)$ . Инвариантът от втори порядък, определен да комутира с генераторите  $I_{\pm 1,0}$  има следния вид

$$C_2 = \frac{1}{[2]}(q^{-4}I_{+1}I_{-1} + q^4I_{-1}I_{+1}) + I_0I_0 . \quad (10.3)$$

Той може да се трансформира така че да бъде изразен чрез самоспрегнатия генератор на  $U_{\bar{q}}(2)$  по следния начин

$$C_2 = \frac{[N]_4 [N + 2]_4}{[2]_4 [2]_4}; \quad N = N_+ + N_- . \quad (10.4)$$

Състоянията на двумерния осцилатор се конструират чрез действието на операторите  $b_{\pm 1}^\dagger$  върху вакуумното състояние  $|0\rangle$ , определено от съотношенията  $b_-|0\rangle = 0$ ,  $N_i|0\rangle = 0$  с  $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ . Ортонормалните състояния за всяко представяне с фиксирано  $n = n_+ + n_-$  са:

$$|n_+, n_-\rangle = c(n_+, n_-) (b_+^\dagger)^{n_+} (b_-^\dagger)^{n_-} |0\rangle , \quad (10.5)$$

където очевидно операторите  $N_{\pm}$  дават

$$N_{\pm 1}|n_+, n_-\rangle = n_{\pm} c(n_+, n_-) (b_+^\dagger)^{n_+} (b_-^\dagger)^{n_-} |0\rangle ,$$

от което веднага следва, че

$$J_0|n_+, n_-\rangle = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle .$$

За да получим действието на генераторите (10.1) върху базисните състояния е необходимо да използваме комутационните съотношения (??) дадени в

$$b_k (b_l^\dagger)^n = q^{-2(k-l)n} (b_l^\dagger)^n b_k + \delta_{k,-l} q^{-\frac{1}{2}(k-l)} [n]_4 (b_l^\dagger)^{n-1} q^{-8J_0} , \quad (10.6)$$

и следните диагонални резултати

$$I_0|n_+, n_-\rangle = \frac{1}{[2]_4} \{q^{4(n_++1)} [n_+]_4 - q^{-4(n_++1)} [n_-]_4\} |n_+, n_-\rangle \quad (10.7)$$

и

$$[N]|n_+, n_-\rangle = \{q^{4n_-} [n_+]_4 + q^{-4n_+} [n_-]_4\} |n_+, n_-\rangle \quad (10.8)$$

$$= [n_+ + n_-]_4 |n_+, n_-\rangle . \quad (10.9)$$

За да определим действието на повишаващите и понижаващите генератори  $I_{\pm}$ , е необходимо първо да се определи нормировъчния множител  $c(n_+, n_-)$  от (10.5). Приемайки, че този фактор е реален с помощта на математическа индукция получаваме

$$c(n_+, n_-) = \left[ q^{4n_+n_-} q^{\frac{1}{4}(n_+ - n_-)} \sqrt{[n_+]_4! [n_-]_4!} \right]^{-1/2}. \quad (10.10)$$

В резултат, действието на операторите  $I_{\pm}$  върху нормализираните състояния на базиса (10.5) се дава от

$$\begin{aligned} I_+ |n_+, n_-\rangle &= q^{2(n_- - n_+ + 1)} \sqrt{[n_+]_4 [n_- + 1]_4} |n_+ - 1, n_- + 1\rangle \\ I_- |n_+, n_-\rangle &= q^{2(n_- - n_+ - 1)} \sqrt{[n_+ + 1]_4 [n_-]_4} |n_+ + 1, n_- - 1\rangle. \end{aligned}$$

Наборът от състояния  $\{|n_+, n_-\rangle\}$  съставя ортонормалния базис в пространството на състоянията  $\mathcal{H}$ . Това пространство се редуцира по отношение на  $N$  зададено от израза (10.2) на подпространства  $\mathbb{H} = \bigoplus \mathbb{H}_n$ , като всяка компонента от него се определя от фиксирана стойност на  $n = n_+ + n_-$ , където  $N|n_+, n_-\rangle = n|n_+, n_-\rangle$ . Така всяко от тези подпространства се характеризира от действието на едно неприводимо представяне на  $q$ -деформираната  $su(2)$  алгебра. По този начин  $q$ -деформираното  $su(2)$  представяне се редуцира на пряка сума от неприводими представяния, осъществяващи пълното описание на всички възможни  $su(2)$  представяния са дадена деформация.

Енергетичните стойности на състоянията от системата притежаващи  $U_{\tilde{q}}(2)$  симетрия са собствените стойности на  $q$ -деформирания хамилтониан

$${}_q H |n, M\rangle = E_{n,M} |n, M\rangle$$

изразен чрез инвариантите на Casimir на подгрупите от  $U_{\tilde{q}}(2)$  редицата

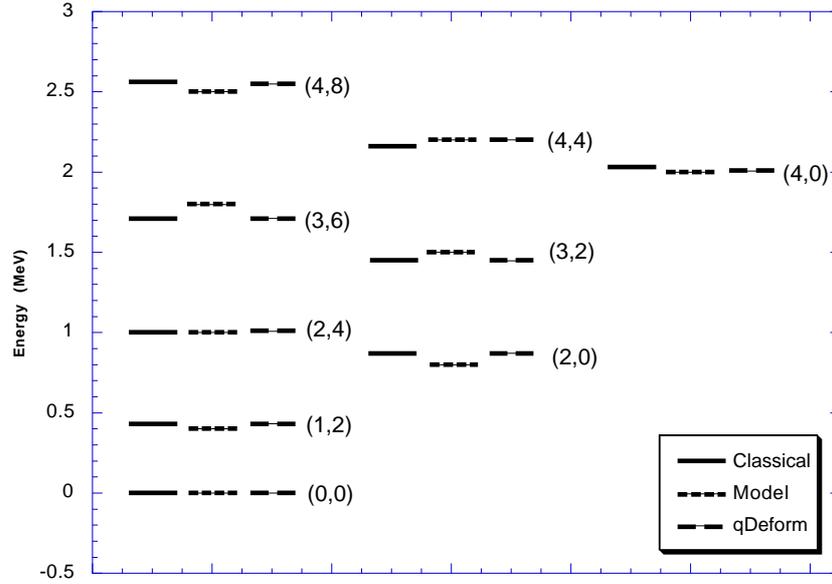
$${}_q H = A_v [N] + B_v C_2 + D_v (I_0)^2. \quad (10.11)$$

(10.11) зависи от три независими параметъра  $A_v, B_v$  и  $D_v$  и от деформационния параметър  $\tau (q = \exp \tau)$ . Недеформираните енергетични стойности

$$E_{cl(n,M)} = \tilde{A}_v n_d + \tilde{B}_v n_d^2 + \tilde{D}_v M^2. \quad (10.12)$$

се дават само от три параметъра. Развивитието на хамилтониана (10.11) в степенен ред относно малки стойности на  $\tau N$ , като следователно  $\tau M$  и  $\tau$  също са малки, води до нетривиални корекции на (10.12):

$$\begin{aligned} {}_q H &= A_v [N] + B_v C_2 + D_v (I_0)^2 \\ &\approx \tilde{A}_v N + \tilde{B}_v N^2 + \tilde{D}_v M^2 + \tilde{S}_v MN, \end{aligned}$$



Фигура 10.2: Схема на енергетичните нива на моделен вибратор за  $N = 4$  бозона, означени с квантовите числа  $(n, M)$ . Дадени са енергетичните спекти на  $q$ -деформирания случай и класическата му граница.

където недеформираните параметри  $\tilde{A}_\nu, \tilde{B}_\nu, \tilde{D}_\nu$  се изразяват чрез деформираните  $A_\nu, B_\nu, D_\nu$  и малкия параметър  $\tau$  по следния начин:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\nu &= \left( A_\nu + \frac{1}{2}B_\nu \right) - \left( \frac{1}{6}A_\nu + \frac{16}{3}B_\nu \right) \tau^2 + O(\tau^4), \\ \tilde{B}_\nu &= \frac{1}{16}B_\nu + \left( \frac{2}{3}B_\nu + 4D_\nu \right) \tau^2 + O(\tau^4), \\ \tilde{D}_\nu &= \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{3}\tau^2 \right) D_\nu + O(\tau^4), \\ \tilde{S}_\nu &= \left( \tau - \frac{32}{3}\tau^3 \right) D_\nu + O(\tau^5).\end{aligned}$$

Това показва, че силата на анхармоничност, която се определя от коефициента  $\tilde{B}_\nu$  пред оператора  $N^2$  се модифицира от члена  $D_\nu$ , който дава силата на “финното разцепване” на енергиите предизвикано от  $M^2$  и един допълнителен член  $MN$  със сила  $\tilde{S}_\nu$ , която е равна на  $\tau D_\nu$  при малки деформации. С помощта на нелинейните членове по  $\tau$  и членовете които определят енергиите на главите на ивиците, в  $q$ -деформираната версия на тази граница на модела се получава по точно описание на енергиите.

Енергетичните нива определени от “класическата” и  $q$ -деформираната теории са сравнени с типичен спектър с квадруполни осцилации на Фигура 10.2. Резултатите в квантовия случай са по-добри от тези в недеформирания. Трябва да се отбележи, че стойността на деформационния параметър  $\tau = 0.01065$  е на порядък по-голяма от тази в ротационната граница на теорията. Тези резултати показват, че деформи-

раната теория с реално  $q$  е по-подходяща за обяснение на свойствата на ядрените системи с вибрационен спектър, отколкото “класическия” подход.

В настоящото приложение се използва деформираната  $su(3)$  алгебра, означена като  $su_q(3)$  и получена чрез проекционен метод с помощта на  $q$ -аналози на тензорни оператори, така че да дава аналогична на “класическата” редукция до алгебрата на ъгловия момент  $so(3)$ . По този начин е получен и деформиран квадруполен оператор, който води до  $q$ -деформирано обобщение на  $SU(3)$  модела на Elliott [38]. Тази конструкция е използвана за получаването на  $q$ -деформирана версия на точно решим двумерен пробен модел на взаимодействащите бозони - МВБ [127]. За него полученото  $SU_q(3)$  е  $q$ -динамична група на симетрия. Изследвани са двете възможни редукции по подгрупи, отговарящи на ротационната и вибрационна граница на теорията. Получените резултати позволяват да се определят граничните случаи на модела и да се анализира ролята на  $q$ -деформацията в контекста на ядрените колективни степени на свобода [129].



## Част III

$Sp(4)$  модел на сдвояване и  
деформираното му обобщение



## 11. Алгебричен модел на сдвояване с $Sp(4)$ симетрия и деформираната му версия

Задачата за сдвояването, която е разгледана първо в атомната физика [130, 131], по-късно се въвежда в ядрената физика [51, 132, 133] с цел да се опишат енергиите на свързване (binding energies) на ядрата и тяхния ниско лежащ вибрационен спектър [134, 135]. Възобновения напоследък интерес към сдвояващите корелации в атомните ядра е свързан с необходимостта от надеждна микроскопична теория за описание на структурата на средно тежките ядра около линията с  $N = Z$ , където протоните и неутроните заемат един и същи главен слой и техните взаимодействия се очаква да повлияят силно върху структурата и начините на разпад на такива ядра. Възраждането на интереса към сдвояващите корелации е предизвикан също и от експериментите с радиоактивни снопове, чрез които напредват изследванията на “екзотичните” ядра, като тези с недостиг на неутрони или с  $N \approx Z$ , далеч от долината на стабилност. Също така, такава микроскопична теория е необходима при астрофизическите приложения, например при описанието на  $rp$ -процеса при нуклеосинтеза, който протича близо до протонно богатата страна спрямо линията на стабилност чрез последователност от реакции на протонно захващане и се състезава с  $\beta$  разпадите [136, 137].

Освен приблизителните решения на проблема следващи от теорията на средното поле (виж обзор в [138]), задачата за сдвояването се решава точно с помощта на различни групово теоретични методи, които позволяват да се изследват лежащите в основата ѝ симетрии.  $SU(2)$  модела на старшинството (seniority model) [62, 70, 71, 139] дава добро описание на ядрата със значително преобладаващ брой на неутроните или протоните, където нуклоните от един и същи вид играят голяма роля. Елементарния “квазиспинов” ( $SU(2) \sim Sp(2)$ ) подход [140] не само предлага един елегантен начин да се разберат резултатите от конвенционалната схема на старшинствата [51, 63, 130, 131], основана на  $U(2j+1) \supset Sp(2j+1) \supset SO(3)$ , но и позволява директно разширение до  $SO(5) \sim Sp(4)$  което включва протоните и неутроните, което се оказва, че е доста сложно да се направи по друг начин. Обобщението до  $SO(5)$  модела [48, 57–59, 141, 142] въвежда връзка между сдвояването на протон с неутрон ( $pn$ ) и частици от един и същи вид, чрез изовекторните (с изоспин  $\tau = 1$ ) сдвояващи взаимодействия. Добавянето на изоскаларен ( $\tau = 0$ )  $pn$  сдвояващ канал се описва в рамките на  $SO(8)$

модел [143–145] и на модела на взаимодействиящите бозони (МВБ) [146].

В границата на преобладаващи изовекторни  $pn$  сдвояващи корелации е подходящ обикновен  $SO(5)$  модел на старшинството [60, 61]. Нашата цел е да изследваме свойствата на изовекторното сдвояващо взаимодействие на основата на фермионната реализация на симплектичната  $sp(4)$  алгебра [която е изоморфна на  $so(5)$ ]. Моделното пространство се състои от  $J^\pi = 0^+$  състояния от двойки куплирани до изоспин  $\tau = 1$ ; смесване с  $\tau = 0$   $pn$  двойки не се включва. Важността на изовекторното сдвояване за описанието на енергиите на свързване се разкрива от експерименталните данни, а именно  $\tau = 1$  основно състояние за повечето  $N = Z$  нечетно-нечетни ядра с масови числа  $A > 40$  [147–149], и от резултатите на редица теоретични изследвания [149–158].

Въпреки че, куплирането с изоскаларните сдвояващи моди може да е важно в някои случаи [159, 160], ние, доколкото това ни е възможно, изключваме основните състояния на ядра, които показват следи от изоскаларни сдвояващи корелации. На кратко,  $Sp(4)$  модела се прилага към  $0^+$  основните състояния на ядрата с четни  $A$  и към по-високо лежащите  $0^+$  изобарни аналози в повечето нечетно-нечетни ядра. Именно тези състояния наричаме *изовекторно сдвоени* състояния. В това отношение е важно да отбележим, че двучастияното взаимодействие включва допълнително и изоскаларен член към преобладаващото изовекторно сдвояващо взаимодействие. Изоскаларната  $pn$  сила е свързана с енергията на симетрия и е диагонална в изовекторно сдвоените базисни състояния с добър изоспин [161]. Диагонални компоненти на ядреното взаимодействие с високи  $J$  стойности също присъстват в модела. Слоестата структура и нейната размерност също играят важна роля при създаването на фермионните двойки и тяхното взаимодействие в съгласие с принципа на Pauli. Приема се, че членът с изовекторно сдвояване е симетричен по отношение на частиците и дупките, което се изявява като намаляване на енергията по отношение на решенията от теорията на средното поле, в която дупките не се въвеждат [162].

Граничните случаи на  $sp(4)$ , отговарящи на различни редукции на  $sp(4)$  до  $u(2)$  разкриват различните свойства на различните видове сдвояване участващи в изовекторното сдвояващо взаимодействие; по точно протон-неутронното ( $pn$ ) и сдвояването на частици от един и същи тип ( $pp$  and  $nn$ ). Теорията дава възможност и за класификация на ядрените състояния по отношение на броя валентни протони и неутрони заемащи даден главен слой. Понятието за динамична симетрия разширява тази картина, като включва нарушаващо изоспина феноменологично взаимодействие, което е свързано с общия микроскопичен хамилтониан на задачата за сдвояването. Крайния резултат може да бъде написан в термини на инвариантите от втори порядък на подалгебрите на  $sp(4)$ , които по този начин свеждат проблема до точно решима теория.

Въведена е и  $q$ -деформация на класическата алгебрична структура. Реализирано е квантовото разширение на подхода основан на динамична симетрия, което също води до точно  $q$ -деформирано решение на проблема в граничните случаи. Мотивацията на  $q$ -деформираното обобщение е, че като нов и по-богат модел, то позволява да се включат нелинейни характеристики на взаимодействието и да се изследват съответните промени, които се налагат на параметрите на силите на взаимодействията и на сдвояващите процепи (pairing gaps). Съществуващите приложения на  $q$ -деформирани алгебрични структури към проблема за сдвояването [163] са ограничени главно до  $SU_q(2)$  границата [67, 68] на динамичната симетрия, която ние разширяваме до  $Sp_q(4)$ .

Напълно сдвоените четно-четни и нечетно нечетни ядра с  $32 \leq A \leq 100$ , на  $1d_{3/2}$ ,  $1f_{7/2}$  и  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  орбиталите се разглеждат обстойно в това изследване. Анализ на резултатите получени чрез фитиране на моделните параметри към експерименталните данни в деформирания и недеформирания случаи, позволява разумно предсказание на енергиите на съответни  $0^+$  състояния на ядрата класифицирани като принадлежащи на даден главен слой и дава възможност за изясняване на тяхната структура на сдвояване и смесването на изоспина в тях. Получават се също и твърде широките граници на приложимост на такъв прост алгебричен модел и неговото деформирано разширение, което е в добро съгласие с резултатите и на други теоретични подходи описващи явлението сдвояване в ядрените системи [60, 63, 161, 164–166].

### 11.1 Алгебрична структура на недеформираната и $q$ -деформираната $sp(4)$

За да въведем използваните означения ние напомним алгебричната структура, която е основно изведена в [A5, B5] и е представена в Глава 5. Алгебрата  $sp(4)$  е реализирана в термини на фермионни оператори на раждане (унищожение)  $c_{m,\sigma}^\dagger$  ( $c_{m,\sigma}$ )  $\sigma = \pm 1$ , които създават (премахват) частица от тип  $\sigma$  в състояние с пълен ъглов момент  $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, m$  по оста  $z$  ( $-j \leq m \leq j$ ), които удовлетворяват Fermi антикомутиционни съотношения (5.1) и ермитовото им спрягане се дава от  $(c_{m,\sigma}^\dagger)^* = c_{m,\sigma}$ . За дадено  $\sigma$ , размерността на фермионното пространство е  $2\Omega_j = 2j + 1$ .

Деформацията на тази алгебра  $sp_q(4)$  се въвежда в термини на  $q$ -деформирани оператори на раждане и унищожение  $\alpha_{m,\sigma}^\dagger$  и  $\alpha_{m,\sigma}$ ,  $(\alpha_{m,\sigma}^\dagger)^* = \alpha_{m,\sigma}$ , където  $\alpha_{m,\sigma}^{(\dagger)} \rightarrow c_{m,\sigma}^{(\dagger)}$  в границата  $q \rightarrow 1$ . Деформираните едночастични оператори се определят чрез техните антикомутиционни съотношения (5.45) за всяко  $\sigma$  и  $m$  [A5], като по дефиниция  $q$ -антикомутатора се дава от  $\{A, B\}_{q^k} = AB + q^k BA$ . Свойство със значение за физическите приложения е зависимостта на антикомутиционните съотношения от размерите на слоя и операторите на броя на частиците,  $N_{\pm 1} = \sum_{m=-j}^j c_{m,\pm 1}^\dagger c_{m,\pm 1}$ .

**Генератори на симплектичната група.** – Тук ще дадем отново, но в малко по различен вид, генераторите на  $Sp(4)$  и  $Sp_q(4)$  изразени в термини на недеформирани [8, 48, 57, 58] и деформирани едночастични оператори [A5], съответно,

$$\left. \begin{aligned} A_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} c_{m,\sigma}^\dagger c_{-m,\sigma'}^\dagger \\ B_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} c_{-m,\sigma} c_{m,\sigma'} \end{aligned} \right\} \text{ недеформирани} \quad (11.1)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{m,\sigma}^\dagger \alpha_{-m,\sigma'}^\dagger \\ G_{\frac{\sigma+\sigma'}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j(1+\delta_{\sigma,\sigma'})}} \sum_{m=-j}^j (-1)^{j-m} \alpha_{-m,\sigma} \alpha_{m,\sigma'} \end{aligned} \right\} \text{ деформирани} \quad (11.2)$$

където  $\sigma, \sigma' = \pm 1$  и  $A_{0,\pm 1} = (B_{0,\pm 1})^\dagger$ ,  $F_{0,\pm 1} = (G_{0,\pm 1})^\dagger$ . Тези оператори раждат (унищожават) двойка фермиони сдвоени до общ ъглов момент и четност  $J^\pi = 0^+$  [48, 51, 57, 58] и по този начин представляват обекти подобни на бозони. Останалите генератори на  $Sp(4)$  са  $D_{\sigma,\sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j}} \sum_{m=-j}^j c_{m,\sigma}^\dagger c_{m,\sigma'}$ , и за  $Sp_q(4)$  те са  $E_{\pm 1, \mp 1} = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_j}} \sum_{m=-j}^j \alpha_{m,\pm 1}^\dagger \alpha_{m,\mp 1}$ , в допълнение на операторите на броя на частиците,  $N_{\pm 1}$ , които остават недеформирани в тази реализация на  $sp_q(4)$ . Десетте недеформирани (деформирани) генератори затварят симплектичната  $sp_{(q)}(4)$  алгебра с комутационни съотношения дадени в [A5]. За приложение в теорията на ядрената структура се използва набора от  $q$ -деформирани комутационни съотношения, който е симетричен по-отношение на замяната на параметъра на деформация  $q \leftrightarrow q^{-1}$ .

**Физическа интерпретация на генераторите** – Когато се разглежда като динамична симетрия симплектичната група  $Sp(4)$  може да се използва за описанието на отчетливо изразени колективни ядрени явления чрез различните възможни интерпретации на квантовото число  $\sigma$  в редуцията  $Sp(4) \supset U(1) \otimes SU(2)$ . Когато  $\sigma$  се използва за да различава протони ( $\sigma = 1$ ) от неутрони ( $\sigma = -1$ ), картановите генератори на  $Sp(4)$  групата  $N_{\pm 1}$  (със собствени стойности  $N_{\pm}$ ) участват като определящи броя на валентните протони и валентните неутрони, съответно.

Важните редуционни граници на  $sp_{(q)}(4)$  са сумирани за недеформирания и  $q$ -деформирания случаи в Таблица 11.1, където по дефиниция  $[X]_k = \frac{q^{kX} - q^{-kX}}{q^k - q^{-k}}$  и  $\rho_{\pm} = (q^{\pm 1} + q^{\pm \frac{1}{2\Omega}})/2$ . Таблица 11.1 съдържа четири различни реализации на двумерната унитарна подалгебра  $u_{(q)}^\mu(2) \supset u^\mu(1) \oplus su_{(q)}^\mu(2)$  ( $\mu = \{\tau, 0, \pm\}$ ) и съответните оператори на Casimir от втори порядък на  $su_q(2)$ . “Класическите” им аналози се получават в границата, когато  $q$  клони към 1. В първата реализация,  $su^\tau(2)$ , генераторите  $\tau_{0,\pm}$  се асоциират с компонентите на изоспина на валентните частици.  $SU^0(2)$  границата описва протон-неутронните двойки ( $pn$ ), докато  $SU^\pm(2)$  границата е свързана със сдвояването между идентични частици, протон-протонни ( $pp$ ) и неутрон-неутронни ( $nn$ ) двойки.

Таблица 11.1: Реализация на унитарните подалгебри на  $sp_{(q)}(4)$ : изоспинова симетрия ( $\mu = \tau$ ),  $pn$  ( $\mu = 0$ ) и  $pp(nn)$  ( $\mu = \pm$ ) сдвояване, заедно със съответните оператори на Casimir на  $su_q^\mu(2)$ .

$\mu$	$u^\mu(1)$	$su^\mu(2)$	$su_q^\mu(2)$	$\mathbf{C}_2(su_q^\mu(2)) \doteq \mathbf{C}_{2,q}^\mu$
$\tau$	$N = N_{+1} + N_{-1}$	$\tau_\pm \equiv D_{\pm 1, \mp 1}$ $\tau_0 \equiv \frac{N_1 - N_{-1}}{2}$	$T_\pm \equiv E_{\pm 1, \mp 1}$ $T_0 \equiv \tau_0$	$\Omega_j(\{T_+, T_-\} + \left[\frac{1}{\Omega_j}\right] [T_0]_{\frac{2}{2\Omega_j}}^2)$
0	$\tau_0$	$A_0, B_0$ $D_0 \equiv \frac{N}{2} - \Omega_j$	$F_0, G_0$ $K_0 \equiv D_0$	$\Omega_j(\{G_0, F_0\} + \left[\frac{1}{\Omega_j}\right] [K_0]_{\frac{2}{2\Omega_j}}^2)$
$\pm$	$N_{\mp 1}$	$A_{\pm 1}, B_{\pm 1}$ $D_{\pm 1} \equiv \frac{N_{\pm 1} - \Omega_j}{2}$	$F_{\pm 1}, G_{\pm 1}$ $K_{\pm 1} \equiv D_{\pm 1}$	$\frac{\Omega_j}{2}(\{G_{\pm 1}, F_{\pm 1}\} + \rho_\pm \left[\frac{2}{\Omega_j}\right] [K_{\pm 1}]_{\frac{2}{\Omega_j}}^2)$

Обобщаването на проблема за сдвояването в пространството на няколко слоя [59, 62, 63] води до естествено развитие на фермионната реализация на  $sp(4)$  алгебрата, позволяващо нуклоните да заемат пространство от няколко орбити (вж. Глава 6 [A6]). Комутационните съотношения между десетте недеформирани (деформирани) генератори на обобщената  $Sp_{(q)}(4)$  и на свързаните алгебрични изрази (изведени в реализацията за едно ниво в [A5]) остават почти същите като се използва субституцията  $\Omega_j \rightarrow \Omega$ , където  $2\Omega = \sum_j 2\Omega_j = \sum_j (2j + 1)$ .

## 11.2 Теоретичен модел с $Sp(4)$ динамична симетрия

### 11.2.1 Модели на сдвояването: от $SU(2)$ до $Sp(4)$

Отдавна е прието, че основните състояния на четно-четните ядра отразяват силно природата на ядреното взаимодействие, и по-специално тенденцията да се образуват силно свързани до ъглов момент  $J = 0$  двойки [111, 132]. Отдавна е известно също така, че ниско лежащия спектър на двойно магическите сърцевини (като  $^{40}\text{Ca}$  или  $^{56}\text{Ni}$ ) може да бъде възпроизведен добре като към спектъра на състоянията на ядката се добави неутронна двойка <sup>1</sup>. В пълна аналогия с това, ако към основното състояние на сърцевината се добавят двойки от нуклони с  $J = 0$ ,  $T = 1$  (два протона  $pp$ , два неутрона  $nn$ , или протон и неутрон  $pn$ ), може да се конструират напълно сдвоени състояния, които изобщо казано отразяват близкото взаимодействие на двойките от еднакви частици и  $pn$  двойки. Ако изоспинът е (почти) добро квантово число, което е типично за нисколежащите състояния на леките и средно-тежките ядра с четно  $A$  и с валентни протони и неутрони запълващи едновременно един и същи главен слой, напълно сдвоените  $0^+$  състояния, построени по този на-

<sup>1</sup> Без да се разваля теорията, може да се счита, че затворените слоеве са част от инертна сърцевина, която е сферична и не влияе пряко на едночастичното движение на валентните нуклони в последния незапълнен слой.

чин описват изобарово аналоговите  $0^+$  състояния (*ИАС*) на ядрата от цялия слой. В масовата област  $32 < A < 100$  където влиянието на деформацията на формата на тези  $0^+$  *ИАС* е сравнително слабо, понятието за напълно сдвоени (със старшинство нула) състояния дава валидна, макар и приблизителна картина. Докато в четно-четните ядра от тази област основните състояния са такива напълно сдвоени  $0^+$  състояния, това не е винаги така за нечетно-нечетните ядра. Силното протон-неутронно взаимодействие, обикновено смъква най-ниско състоянието с най-малка симетрична енергия ( $\sim T^2$ , където  $T$  е ядрения изоспин). Обаче целта на предлагания модел не е да се изследват такива състояния. В същност ние изследваме изобарно аналоговото  $0^+$  състояние, което е типично по-високо по енергия и е силно зависимо от изовекторните сдвояващи корелации. Въпреки че състоянията са представени чрез  $J = 0$  двойки, взаимодействието, което ги поражда не е изключително и само в  $J = 0$  канала, но трябва да включва и важното  $pn$   $J_{\text{нечетно}} \geq 1$  изоскаларно ( $T = 0$ ) взаимодействие. Значителното взаимодействие между тези изовекторно и изоскаларно взаимодействия е очевидно в нисколежащата структура на  $N = Z$  нечетно-нечетните ядра и е обект на голям брой експериментални [147–149, 167] и теоретични [150, 151, 153, 155–160, 168, 169] изследвания.

$0^+$  състоянията със старшинство нула могат да се конструират като ( $T = 1$ )-сдвоени фермиони

$$|n_{+1}, n_0, n_{-1}\rangle = \left(\hat{A}_{+1}^\dagger\right)^{n_{+1}} \left(\hat{A}_0^\dagger\right)^{n_0} \left(\hat{A}_{-1}^\dagger\right)^{n_{-1}} |0\rangle, \quad (11.3)$$

където  $n_{+1,0,-1}$  са броя на  $J = 0$  двойките от всеки вид,  $pp$ ,  $pn$ ,  $nn$ , съответно, и  $|0\rangle$  означава вакуумното състояние. Операторът на преход, който променя броя на частиците с две,  $\hat{A}_{0,+1,-1}^\dagger$ , ражда протон-неутронна ( $pn$ ), протон-протонна ( $pp$ ) или неутрон-неутронна ( $nn$ ) двойка с общ ъглов момент  $J^\pi = 0^+$  и изоспин  $T = 1$ . Всеки оператор  $\hat{A}_\mu^\dagger$ ,  $\mu = 0, +1, -1$ , заедно с неговия спрегнат  $\hat{A}_\mu$ , който унищожава двойка, и оператора на броя на двойките генерират една  $SU^\mu(2)$  подгрупа на  $Sp(4)$ , която в случая  $\mu = \pm$  е стандартната сдвояваща еднакви частици  $SU(2)$  група на Kerman [62].

Таблица 11.2: Класификационна схема на ядрата от  $\Omega_{3/2} = 2$  пространството.

$n \setminus i$	2	1	0	-1	-2
0			${}_{16}^{32}S_{16}$		
2		${}_{16}^{34}Ar_{16}$	${}_{17}^{34}Cl_{17}$	${}_{16}^{34}S_{18}$	
4	${}_{20}^{36}Ca_{16}$	${}_{17}^{36}K_{17}$	${}_{18}^{36}Ar_{18}$	${}_{17}^{36}Cl_{19}$	${}_{16}^{36}S_{20}$
6		${}_{20}^{38}Ca_{18}$	${}_{19}^{38}K_{19}$	${}_{18}^{38}Ar_{20}$	
8			${}_{20}^{40}Ca_{20}$		

Таблица 11.3: Класификационна схема на ядрата от  $\Omega_{7/2} = 4$  пространството. Формата на таблицата е симетрична по отношение на знака на  $i$  и на  $n - 2\Omega$ . Базисните състояния за всяко ядро са означени с броя на двойките от всеки вид  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle$ .

$n \setminus i$	0	-1	-2	-3	-4
0	$ 0, 0, 0\rangle$ ${}^{40}_{20}Ca_{20}$				
2	$ 0, 1, 0\rangle$ ${}^{42}_{21}Sc_{21}$	$ 0, 0, 1\rangle$ ${}^{42}_{20}Ca_{22}$			
4	$ 1, 0, 1\rangle$ $ 0, 2, 0\rangle$ ${}^{44}_{22}Ti_{22}$	$ 0, 1, 1\rangle$ ${}^{44}_{21}Sc_{23}$	$ 0, 0, 2\rangle$ ${}^{44}_{20}Ca_{24}$		
6	$ 1, 1, 1\rangle$ $ 0, 3, 0\rangle$ ${}^{46}_{23}V_{23}$	$ 1, 0, 2\rangle$ $ 0, 2, 1\rangle$ ${}^{46}_{22}Ti_{24}$	$ 0, 1, 2\rangle$ ${}^{46}_{21}Sc_{25}$	$ 0, 0, 3\rangle$ ${}^{46}_{20}Ca_{26}$	
8	$ 2, 0, 2\rangle$ $ 1, 2, 1\rangle$ $ 0, 4, 0\rangle$ ${}^{48}_{24}Cr_{24}$	$ 1, 1, 2\rangle$ $ 0, 3, 1\rangle$ ${}^{48}_{23}V_{25}$	$ 0, 2, 2\rangle$ $ 1, 0, 3\rangle$ ${}^{48}_{22}Ti_{26}$	$ 0, 1, 3\rangle$ ${}^{48}_{21}Sc_{27}$	$ 0, 0, 4\rangle$ ${}^{48}_{20}Ca_{28}$

Докато симплектичната група  $Sp(4)$  включва в себе си добре известната симетрия на сдвояването на еднакви частици,  $Sp(4) \supset SU^+(2) \otimes SU^-(2)$ , тя вкарва в теорията и значителното взаимодействие между протоните и неутроните чрез редуционните редици  $Sp(4) \supset U^\mu(2) \supset U^\mu(1) \otimes SU^\mu(2)$  с  $\mu = 0$  (симетрия на протон-неутронното сдвояване) и  $\mu = T$  (изоспинова симетрия). Тези групови редукции позволяват  $Sp(4)$ -инвариантните изродени енергетични състояния да се разцепят, което е и случаят от физически интерес. Тази динамична симетрия, която нашия модел притежава, дава възможност и за естествена класификационна схема на ядрата, принадлежащи на едно  $j$  ниво или на главен слой (няколко- $j$ ), които се изобразяват върху алгебричните мултиплети. Тази класификация се отнася също за основните и възбудените състояния на съответните ядра.

В деформирания и недеформирания случаи, базисните състояния  $|n_1, n_0, n_{-1}\rangle_{(q)}$  (11.3) дават изовекторно сдвоените  $0^+$  състояния на ядро с  $N_+ = 2n_1 + n_0$  валентни протони и  $N_- = 2n_{-1} + n_0$  валентни неутрони. Това позволява едновременно класификация на ядрата от даден главен слой и на съответстващите им изовекторно сдвоени състояния. Класификационната схема е илюстрирана за простия случаи на  $1d_{3/2}$  слоя с  $\Omega_{j=3/2} = 2$  (Таблица 11.2) и  $1f_{7/2}$  с  $\Omega_{j=7/2} = 4$  (Таблица 11.3). Общият брой

валентни частици,  $n = N_+ + N_-$ , номерира редовете и собствените стойности  $i$  на третата проекция на изоспина  $\tau_0$  номерират колоните. Изотопите на даден елемент са разположени по посока на дясните диагонали, изотоните по лявите диагонали, а редовете съдържат изобари за дадено масово число. Формата на таблицата е симетрична по отношение на  $i$  (смяната  $n_1 \leftrightarrow n_{-1}$ ), както и по отношение на  $n - 2\Omega$  (средата на слоя). Това е следствие от зарядово независимата природа на взаимодействието и от принципа на Pauli, съответно.

### 11.2.2 Моделен хамилтониан

Най-естествения подход при микроскопичното описание на ядрата, е най-общия хамилтониан на системата с  $Sp(4)$  симетрия, който запазва общия брой частици, да се изрази чрез груповите генератори по следния начин [8]:

$$H = -\epsilon N - GA_0B_0 - F(A_{+1}B_{+1} + A_{-1}B_{-1}) - \frac{1}{2}E(\{\tau_+, \tau_-\} - \frac{N}{2\Omega}) - C\frac{N(N-1)}{2} - D(\tau_0\tau_0 - \frac{N}{4}), \quad (11.4)$$

където  $G, F, E, C$  и  $D$  са феноменологични константи на силите на различните взаимодействия ( $G \geq 0, F \geq 0$  за привличане),  $\epsilon > 0$  е енергията на Fermi нивото.

Важна характеристика на феноменологичния хамилтониан (11.4) е, че той не само нарушава изоспиновата симетрия ( $D \neq \frac{E}{2\Omega}$ ) но и смесва състояния с определени стойности на изоспина ( $F \neq G$ ). Това е важно различие от другите известни приложения на деформираните и недеформираните  $sp(4)$  или  $o(5)$  алгебри с изоспиново инвариантни хамилтониани [48, 57, 58, 60, 69]. Въпреки че степента на смесване се очаква да е по-малка отколкото изоскалар-изовекторното смесване, то все пак може да даде интересен принос при изучаването на изоспиновото смесване [170–172].

Възможните приложения на хамилтониана към реални ядра могат да се определят като предварително се изследват детайлно различните членове участващи в (11.4). Първите два члена ( $G, F$ ) на хамилтониана (11.4) отчитат  $J = 0$  изовекторното сдвояване между неидентичните и идентичните частици, съответно. За да се отрази допускането, че нулевата енергия на сдвояване отговаря на състояние в което е невъзможно да се разкъса двойка частици [162], в тези два члена е включено понятието за частица-дупка, (но не и в  $\epsilon$ -,  $C$ - и  $D$ -членовете). Оператори раждащи (унищожавачи) двойка дупки могат да се въведат не само за двойки от идентични частици ( $pp$  или  $nn$ ) [162], но също и за  $pn$  двойки. Това отговаря на промяна на оператора на броя на частиците в оператор на броя на дупките,  $N_{\pm} \rightarrow 2\Omega - N_{\pm}$  за  $N_{\pm} > \Omega$  и  $N \rightarrow 4\Omega - N$  за  $N > 2\Omega$ .

Следващият член ( $E$ ) може да се свърже с енергията на симетрия (symmetry energy) [48, 57, 58, 63] тъй като неговата средна стойност между състоянията с опре-

делен изоспин е

$$\frac{E}{2} \langle n, \tau, i | \{\tau_+, \tau_-\} | n, \tau, i \rangle = E \left\langle \frac{\tau^2 - \tau_0^2}{2\Omega} \right\rangle = E \frac{\tau(\tau + 1) - i^2}{2\Omega}, \quad (11.5)$$

където първата част включва  $J$ -независимата  $pn$  изоскаларна сила. Той е диагонален в изоспиновия базис и може да се сравнява с [161, 173]. Допълнително, квадратичният по  $\hat{N}$  член може да се разбира като осреднено двучастично взаимодействие между валентните частици (отбележете, че за  $n$  еквивалентни частици има  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  двучастични сдвоявания). От друга гледна точка  $E$ -членът може да се свърже със симетричната енергия [48, 57, 58, 63], тъй като неговия матричен елемент между състояния с определен изоспин е от вида  $T(T + 1)$ , който влиза като симетричен член в много съотношения за ядрените маси [174, 175]. Ние наричаме  $E$ -члена *симетричен член*, макар че е общоприето симетричната енергия да се определя по-малко по-различен начин:  $T(T + 1)$  члена заедно с члена на изоспиновата зависимост на изовекторното сдвояване съдържат и двете: симетричната ( $\sim T^2 \sim (Z - N)^2$ ) и вигнеровата ( $\sim T$ ) енергии [176]. Първият е оригинален за полуемпиричната масова формула на Bethe-Weizsäcker [177, 178] и означава че ядрената симетрична енергия проявява тенденция да се стабилизира за ядрата с  $N = Z$ . Вигнеровата енергия се асоциира с енергията на протон-неутронните обменни взаимодействия и е причината за острия енергетичен връх при  $N = Z$  водещ до по-силното свързване в самоспрегнатите ядра [111]. На кратко, симетричната енергия заедно с линейните по  $\hat{N}$  (11.4) членове могат да се свържат директно с типичните масови формули [177, 178], като в допълнение нашия модел подобрява описанието на изовекторните сдвояващи корелации и на взаимодействията с по-високи  $J$  между идентични и  $pn$  двойки, като използва много съвременна и ефикасна корекция за Coulomb-овото отблъскване [179].

Двучастичното взаимодействие (11.4), което е изразено чрез груповите генератори възниква по естествен начин и в микроскопичния подход. В единичен  $j$  слой неговата форма се дава от [62]

$$H_{int}^j = -\frac{1}{2} \sum_{\{\sigma\}} \langle \sigma_1, \sigma_2 | V | \sigma_4, \sigma_3 \rangle \sum_{M, m, m'} c_{j, m, \sigma_1}^\dagger c_{j, M - m, \sigma_2}^\dagger c_{j, M - m', \sigma_3} c_{j, m', \sigma_4} \quad (11.6)$$

където  $\{\sigma\} = \{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\} = \{(+, +, +, +), (+, -, +, -), (+, -, -, +), (-, -, -, -)\}$ . Коефициентът  $\langle \sigma_1, \sigma_2 | V | \sigma_4, \sigma_3 \rangle$  е средната стойност на потенциала на двучастичното взаимодействие между двойките от квантови числа  $\sigma_4, \sigma_3$  и  $\sigma_1, \sigma_2$ . Втората сума в (11.6) може да се разпише като три члена. Първият от тях съответства на сдвояване до пълен ъглов момент  $J = 0$  ( $M = 0$ ), вторият включва високи  $J$  ( $J \neq 0, m = m'$ ) компоненти на взаимодействието и може да се изрази от  $\{\tau_+, \tau_-\} - N/(2\Omega)$ ,  $N(N - 1)$  и  $\tau_0\tau_0 - N/4$  членовете в моделния хамилтониан.

Останалата част от сумата е остатъчно взаимодействие, което се пренебрегва. Обобщението на микроскопичния хамилтониан (11.6) за много слоеве може да се свърже с феноменологичния хамилтониан (11.4) и силите на взаимодействията в него могат да се изразят чрез феноменологичните параметри

$$\begin{aligned}
 J = 0 \text{ сдвояващо} & \quad \left\{ \begin{aligned} \langle ++ | V_{P_0} | ++ \rangle &= \langle -- | V_{P_0} | -- \rangle = F/\Omega \\ \langle -+ | V_{P_0} | +- \rangle &= \langle -+ | V_{P_0} | -+ \rangle = G/\Omega \end{aligned} \right. \\
 \text{взаимодействие} & \quad \left\{ \begin{aligned} \langle ++ | V | ++ \rangle &= \langle -- | V | -- \rangle = C + D/2 \\ \langle -+ | V | -+ \rangle &= 2C - D, \quad \langle -+ | V | +- \rangle = E/\Omega. \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

Тези връзки (11.7) с матричните елементи на взаимодействието дават истинския физически смисъл на феноменологичните константи и следователно тяхната оценка може да доведе до микроскопично описание на ядреното взаимодействие.

Грите члена  $C$ ,  $D$  и  $E$  в (11.4) които възникват в резултат на динамичната  $Sp(4)$  симетрия са свързани с микроскопичната природа на  $pn$  изоскаларните корелации. Както ясно може да се види от израза

$$\frac{E}{2\Omega} \left( -\tau^2 + \frac{3N}{4} + \frac{1}{2} \frac{N(N-1)}{2} \right) - \left( C + \frac{E}{4\Omega} \right) \frac{N(N-1)}{2} - \left( D - \frac{E}{2\Omega} \right) \left( \tau_0^2 - \frac{N}{4} \right)$$

[виж (11.4)] и от съотношението (11.7), за  $D = E/2\Omega$  и  $C + D/2 = 0$  се получава независимата от  $J$ ,  $pn$  изоскаларна сила. Тя е тясно свързана с енергията на симетрия ( $E$ ), диагонална е в сдвоенния базис при  $G = F$  и може да се сравнява с даденото в [161, 173]. Следователно, моделното  $Sp(4)$  взаимодействие се състои от изовекторно ( $pp$ ,  $nn$ ,  $pn$ ) сдвояване и изоскаларна ( $pn$ ) сила в допълнение с евентуално нарушаващ изоспиновата симетрия член и  $J > 0$  сдвояващи корелации между идентични частици.

По този начин феноменологичния хамилтониан (11.4) може да се използва за описание на общите свойства на ядреното взаимодействие, което служи за мотивация да се фитират теоретичните средни стойности на (11.4) към енергиите на съответните  $0^+$  състояния на ядрата от твърде широка област.

В рамките на алгебричния подход, важните редукиционни вериги на симплектичната алгебра до унитарните двумерни подалгебри позволяват хамилтониана (11.4) да се изрази чрез операторите от втори порядък  $C_2^{\tau, 0, \pm}$ , дадени в Таблица 11.1:

$$\begin{aligned}
 H = & -\eta_1 C_2^\tau - \eta_2 \tau_0^2 - \eta_3 C_2^0 - \eta_4 D_0^2 - \eta_5 (C_2^+ + C_2^-) - \eta_6 (D_{+1} (D_{+1} - 1) + \\
 & D_{-1} (D_{-1} - 1)) - \eta_7 N + \eta_8.
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

Коефициентите  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) в (11.8) не са линейно независими; те са свързани

с феноменологичните параметри на модела (11.4) по следния начин:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{E}{2\Omega}; \eta_2 = (D - \frac{1}{2\Omega}E); \eta_3 = \frac{G}{2\Omega}; \eta_4 = -(\frac{G}{2\Omega} - 2C); \eta_5 = -\eta_6 = \frac{F}{\Omega}; \\ \eta_7 &= \begin{cases} \epsilon - C(1 - 4\Omega)/2 - D/4 - (E - G)/(4\Omega), & N \leq 2\Omega \\ \epsilon - C(1 - 4\Omega)/2 - D/4 + (E - G)/(4\Omega), & N > 2\Omega; \end{cases} \\ \eta_8 &= \begin{cases} 2C\Omega^2 + G/2 & , N \leq 2\Omega \\ 2C\Omega^2 + G/2 + (E - G), & N > 2\Omega. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Отношенията  $\eta_2/\eta_1, \eta_4/\eta_3, \eta_6/\eta_5$  определят степента, до която симетрията е нарушена във всяка от границите [180].

В  $q$ -деформирания случай, може да се построи хамилтониан, който е аналогичен на (11.8) и е избран така, че да съвпада с недеформирания хамилтониан (11.4) в границата  $q \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} H_q &= -\bar{\epsilon}^q N - G_q F_0 G_0 - F_q (F_{+1} G_{+1} + F_{-1} G_{-1}) - \frac{1}{2} E_q (\{T_+, T_-\} - \left[ \frac{N}{2\Omega} \right]) \\ &\quad - C_q 2\Omega \left[ \frac{1}{\Omega} \right] ([K_0]_{\frac{1}{2\Omega}}^2 - [\Omega]_{\frac{1}{2\Omega}}^2) - D_q \Omega \left[ \frac{1}{\Omega} \right] [T_0]_{\frac{1}{2\Omega}}^2, \end{aligned} \quad (11.10)$$

където  $\epsilon^q = \bar{\epsilon}^q + (\frac{1}{2} - 2\Omega) C_q + \frac{D_q}{4} > 0$  е Ферми нивото на ядрената система,  $K_0$  е свързано с  $N$  (Таблица 11.1),  $G_q, F_q, E_q, C_q$  и  $D_q$  са константи на силите на взаимодействията и изобщо могат да са различни от недеформирания феноменологични параметри.

Аналитичните формули, които са изведени в Глава 6, могат да се използват и за намиране на матричните елементи на взаимодействието в система с симплектична динамична симетрия. Моделния хамилтониан (11.10) е друг оператор от втори ред, който е изразен чрез генераторите на групата  $Sp_q(4)$ . Класическия хамилтониан,  $H_{cl}$ , се получава в границата  $q \rightarrow 1$ . За ядрена система с  $N_+$  валентни протони и  $N_-$  валентни неутрони, взаимодействието представлява изовекторното сдвояване на протон-неутрон и идентични частици (с  $G_q \geq 0$  и  $F_q \geq 0$  параметри), симетричния член ( $E_q$ ), диагонална протон-неутронна изоскаларна сила ( $E_q$  и  $C_q$ ) [161, 173] и нарушаващ изоспиновата симетрия ( $D_q \neq \frac{E_q}{2\Omega}$ ). Квантовото разширение на  $sp(4)$  алгебрата включва взаимодействия от по-висок порядък и отчита нелинейни ефекти в теорията. Диагоналния оператор от втори ред  $O_2(sp_q(4))$  (6.16) прави линейно зависими енергиите на  $q$ -деформирания сдвояване и симетричния член, което води до намаляване на броя на феноменологичните параметри в хамилтониана (??).

Изобщо направеното обобщение на  $Sp(4)$  модела и неговото  $q$ -деформирано разширение е необходимо за разглеждането на област от ядра, чиито нуклеони заемат главни слоеве, съдържащи няколко  $j$ -нива, такива като  $1f_{5/2} 2p_{1/2} 2p_{3/2} 1g_{9/2}$ . Това включва твърде интересната област от ядра с масови числа  $56 < A < 100$ . Матричните елементи на хамилтониана (??) имат аналитичен вид (6.11)-(6.15) и позволяват да се намерят точни решения за енергиите на моделните състояния.

### 11.2.3 Матрични елементи на хамилтониана

В  $SU^0(2)$  границата ( $pn$ -сдвояване) енергетичната собствена стойност на недеформираното сдвояване  $GA_0B_0$  е

$$\varepsilon_{pn} = \frac{G}{\Omega} n_0 \frac{2\Omega - n + n_0 + 1}{2} = \frac{G}{8\Omega} (n - 2\nu_0)(4\Omega - n - 2\nu_0 + 2) \quad (11.11)$$

и в  $SU^\pm(2)$  границата (сдвояване на идентични частици) енергията на недеформираното сдвояващо взаимодействие  $FA_{\pm 1}B_{\pm 1}$  е

$$\varepsilon_{pp(nn)} = \frac{F}{\Omega} n_{\pm 1} (\Omega + n_{\pm 1} - N_{\pm} + 1) = \frac{F}{4\Omega} (N_{\pm} - \nu_1) (2\Omega - N_{\pm} - \nu_1 + 2). \quad (11.12)$$

Във всяка граница,  $\nu_0 = n_1 + n_{-1}$  и  $\nu_1 = n_0$  са съответните квантови числа на “старшинството” (seniority), които дават броя на останалите двойки, които могат да се формират след като фермионите са сдвоени в основната сдвояваща мода и те се менят с  $\Delta\nu_{0,1} = 2$ .

За да изследваме влиянието на деформацията върху сдвояващото взаимодействие, собствената стойност на деформирания сдвояващ хамилтониан се развива по степените на  $\varkappa$  ( $q = e^\varkappa$ ) във всяка от границите

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pn}^q &= G_q \left[ \frac{1}{2\Omega} \right] \left[ \frac{n - 2\nu_0}{2} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[ \frac{4\Omega - n - 2\nu_0 + 2}{2} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \\ &= \frac{G_q}{G} \varepsilon_{pn} \left\{ 1 + \varkappa^2 \frac{(n_0^2 - 4\Omega^2 - 1) + \left( \frac{2\Omega\varepsilon_{pn}}{n_0 G} \right)^2}{24\Omega^2} + O(\varkappa^4) \right\}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pp(nn)}^q &= F_q \rho_{\pm} \left[ \frac{1}{\Omega} \right] \left[ \frac{N_{\pm} - \nu_1}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}} \left[ \frac{2\Omega - N_{\pm} - \nu_1 + 2}{2} \right]_{\frac{1}{\Omega}} \\ &= \frac{F_q}{F} \varepsilon_{pp(nn)} \left\{ 1 \pm \varkappa \frac{1+2\Omega}{4\Omega} + \varkappa^2 \frac{(n_{\pm 1}^2 + \frac{\Omega^2}{2} - \frac{5}{8}) + \left( \frac{\Omega\varepsilon_{pp(nn)}}{n_{\pm 1} F} \right)^2}{6\Omega^2} + O(\varkappa^3) \right\}, \end{aligned} \quad (11.14)$$

където недеформираните енергии (11.11) и (11.12) са приближенията от нулев порядък на съответните деформирани сдвояващи енергии. Докато протон-неутронното взаимодействие е четно по-отношение на деформационния параметър  $\varkappa$ , сдвояването на идентични частици включва също и нечетни членове чрез коефициента  $\rho_{\pm}$ . Развитието в граничните случаи на сдвояване ((11.13) и (11.14)) въвеждат нелинейни членове по отношение на броя двойки, размерността на пространството и недеформираните енергии на сдвояване. Те служат като пример за илюстрация на приноса от  $q$ -деформацията към недеформирания модел, който е директен резултат от квантовата дефиниция.

Изобщо, хамилтонианът (11.4) не е диагонален в базиса даден в Таблица 11.4. Линейните комбинации от базисни състояния описват спектъра на изовекторно сдвоените  $0^+$  състояния на дадено ядро. Хамилтонианът на сдвояване  $H_{pair}$  ((11.4) с

$E = C = D = 0$  и  $\epsilon = 0$ ) дава преход между състоянията с различни типове сдвояване, като същевременно запазва общия брой двойки  $N$ , което значи, че две  $pn$  двойки се разсейват като двойка  $pp$  и двойка  $nn$  и обратно

$$\begin{aligned} |H_{pair}| |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= (\varepsilon_{pn} + \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{nn}) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle \\ &\quad - \frac{G}{\Omega} n_1 n_{-1} |n_1 - 1, n_0 + 2, n_{-1} - 1\rangle \\ &\quad - \frac{F}{\Omega} n_0 (n_0 - 1) |n_1 + 1, n_0 - 2, n_{-1} + 1\rangle, \end{aligned} \quad (11.15)$$

където  $\varepsilon_{pn,pp,nn}$  са дадени в (11.11) и (11.12) и  $n_1, n_0, n_{-1}$  са броя частици или дупки.

Ние успяхме също да намерим в аналитичен вид и  $q$ -деформирания аналог на (11.15)

$$\begin{aligned} |H_{q,pair}| |n_1, n_0, n_{-1}\rangle &= (\varepsilon_{pn}^q + \varepsilon_{pp}^q + \varepsilon_{nn}^q) |n_1, n_0, n_{-1}\rangle \\ &\quad - \frac{G}{\Omega} \tilde{n}_1 \tilde{n}_{-1} |n_1 - 1, n_0 + 2, n_{-1} - 1\rangle \\ &\quad - \frac{F}{\Omega} \frac{\sqrt{\rho_+ \rho_-}}{[2]} \sum_{k=1}^{n_0-1} S_q(k) |n_1 + 1, n_0 - 2, n_{-1} + 1\rangle, \end{aligned} \quad (11.16)$$

където  $\varepsilon_{pn,pp,nn}^q$  са дадени в (11.13) и (11.14). В (11.16) са използвани следните дефиниции:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{\pm 1} &\equiv \frac{1}{[2]} \sqrt{\rho_+ \rho_-} [n_{\pm 1}]_{\frac{1}{2\Omega}} [2_{n_{\pm 1} - \Omega - 1/2}]_{\frac{1}{2\Omega}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} n_{\pm 1}, \\ S_q(k) &\equiv [2_{k - \Omega - 1/2}]_{\frac{1}{2\Omega}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{[2]^i}{2^i} [2_{k-1-i}]_{\frac{1}{2\Omega}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 4k \end{aligned}$$

и

$$[2X]_{\frac{1}{2\Omega}} \equiv \frac{[2X]_{\frac{1}{2\Omega}}}{[X]_{\frac{1}{2\Omega}}} \xrightarrow{q \rightarrow 1} 2.$$

## 11.3 Приложения в ядрената структура

### 11.3.1 Параметри на силите на взаимодействията

Собствените стойности на хамилтонианите (11.4) и (11.10) описват енергиите на ядрени изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния, които се фитират към експерименталните стойности [181, 182]. За всички четно-четни ядра и за някои нечетно-нечетни ( $Z \approx N$ ), най-ниското  $0^+$  състояние е основното състояние и положителната стойност на неговата енергия се дефинира като енергия на свързване,  $|BE|$ . Енергията на свързване на ядрата е важна величина, тъй като тя е свързана с ядрените маси и времена на живот. Останалите нечетно-нечетни ядра имат по-високо лежащо  $0^+$  възбудено състояние, което е изобарен аналог на това в съответното съседно четно-четно ядро.

Феноменологичните параметри в (11.4) и (11.10) се определят от нелинейно средно квадратично фитиране на най-ниските енергии на изовекторно сдвоените  $0^+$  състояния (максимална собствена стойност на  $|H|$  (11.4) и  $|H_q|$  (11.10)) към кулоново поправените експериментални стойности:

$$E_0^{\text{exp}}(N_+, N_-) = |E_{\text{exp}}(N_+, N_-)| - |E_{\text{exp}}|_{\text{core}} + V_{\text{Coul}}(N_+, N_-), \quad (11.17)$$

където енергията на свързване на сърцевината (core)  $|E_{\text{exp}}|_{\text{core}}$  се изважда за да се фокусираме само върху приносите на нуклоните от валентния слой. Енергиите трябва да се коригират и с кулоновото отблъскване, тъй като то не се отчита от моделния хамилтониан. В (11.17) кулоновият потенциал се отчита спрямо сърцевината и е изведен в [179].

Параметрите и статистиката, получени от процедурата на фитиране са представени в Таблица 11.4. И в двата случая на недеформирания (колоната “недеф.”) и деформирания (колоната “ $q$ -деф.”), са разгледани три групи ядра с четно  $A$ : **(I)**  $1d_{3/2}$  ( $\Omega = 2$ ) със сърцевина ядрото  ${}^{32}_{16}S$  (Таблица 11.2); **(II)**  $1f_{7/2}$  ( $\Omega = 4$ ) със сърцевина  ${}^{40}_{20}Ca$  (Таблица 11.3); и **(III)** главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  ( $\Omega = 11$ ) със сърцевина  ${}^{56}_{28}Ni$ . Във всяка група броят на валентните протони (неутрони) се мени в интервала  $N_{\pm} = 0, \dots, 2\Omega$  и общият брой ядра, които влизат в  $Sp(4)$  систематиката е  $2\Omega(\Omega + 1) + 1$  (13 за **(I)**, 41 за **(II)** и 265 за **(III)**). В случая на  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоя **(III)**, параметрите на ефективното взаимодействие на  $Sp(4)$  модела с изродени множество  $j$  нива е възможно да се влияят от неизродеността на едночастичните орбити. Въпреки това, тъй като свойствата на динамичната симетрия на двучастичното взаимодействие на ядрата от тази област не са изгубени, моделът остава добро приближение и за слой от няколко  $j$  нива [A12], което се потвърждава и при използването на различните дискретни производни на енергетичните функции [A13]. Остатъчната сума на квадратите (residual sum of squares)  $S \equiv (|E_0^{\text{th}}| - |E_0^{\text{exp}}|)^2$  и  $\chi$ -статистиката  $\chi \equiv \sqrt{\frac{S}{N_d - n_p}}$  определят качествеността на подгонката, като  $n_p$  е броя на фитираните параметри и  $N_d$  е броя на ядрата за които има експериментални данни ( $N_d$  е 13 в **(I)**, 36 в **(II)** и 100 в **(III)**).

Анализът на резултатите (Таблица 11.4) показва, че за  $1d_{3/2}$  слоя параметрите на сдвояването са почти равни ( $G \approx F$ ) както се и очаква за леките ядра, и те се различават,  $G > F$ , за  $1f_{7/2}$  с 0.07 и за **(III)** с 0.06. Въз основа на оценката на параметрите (Таблица 11.4) и на съотношенията (11.9) може да се определи до каква степен се нарушава симетрията във всяка от границите на модела. В границата  $SU^{\tau}(2)$ , нарушаването на изоспиновата инвариантност  $\eta_2/\eta_1$  е изобщо малка за леките ядра ( $\eta_2/\eta_1 = 0.090$  за  $1d_{3/2}$  и  $\eta_2/\eta_1 = 0.133$  за  $1f_{7/2}$ ), което е в съответствие с експерименталните данни за тази област. За средните ядра от главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  нарушението на изоспиновата инвариантност е значително по-голямо,  $\eta_2/\eta_1 = 0.628$ .

Таблица 11.4: Параметрите  $G$ ,  $F$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $\epsilon$  в  $MeV$  и статистика  $\chi$  в  $MeV$  и  $S$  в  $MeV^2$ . Величините отбелязани със символа \* са фиксирани при съответното фитиране.

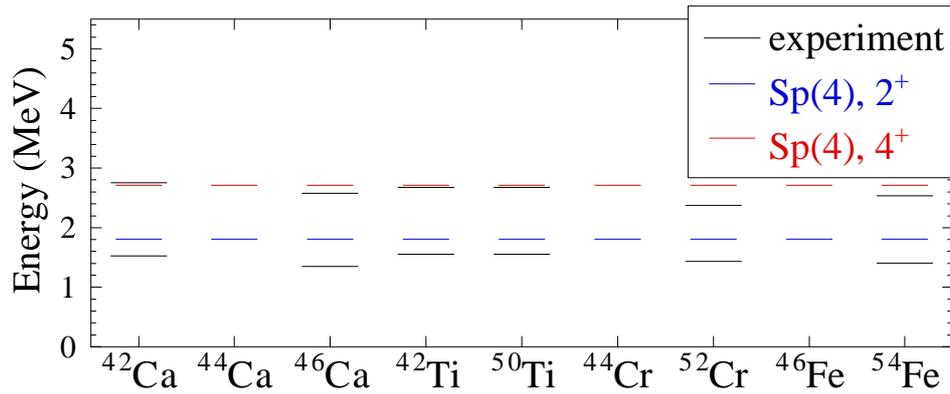
	(I)		(II)		(III)	
	$1d_{3/2}$		$1f_{7/2}$		$1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$	
	недеф.	$q$ -деф.	недеф.	$q$ -деф.	недеф.	$q$ -деф.
$\chi$	0*	-0.015	0*	0.124	0*	0.215
$q = e^{\chi}$	1*	0.985	1*	1.132	1*	1.240
$G/\Omega$	0.709	0.709*	0.525	0.525*	0.352	0.352*
$F/\Omega$	0.702	0.702*	0.453	0.453*	0.296	0.296*
$C$	0.815	0.815*	0.473	0.473*	0.190	0.190*
$D$	-1.282	-1.282*	-0.971	-0.971*	-0.796	-0.796*
$E/(2\Omega)$	-1.409	-1.409*	-1.120	-1.120*	-0.489	-0.489*
$\epsilon$	9.012	9.012*	9.359	9.359*	9.567	9.567*
$S$	1.720	1.719	16.095	15.673	300.284	238.280
$\chi$	0.496	0.378	0.732	0.669	1.787	1.551

Оценката на параметрите (Таблица 11.4) разкрива свойствата на ядреното взаимодействие както то е определено от съотношенията (11.7). Сдвояващото взаимодействие с  $J = 0$  ( $V_{P_0}$ ) е винаги привличащо, докато за компонентите на куплиране на идентични нуклони с високи  $J$  -  $\langle \pm \pm |V| \pm \pm \rangle$  то може да бъде отблъскващо. “Директното”  $J > 0$  протонно-неутронно взаимодействие  $\langle - + |V| - + \rangle$  е привличащо, за разлика от “обменната” му част  $\langle - + |V| + - \rangle$  ( $E < 0$ ).

Докато оптималния фит е статистически определен единствено от  $\chi$ , физическия аспект на ядрения проблем изисква допълнително, оценката за параметрите да бъде и физически валидна. Наистина, стойностите на силите на сдвояване на еднакви частици  $G$ , получени от нашия  $Sp(4)$  модел, дават резултати [A13], които са в съответствие с експерименталните сдвояващи процепи определени чрез нечетно-четните масови разлики [183, 184]. Така че, се очаква че стойностите на  $G$  ще възпроизвеждат нисколежащия вибрационен спектър на ядрата близо до затворените слоеве в  $SU^\pm(2)$  границата на модела (сдвояване на еднакви частици) (Фигура 11.1). Когато се анализират резултатите от трите области ядра (I, II, и III), се оказва, че параметрите на сдвояващите сили следват добре известното  $1/A$  поведение [70, 111, 185–187],

$$\frac{G}{\Omega} = \frac{23.9 \pm 1.1}{A}, \quad R^2 = 0.96, \quad (11.18)$$

където  $R^2$  е коефициента на корелация и представлява часта от вариацията на параметъра на силата, която се отчита от аналитичната крива (Фигура 11.2). Подобно,



Фигура 11.1: Нисколежащ енергетичен спектър на ядрата близо до затворения слой от  $1f_{7/2}$  нивото, както се описват от границата на сдвояване на еднакви частици на  $Sp(4)$  модела и сравнен с експеримента.

стойностите на другите параметри на силите лежат на криви, които намаляват с масовото число  $A$  (Фигура 11.2)

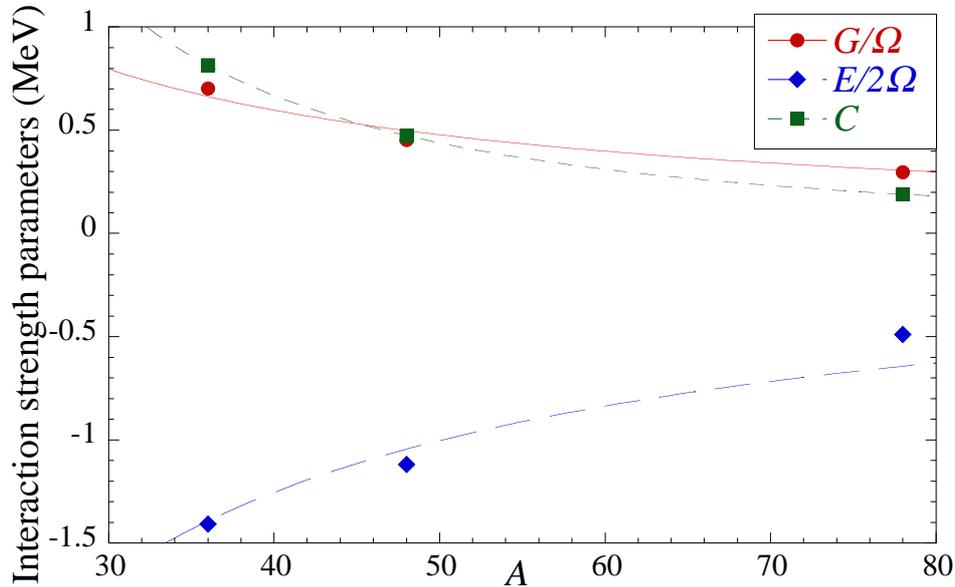
$$\begin{aligned} \frac{E}{2\Omega} &= \frac{-50.2 \pm 3.3}{A}, & R^2 &= 0.93, \\ C &= \left( \frac{32.30 \pm 0.02}{A} \right)^{1.887 \pm 0.004}, & R^2 &= 0.99. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Както се очаква, за членът на симетричната енергия, зависимостта  $1/A$  е в сила и за параметъра  $E$ . Зависимостта на  $C$  от масовото число  $A$  предполага, че квадратичната корекция към средното поле  $C \frac{n(n-1)}{2}$  може да се променя бавно от ядро към ядро, което е в съответствие с насищането на ядрените сили. Въпреки че набора от данни използван във фитиращата процедура е твърде малък, тенденцията към гладка функционална зависимост на параметрите на силите от масовото число  $A$  разкрива техния *глобален* характер, а именно взаимодействията в моделния хамилтониан (11.4) са свързани с едно осреднено поведение общо за всички ядра.

По нататък, вигнеровата енергия [176],  $-W2T$ , е неявно включена в теоретичната енергия на  $Sp(4)$  модела, което от своя страна прави възможна оценката на нейната сила. вигнеровата енергия се появява като члена, който е линеен по  $T$  в  $pn$  изоскаларната сила (пропорционален на симетричния член) и в изовекторното сдвояване чрез инварианта на Casimir от втори порядък на  $sp(4)$ . В режим на добър изоспин, приносът на симетричната енергия е  $-\frac{E}{2\Omega}T(T+1)$  [дължащ се на  $\hat{T}^2$ -члена в (11.4)], и параметъра на силата на  $W$  взаимодействието може да се изрази чрез моделните параметри (Таблица 11.4) като  $W = \frac{E-G}{4\Omega}$ . В рамките на  $Sp(4)$  модела, се получава, че определените стойности на  $W$  от трите области (I, II и III) лежат на кривата

$$W = \frac{-31 \pm 2}{A}, \quad R^2 = 0.96, \quad (11.20)$$

с много добър коефициент на корелация  $R^2$  и забележително близка стойност до повечето други оценки:  $W = -30/A$  [188],  $W = -37/A$  [175],  $W = -37.4/A$  [173],  $W = -42/A$  [189] and  $W = -47/A$  [158].



Фигура 11.2: Зависимост на параметрите на силите на взаимодействието  $G/\Omega$ ,  $E/2\Omega$ , и  $C$  (в MeV) от масовото число  $A$  със стойности от трите области (I), (II) и (III).

На кратко, резултата от оптимизационната процедура показва, че ефективното взаимодействие с  $Sp(4)$  динамична симетрия дава разумно описание на най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния, запазвайки физическия смисъл и валидността на своята микроскопична природа.

Във всички случаи има добро съвпадение с експеримента (малки  $\chi$ ), както може да се види от (Таблица 11.4), както и на Фигура 11.4 за областта (II). Част от резултатите, по-точно тези за енергиите на свързване, а не за енергиите на възбудените  $0^+$  състояния, могат да се сравнят с тези от други теории. Прякото сравняване на  $\chi$  статистиките е невъзможно поради използването на различни набори от експериментални данни и различните енергетични нива определяни от различните теории. Обаче ако отделим само подмножеството от данни, които са еквивалентни за ядрата от  $1d_{3/2}$  и/или  $1f_{7/2}$  слоевете, нашите резултати са много по-близко до експерименталните стойности отколкото тези от пресмятанятията с модела на Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) [190,191] и полу-емпиричния модел [192,193] и са сравними с тези на слоестия модел с  $jj$ -куплиране [63, 151] и на модела с изовекторно и изоскаларно сдвояване плюс квадруполно взаимодействие [161]. По този начин простия  $Sp(4)$  модел е изпробван и е доказана валидността му при приложения към леки ядра от един  $j$  слой. В тази област много от симетриите се запазват, което позволява намаляване

на свободните параметри на фитиране. Така че получените параметри представени в Таблица 11.4, отразяват наблюдаваните симетрии в леките ядра и непренебрежимото им нарушаване при ядрата от областта на средите маси.

### 11.3.2 Деформиран нелинеен модел

За да изследваме ролята на  $q$ -деформацията, ние извършваме още веднъж процедурата на фитиране за същите области ((I), (II) и (III)) но за деформирания хамилтониан (11.10). За всяка група ядра, резултата от фитирането на всички участващи в него параметри ( $G_q, F_q, E_q, C_q, D_q, \epsilon^q$  и  $q$ ) показва, че въвеждането на  $q$ -деформацията не променя останалите параметри. Основавайки се на този резултат, ние предполагаме, че деформацията е независима от останалите параметри и варираме само  $q$  при фитирането (останалите параметри са фиксирани на стойностите си получени при подгонването им в недеформирания случай). Резултатите са дадени в “ $q$ -деф” колони на Таблица 11.4. Резултатите от подгонката с и без деформация могат да се сравнят като се използва остатъчната сума на квадратите ( $S$ ), която винаги е по-малка в деформирания случай (виж Таблица 11.4).

Въпреки че, това противоречи на други приложения на  $q$ -деформацията [67, 68], отделянето на  $q$ -деформацията от силите на взаимодействието не е допускане на модела, а резултат от сравнението с експерименталните данни за общо 149 ядра. Този факт показва, че оставяйки силите на двучастичните взаимодействия непроменени,  $q$ -деформацията позволява да се отчете по определен от нейната дефиниция начин, сложната зависимост на енергетичните собствени стойности от броя на нуклоните/двойките частици и размерността на пространството, която не може да се възпроизведе от никакво двучастично взаимодействие (виж например (11.13) и (11.14)). Нещо повече, подобни членове се очаква да възникват от взаимодействията между частиците от по-висок порядък. По този начин  $q$ -параметъра въвежда някои нелинейни остатъчни взаимодействия, които не са явно включени в двучастичния хамилтониан (11.4).

Наблюдаваната независимост на силите на сдвояване от  $q$ -параметъра, показва, че макар деформацията да не променя силата на сдвояване на две частици, тя може да моделира многочастични ефекти и така да влияе върху енергетичния спектър. Като илюстрация, във всяка от динамичните граници, ние изследваме величините  $R_{pn} = \epsilon_{pn}^q / \epsilon_{pn}$  и  $R_{pp+nn} = (\epsilon_{pp}^q + \epsilon_{nn}^q) / (\epsilon_{pp} + \epsilon_{nn})$  които дават допълнителен принос към енергиите на сдвояване в деформирания случай (Фигура 11.3) (за сравнение с аналитичното развитие на енергиите по отношение на  $q$  от (11.13) и (11.14)). В границата на  $pn$ -сдвояване,  $R_{pn}$ , не се променя съществено когато  $q$  е близо до единица и намалява за всички  $q \neq 1$ . Отношението  $R_{pp+nn}$  расте (намалява) монотонно с  $q$  само за ядра с предимно  $pp$  ( $nn$ ) куплиране. Въпреки че двете  $SU_q^\pm(2)$  групи

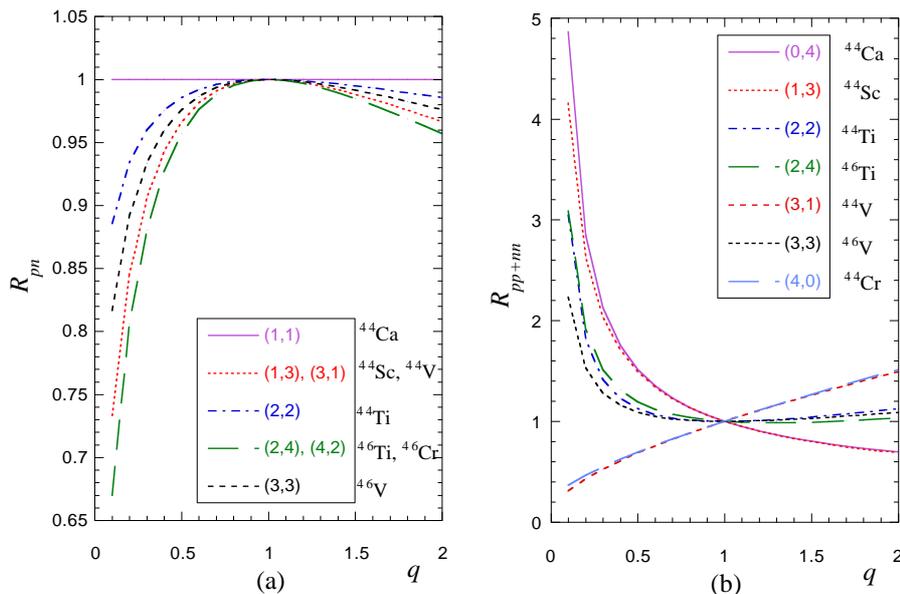
са допълнителни, различното поведение на константните множители  $\rho_{\pm}$  (Таблица 11.1) е причина за различното влияние на деформацията в различните изотопи. Това отчита разликите в експерименталните данни за огледалните ядра, даже след корекциите за Кулоновата енергия. В границата на куплиране на идентични частици, когато  $q$  нараства от едно ( $q > 1$ ) неутронните двойки са по-слабо свързани и протонните двойки дават по-голям сдвояващ процеп и обратно за  $q < 1$ . По-този начин, параметъра на деформацията определя степента до която  $pp$  сдвояването се различава от  $nn$  сдвояването.

Значението на членовете от по-висок порядък, които влизат в теорията чрез  $q$ -деформацията, може да се оцени чрез сравнението с експеримента. Изобщо процедурата на фитиране определя стойности на  $\varkappa$  (Таблица 11.4), които са малки. Причината за това може да е, че докато ефектите от по-висок порядък могат да са значителни за някои ядра, те може би се унищожават от осредняването, когато  $q$ -параметърът е един и цял за всички ядра. Обаче в два от случаите, (II) и (III), той е с цял порядък по-голям от оценките на други физически приложения ([163] и цитатите в него) и за слоя  $1f_{7/2}$ , нашата стойност ( $q = 1.132$ ) е сравнима със стойността получена в  $q$ -деформирания "сенъорити" модел на сдвояване на еднакви частици [67]:  $q = 1.1585$  за неутронните двойки и  $q = 1.1924$  за протоните. За ядрата в слоевете с няколко  $j$ , нашият модел дава по-големи стойности на  $q$ -параметъра отколкото за по-леките ядра в слоевете от едно  $j$  (Таблица 11.4), където малкият брой валентни нуклони не е достатъчен да създаде силни нелинейни корелации. Това показва, че  $q$ -деформацията е по съществена за ядра с масово число  $A > 56$ .

#### 11.4 Енергетичен спектър на изобарово аналоговите $0^+$ състояния

И в трите области от ядра, има добро съгласие с експеримента (малка  $\chi$ -статистика), както може да се види на Фигура 11.4 за изобарите с  $A = 40 \div 56$  от  $1f_{7/2}$  нивото (II). Теорията предсказва енергиите на най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния на ядрата с отклонение ( $\chi/\Delta E_{0,exp} \times 100[\%]$ ) от 0.7% за (I) и 0.5% за (II) и (III) в съответния енергетичен интервал  $\Delta E_{0,exp}$ .

Процедурата на фитиране не само оценява големината на силите на взаимодействието и определя колко добре моделния хамилтониан "обяснява" експерименталните данни, но може да се използва и за предсказание на ядрени енергии, които още не са измерени. Това включва и енергиите на ядрата с нечетен брой протони и неутрони, както и ядрата далече от долината на стабилност и с  $N \approx Z$  или протонно богатите ядра, които са от голям интерес в модерните физични изследвания. От фитирането в  $1f_{7/2}$  случая, енергията на свързването на протонно богатия  $^{48}\text{Ni}$  се определя като 348.19 MeV, което е с 0.07% повече от полученото чрез сложната полу-емпирична

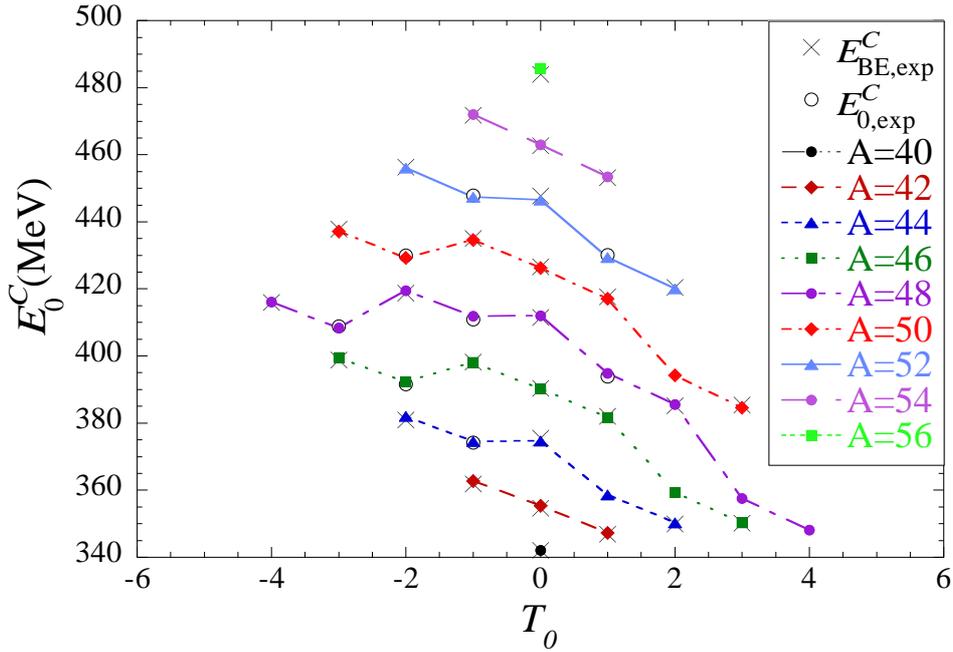


Фигура 11.3: Отношенията  $R_{pn}$  и  $R_{pp+nn}$  спрямо  $q$  за няколко ядра с типично поведение от  $1f_{7/2}$  слоя.

оценка в [188]. По същия начин, за нечетно-нечетните ядра, за които няма измерени енергетични спектри, теорията може да предскаже енергиите на изобарно аналогови  $0^+$  състояния: 358.62 MeV ( $^{44}\text{V}$ ), 359.34 MeV ( $^{46}\text{Mn}$ ), 357.49 MeV ( $^{48}\text{Co}$ ), 394.20 MeV ( $^{50}\text{Co}$ ) (Фигура 11.4).  $Sp(4)$  модела предсказва енергиите на съответното  $0^+$  състояние, допълнително за 165 ядра с четно  $A$  в областта на средните маси (III), представени на Фигура 11.5. Енергиите на свързване на 25 от тях са пресметнати също и в [188]. За тези четно-четни ядра ние предсказваме енергии на свързване, които са средно с 0.05% по-малки от полуемпиричната им оценка в [188].

Без да варираме стойностите на параметрите на силите на взаимодействието (Таблица 11.4), могат теоретично да се пресметнат енергиите на по-високо лежащите изобарно аналогови  $0^+$  състояния, получени в резултат на сдвояващото взаимодействие, в разглежданите ядра. Тези състояния са собствени вектори на моделния хамилтониан (11.4) и се различават по между си по техните сдвояващи моди, дължащи се на близкото взаимодействие между двойките от еднакви частици и  $pn$  двойките. Теоретичния енергетичен спектър на тези изобарно аналогови  $0^+$  състояния е в твърде добро съгласие със съществуващите експериментални данни <sup>2</sup> (Фигура 11.6). Това съответствие, което се наблюдава не само в отделни случаи, но и в целия слой, представлява ценен резултат. Това е защото разглежданите по-високо лежащи  $0^+$  състояния, представляват набор от експериментални данни, независими от

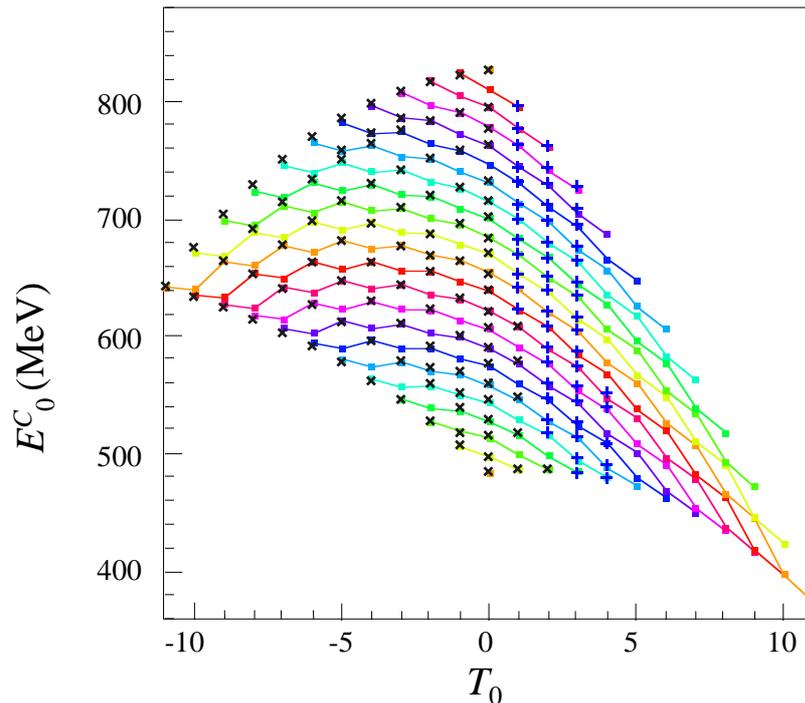
<sup>2</sup> Енергетичните спектри на ядрата от (III)-тата област с маси  $56 < A < 100$  не са още напълно измерени, особено високо лежащите  $0^+$  състояния. Това прави невъзможно сравнението на теорията с експеримента.



Фигура 11.4: Енергии на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния  $E_0^C$ , в MeV (включително и кулоновата енергия) спрямо изоспиновата проекция  $T_0$  за изобарите с  $A = 40$  до  $A = 56$  запълващи  $1f_{7/2}$  нивото,  $\Omega_{\frac{7}{2}} = 4$ . Експерименталните енергии на свързване  $E_{BE,exp}^C$ , означени със символа “x”, се отличават от експерименталните енергии на изобарно аналоговите  $0^+$  възбудени състояния  $E_{0,exp}^C$  по символа “o”. Всяка от линиите свързва теоретично предсказаните енергии в изобарната редица.

данните използвани в статистиката при определянето на моделните параметри на (11.4). Такъв резултат е първо една независима проверка на физическата валидност на параметрите на силите и второ представлява доказателство, че взаимодействията въведени от  $Sp(4)$  моделния хамилтониан са главните движещи сили, които определят свойствата на тези състояния. По този начин динамичната симетрия  $Sp(4)$  при нулево старшинство на  $0^+$  състоянията на ядрата с четни  $A$  разкрива фундаменталния характер на ядреното взаимодействие свързано с изовекторните  $J = 0$  сдвояващи корелации и на протон-неутронните взаимодействия с по-високи  $J$ . Не-що повече, простия  $Sp(4)$  модел може да се използва за разумно предсказване на (основното и/или възбудените) получени вследствие на сдвояването изобарно аналогови  $0^+$  състояния в протонно богатите ядра, чиито енергетични спектри още не са напълно експериментално изследвани.

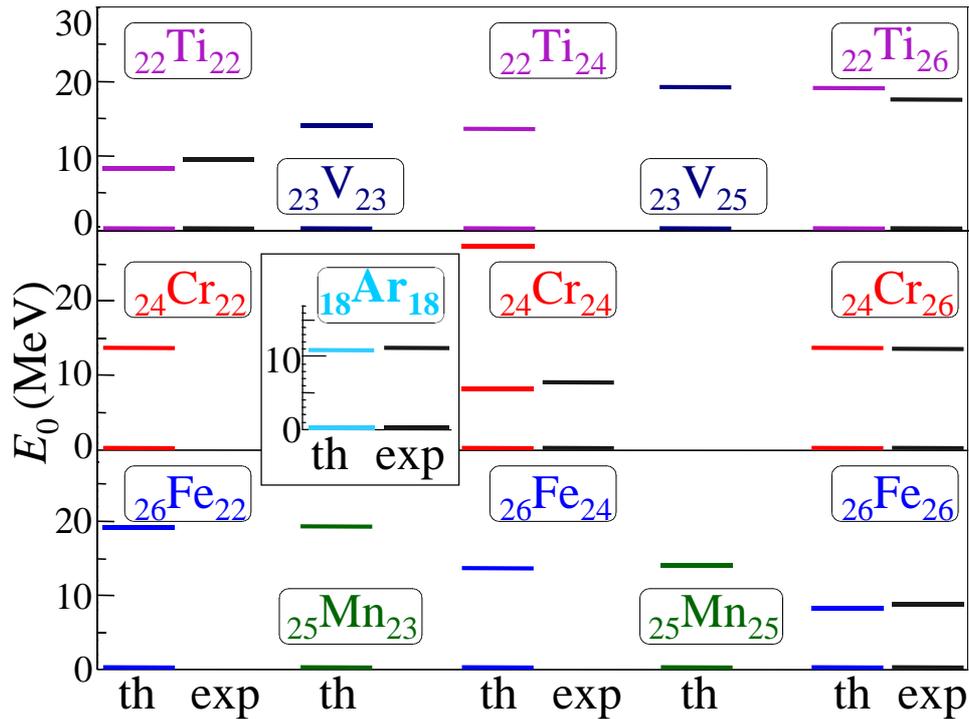
Такова заключение се основава още и на нашето допълнително изследване [A13] върху ефектите на финната структура между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния. Изследване от този тип е твърде необходимо, тъй като е добре известно, че доброто възпроизвеждане на експерименталните ядрени енергии не гарантира директно



Фигура 11.5: Теоретични енергии  $E_0^C$  (включително и приноса на кулоновата енергия) на най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния за изобарите (свързани с различен цвят линии) с масови числа  $A = 56, 58, \dots, 100$  в главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  над  $^{56}\text{Ni}$  сърцевината, сравнени с експерименталните стойности (черните 'x') и полуемпиричните оценки от [188] (сините '+').

и доброто възпроизвеждане на ефектите на финната структура в сравнение с експеримента. Ние изследвахме тези детайлни характеристики чрез приближенията в крайни разлики на производните на енергетичната функция (11.4), филтриращи силното влияние на средното поле [A13]. На кратко, това изследване показва отлично възпроизвеждане на енергиите за отделяне на два протона или два неутрона, нерегулярностите, които се получават в областта около  $N = Z$ , сдвояващите изовекторни процепи на еднаквите и  $pn$  двойки, значителната роля на симетричната енергия и на изовекторните сдвояващи корелации при определянето на свойствата на финната структура, и изявеното стагерингово поведение наблюдавано между групите на четно-четните и нечетно-нечетните ядра [A13]. Това изследване допълнително потвърждава валидността и надеждността на групово теоретичния  $Sp(4)$  модел и взаимодействията, които той въвежда.

В тази глава ние представихме прост  $Sp(4)$  модел, чрез който се получава разумно предсказание за енергетичния спектър на сдвоените изобарно аналогови  $0^+$  състояния на общо 319 четно-четни и нечетно-нечетни ядра само с шест параметъра. Моделния хамилтониан представлява двучастично ефективно взаимодействие,



Фигура 11.6: Теоретичен и експериментален (черните линии) енергетичен спектър на получените в резултат на сдвояването по-високи изобарно аналогови  $0^+$  състояния за изотопите от  $1f_{7/2}$  слоя (сърцевина  $^{40}\text{Ca}$ ). Включване: Енергия на първото възбудено изобарно аналогово  $0^+$  състояние в  $^{36}\text{Ar}$  от  $1d_{3/2}$  слоя ( $^{32}\text{S}$  сърцевина) в сравнение с неговата експериментална стойност.

включващо сдвояването на частици от един и същи вид и протон-неутронното сдвояване плюс симетричен член (последния е свързан с протон-неутронната изоскаларна сила). Ние сравнихме теоретичните резултати с експерименталните стойности и детайлно изследвахме следствията от това. Докато модела описва само получените в резултат на сдвояването изобарно аналогови  $0^+$  състояния на средно тежките четно-четни ядра с протони и неутрони заемащи един и същи слой, той разкрива фундаменталните характеристики на ядреното взаимодействие, което поражда тези състояния. А именно последното явно притежава динамичните симетрии на  $Sp(4)$ . Такава симплектична  $Sp(4)$  схема позволява също и обстойно и систематично изследване на експериментално наблюдаваното поведение на ядрата с четно  $A$ .

Настоящото изследване показва предимствата на алгебричния  $sp(4)$  подход пред други теоретични изследвания. А именно  $Sp(4)$  модела, който се основава на квазиспиновата схема на Helmer [140], е едновременно по-прост и дава по-добро разбиране за фундаменталния характер на ядреното взаимодействие, в сравнение например с по-общия, но също и много усложнен  $U(4\Omega)$  модел [63] основан на конвенционалната схема на старшинството на Racah и Flowers [51, 130, 131]. Освен това нашия модел

води и до по-добро и по-подробно описание на изовекторните сдвояващи корелации и на протон-неутронното взаимодействие, отколкото теориите на средното поле и резултатите получени с полумпиричната масова формула. В допълнение той би могъл да се използва и в по-високите слоеве, където другите подходи са неприложими.

## 12. Стагеринг на енергиите на $0^+$ състоянията в $Sp(4)$ модела на сдвояване

За обяснението на наблюдаваният в атомните ядра, стагеринг на енергетичните нива е необходима теория, която превъзхожда разглежданията в рамките на средното поле [111]. Данните от стагеринга съдържат подробна информация за свойствата на нуклеонното взаимодействие и подсказват за съществуването на корелации от по-висок порядък в колективната ядрена динамика. Повечето от изследванията на стагеринга се занимават с два аспекта на това явление. Съществуват дискретни осцилации на физическите наблюдаеми, зависещи от ъгловия момент, например ядрените  $M1$  преходи [194] или на самите енергетични нива (например в октополниите [195–197], супрдеформираните [198–200], основната и  $\gamma$  [111, 201, 202] ивици в атомните ядра, както и в молекулните ротационни ивици [203]). Освен това съществуват и образци на назъбено поведение на различни физически величини (най-често енергии на свързване), които се обуславят от промените в броя на частиците в системата (както в ядрата [204] така и в металните кластери [205, 206]).

Във физиката на ядрената структура стагерингово поведение от втория тип се наблюдава, когато систематично се променя някоя от стандартните ядрени характеристики като например броя на протоните ( $Z$ ), неутроните ( $N$ ), масовото число ( $A$ ) или проекцията на изоспина ( $|Z - N|/2$ ). Примери за такова ядрено поведение са нечетно-четния масов стагеринг (НЧМС) (OEMS) [111, 207–213], нечетно - четен стагеринг в изотопните / изотонните отмествания [214, 215], и зигзагообразно поведение на енергиите на възбудените  $2_1^+$  състояния в четно-четните ядра [113]. Стагеринговото поведение на ядрените наблюдаеми се вижда най-ясно при изследването на крайните производни от втори или по-висок порядък по отношение на променливите от които те зависят. Целта на този подход е да се филтрират силните (глобални) ефекти от средното поле и по-този начин да се изследват по-слабите, но специфични характеристики на системата. По този начин, например, НЧМС, който се приписва обикновено на ядрените сдвояващи корелации, се проявява в някои крайни разлики на енергиите на свързване, които представляват мярка за емпирично наблюдавания сдвояващ процес [111]. По този начин различни крайни приближения на производните (филтри) на енергиите на свързване могат да се изследват за да се получат детайлните свойства на ядрената структура [157, 158, 173, 191, 193, 216–218].

В това изследване, ние разглеждаме енергиите на свързване на  $0^+$  основните състояния на ядрата с четни  $A$  в масовата област  $40 \leq A \leq 100$ , и за останалите нечетно-нечетни ядра с ( $J^\pi \neq 0^+$ ) основно състояние, енергията на най-ниското изобарно аналогово  $0^+$  възбудено състояние (което съответства на основното състояние на съседното четно-четно ядро). Ние определяме тези състояния като най-ниските *изовекторно сдвоени*  $0^+$  състояния [A12]. Нашата цел е да установим, как различните сравнително малки, но не незначителни части на взаимодействието между нуклоните влияят на тези състояния, когато се изследват дискретните производни на енергиите им по отношение на подходяща систематика на определящите ги променливи.

Алгебричният модел на сдвояване, който използваме [A5, A12] се основава на фермионната реализация на симплектичната  $sp(4)$  алгебра, която е изоморфна на  $so(5)$  [48, 57–61]. Той включва изовекторно (изоспин  $T = 1$ ) сдвояващо взаимодействие както и диагонална (в изоспиновия базис)  $pn$  изоскаларна ( $T = 0$ ) част. Последната е пропорционална на така наречения  $T(T + 1)$  симетричен член<sup>1</sup> [A12]. Операторите осъществяващи редукцията  $sp(4) \supset u(2) \supset u(1) \oplus su(2)$  дават възможност да се реализира удобна и полезна класификационна схема на ядрата и техните съответстващи основни и възбудени състояния. Систематиката е в термини на собствените стойности на тези оператори, а именно общия брой на валентните нуклони  $n$  и третата проекция на изоспина  $i$  или на техни линейни комбинации.

Ние вече показахме в [A12], че  $Sp(4)$  модела води до добро възпроизвеждане на експерименталните енергии на най-ниските *изовекторно сдвоени*  $0^+$  състояния на ядрата с четни  $A$ ,  $32 \leq A \leq 100$ . Както беше отбелязано в [A12], въпреки че  $T = 1$  сдвояването на еднакви частици и  $T = 1$   $pn$  сдвояващите енергии възпроизвеждат  $\Delta n = 2$  стагеринга, те са с противоположни фази, така че общата изовекторна сдвояваща енергия има сравнително гладко поведение. Членът на симетричната енергия е този, който възпроизвежда в теорията равномерно зигзагообразно поведение на експерименталните енергии в изобарните вериги. Като по-нататъшно и по-детайлно изследване, сега ние разглеждаме различните видове крайни производни на кулоново коригираните [179] енергетични функции, съгласно  $Sp(4)$  класификацията и без да включваме параметри за напасване.

Симплектичната  $Sp(4)$  схема на класификация не само позволява систематичното изследване на осцилиращото поведение на експерименталните енергии на ядрата с четно  $A$ , тя предоставя и прост алгебричен модел за интерпретация на резултатите. Нещо повече, такова детайлно изследване служи и за определяне на валидността и надеждността на  $Sp(4)$  модела и произтичащите от него физически интерпретации

<sup>1</sup> Общоприето е симетричната енергия да се дефинира по малко по-различен начин: членът  $T(T + 1)$  заедно с изоспиновата зависимост на изовекторното сдвояване съдържат симетричната ( $\sim T^2$ ) и вигнеровата ( $\sim T$ ) енергии.

на описваните явления.

### 12.1 $Sp(4)$ класификационна схема

Започваме с кратко изложение на алгебричния подход, представен подробно в Глава 5 [A5, B5] и Глава 6 [A6] и използван за описанието на явления, които са наблюдавани експериментално и са свързани с изовекторните ( $T = 1$  сдвояващи корелации) и изоскаларните взаимодействия в ядрата.  $sp(4)$  алгебрата е реализирана в термини на фермионни оператори на раждане  $c_{jm\sigma}^\dagger$  и унищожение  $c_{jm\sigma}$  със стандартните антикомутиращи съотношения (5.1). Нейните образуващи също са представени в Глава 5 от уравнения (5.3) и (5.4), като от тях, съществена роля във физическите приложения играят оператора на броя на частиците  $\hat{N} = \hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}$  и третата проекция на изоспина  $T_0 = (\hat{N}_{+1} - \hat{N}_{-1})/2$ , където  $\hat{N}_{\pm 1}$  са операторите на броя на валентните протони (неутрони). Напълно симетричното крайномерно пространство е разпънато от базисните вектори (5.24), конструирани от ( $T = 1$ )-сдвоените фермиони.

Таблица 12.1: Реализация на  $u^\mu(2) = u^\mu(1) \oplus su^\mu(2)$  подалгебрите на  $sp(4)$ .

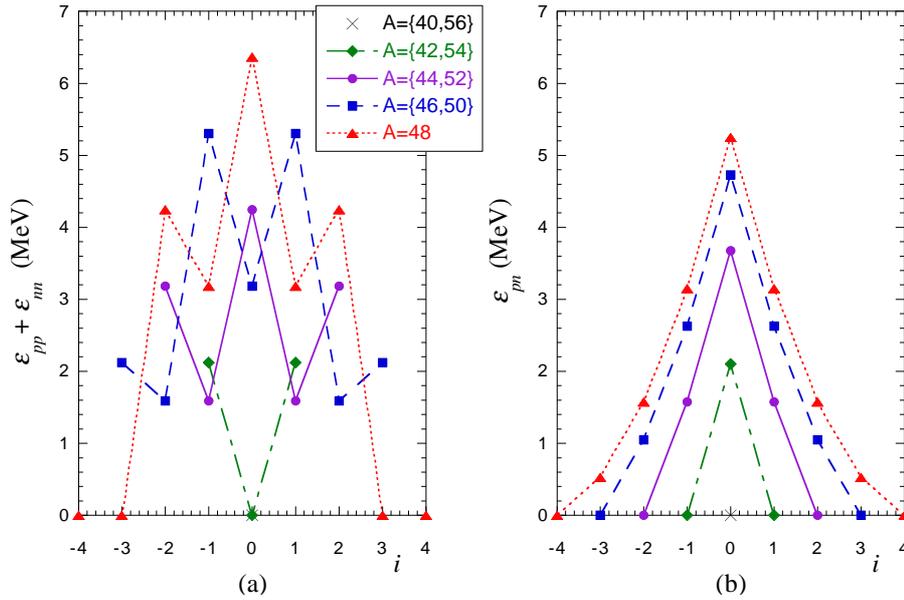
симетрия ( $\mu$ )	$u^\mu(1)$ ( $C_1^\mu$ )	собствени стойности на $C_1^\mu$	$su^\mu(2)$
изоспин ( $T$ )	$\hat{N}$	$n$	$T_+, T_0, T_-$
$pn$ двойки (0)	$T_0$	$i$	$A_0^\dagger, \frac{1}{2}\hat{N} - \Omega, A_0$
$pp$ двойки (+)	$\hat{N}_{-1}$	$N_{-1}$	$A_{+1}^\dagger, \frac{1}{2}(\hat{N}_{+1} - \Omega), A_{+1}$
$nn$ двойки (-)	$\hat{N}_{+1}$	$N_{+1}$	$A_{-1}^\dagger, \frac{1}{2}(\hat{N}_{-1} - \Omega), A_{-1}$

Като динамична симетрия, симплектичната група  $Sp(4)$  описва корелациите на изовекторно сдвояване и изоспиновата симетрия чрез четирите различни редуционни вериги  $Sp(4) \supset U^\mu(2) \supset U^\mu(1) \otimes SU^\mu(2)$  с  $\mu = T, 0, \pm$  (Таблица 12.1). Инвариантите от първи порядък на  $u^\mu(2)$ ,  $C_1^{\mu=\{T,0,\pm\}} = \{\hat{N}, T_0, N_{\mp 1}\}$ , осъществяват редукцията  $u^\mu(2) \supset su^\mu(2)$  като крайното пространство на действие се разлага на пряка сума на унитарни неприводими представяния /УНП/ на  $of U^\mu(2)$  ( $\{n, i, N_{\mp 1}\}$ -мултиплет). По нататък, във всеки от мултиплетите генераторът на третата проекция на  $SU^\mu(2)$  (средния оператор в четвъртата колона на Таблица 12.1) редуцира  $U^\mu(2)$  представянето на вектор с фиксирани квантови числа  $(n, i)$ , или алтернативно  $(N_{+1}, N_{-1})$ , на който съответства определено ядро (клетка в Таблица 12.2). По този начин динамичната  $Sp(4)$  симетрия дава възможност за естествена класификационна схема на ядрата, принадлежащи на един  $j$  слой или на главен слой от няколко  $j$ -нива, които се проектират върху алгебричните мултиплет. Тази класификация се отнася също и за основните и възбудени състояния на съответните ядра, включително и техните изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния.

Таблица 12.2: Класификационна схема на ядрата с четно  $A$  в  $1f_{7/2}$  слоя. Формата на таблицата е симетрична по отношение на знака на  $i$  и на  $n - 2\Omega$ .  $\Delta n = 2$  във всеки  $i$ -мултиплет (колоните),  $\Delta i = 1$  във всеки  $n$ -мултиплет (редовете),  $\Delta N_{\pm 1} = 2$  във всеки  $N_{\mp 1}$ -мултиплет (диагоналите). Последователното действие на  $SU^\mu(2)$  генераторите (дадено в скобите) поражда съдържанието на даден  $SU^\mu(2)$  мултиплет ( $\mu = T, 0, \pm$ ).

$n \setminus i$	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0			${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$				
2		${}^{42}_{22}\text{Ti}_{20}$	${}^{42}_{21}\text{Sc}_{21}$	${}^{42}_{20}\text{Ca}_{22}$			
4	↙	${}^{44}_{23}\text{V}_{21}$	${}^{44}_{22}\text{Ti}_{22}$	${}^{44}_{21}\text{Sc}_{23}$	${}^{44}_{20}\text{Ca}_{24}$		
6	⋯	${}^{46}_{24}\text{Cr}_{22}$	${}^{46}_{23}\text{V}_{23}$	${}^{46}_{22}\text{Ti}_{24}$	${}^{46}_{21}\text{Sc}_{25}$	${}^{46}_{20}\text{Ca}_{26}$	
8	← $(T_+)$	${}^{48}_{25}\text{Mn}_{23}$	${}^{48}_{24}\text{Cr}_{24}$	${}^{48}_{23}\text{V}_{25}$	${}^{48}_{22}\text{Ti}_{26}$	${}^{48}_{21}\text{Sc}_{27}$	${}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}$
10	⋯	${}^{50}_{26}\text{Fe}_{24}$	${}^{50}_{25}\text{Mn}_{25}$	${}^{50}_{24}\text{Cr}_{26}$	${}^{50}_{23}\text{V}_{27}$	${}^{50}_{22}\text{Ti}_{28}$	
12	$(A_{-1}^\dagger) \searrow$	⋮	↓ $(A_0^\dagger)$	⋮	↙ $(A_{+1}^\dagger)$		

Най-общият моделен хамилтониан със  $Sp(4)$  динамична симетрия (11.4), който се състои от едно и дву-частични членове, се изразява чрез генераторите на  $Sp(4)$  групата, където участват  $G, F, E, C$  и  $D$  параметрите на силите на взаимодействията и  $\epsilon > 0$  енергията на Fermi нивото. Този хамилтониан запазва броя на частиците и третата проекция на изоспина и променя квантовото число на старшинството ( $\nu_1$ ) с нула или  $\pm 2$ , което представлява разсейване на  $pp$  и  $nn$  двойки в две  $pn$  двойки и обратно. Нарушаващият изоспиновата инвариантност хамилтониан (11.4) включва изовекторно ( $T = 1$ ) сдвояващо взаимодействие ( $G \geq 0, F \geq 0$  за привличане) и диагонална (в изоспинов базис) изоскаларна ( $T = 0$ ) сила, която е свързана със симетричния член ( $E$ ). В даден слой (едно  $j$  ниво,  $1f_{7/2}$  или главен слой  $1f_{(5/2)}2p_{(1/2, 3/2)}1g_{(9/2)}$ ) разумна оценка за параметрите на хамилтониана (11.4) се получава чрез процедура на фитиране на максималните енергетични стойности  $E_0$  на  $|H|$  към кулоново коригираните експериментални енергии [181, 182] на най-ниските изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния в ядрата с четно  $A$  [A12]. Въпреки че тази процедура дава твърде добро съгласие със съответния експеримент, възпроизвеждането на финните свойства на ядрената структура (най-често на порядък или два по-малки от енергиите, към които се подгонват параметрите) не е гарантирано поради силния принос на средното поле. В настоящето изследване параметрите в оператора на енергията не се варират; техните стойности са фиксирани като:  $G = 0.53\Omega$ ,  $F = 0.45\Omega$ ,  $C = 0.47$ ,  $D = -0.97$ ,  $E = -1.12(2\Omega)$ ,  $\epsilon = 9.36$  MeV за  $1f_{7/2}$  слоя (с ядка  ${}^{40}\text{Ca}$ ) и  $G = 0.35\Omega$ ,  $F = 0.30\Omega$ ,  $C = 0.19$ ,  $D = -0.80$ ,  $E = -0.49(2\Omega)$ ,  $\epsilon = 9.57$  MeV за  $1f_{(5/2)}2p_{(1/2, 3/2)}1g_{(9/2)}$  слоя (с начало  ${}^{56}\text{Ni}$ ) [A12] (вж. Таблица 11.4 от Глава 11). Във втория случай е възможно, параметрите на ефективното взаимодействие в  $Sp(4)$  модела с няколко  $j$  слоя, да се влияят



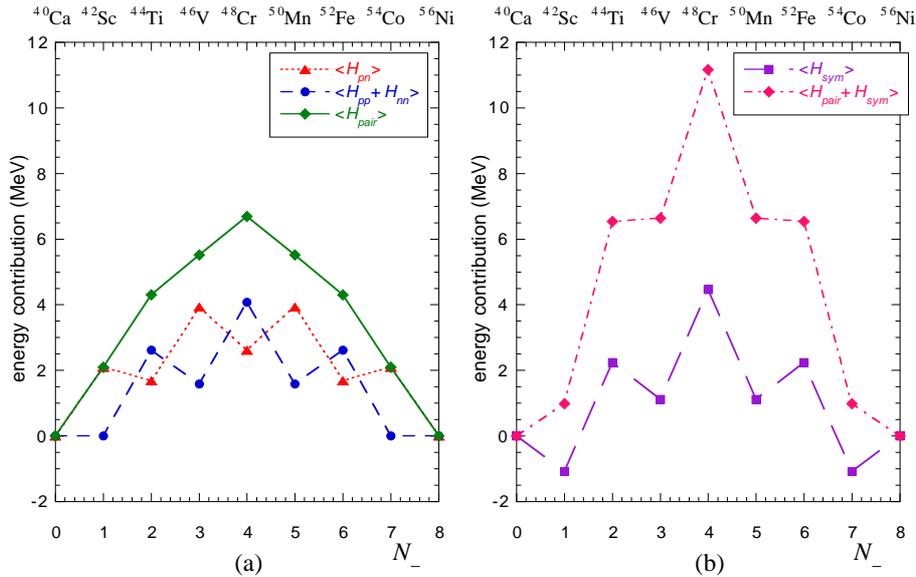
Фигура 12.1: Енергии на сдвояване на идентични ( $G = 0, F = 1.81$  (a)) и неидентични ( $G = 2.10, F = 0$  (b)) частици спрямо  $i$  за изобари от  $A = 40$  до  $A = 56$  в  $1f_{7/2}$  слоя.

от неизродеността на слоевете. Въпреки това, тъй като свойствата на динамичната симетрия на двучастичното взаимодействие в ядрата от тази област, не се загубват, моделът остава добър и в приближението за множество  $j$  слоеве [A12] и това до каква степен той дава реалистично описание може по детайлно да се изследва с помощта на различните дискретни производни на енергетичната функция.

### 12.1.1 Свойства на сдвояващите взаимодействия

Модела с  $Sp(4)$  динамична симетрия позволява независимо изследване на различните видове сдвояващи взаимодействия в граничните случаи както на недеформираната (11.11), (11.12) така и на деформираната версии (11.13), (11.14) на теорията. В  $SU^{\pm}(2)$  границата, симплектичния модел възпроизвежда свойствата на сдвояването на идентични нуклони ( $\epsilon_{pp} + \epsilon_{nn}$ ) (11.12), за които е в сила обичайната параболична зависимост на  $\epsilon_{pp(nn)}$  от  $N_{\pm}$  [62, 63, 70, 162]. Зависимостта на сдвояването на еднакви частици от проекцията на изоспина  $i$  (Фигура 12.1(a)) разкрива още едно свойство на сдвояващата мода,  $\Delta i = 1$  стагеринг на енергиите на сдвояване на нечетно-нечетните и четно-четните ядра.

Противно на това,  $pn$  границата ( $\epsilon_{pn}$ ) показва гладко поведение (Фигура 12.1 (b)).  $SU^0(2)$  граничният случай отчита протон-неутронно куплиране, което е максимално, когато  $N_+ = N_-$  ( $i = 0$ ), и това е в съответствие с теориите на  $\alpha$ -кластеризацията [190–193] и изоспиновата независимост в областта на леките ядра, където протоните и неутроните запълват един и същи слой [156, 158]. И в двете граници -

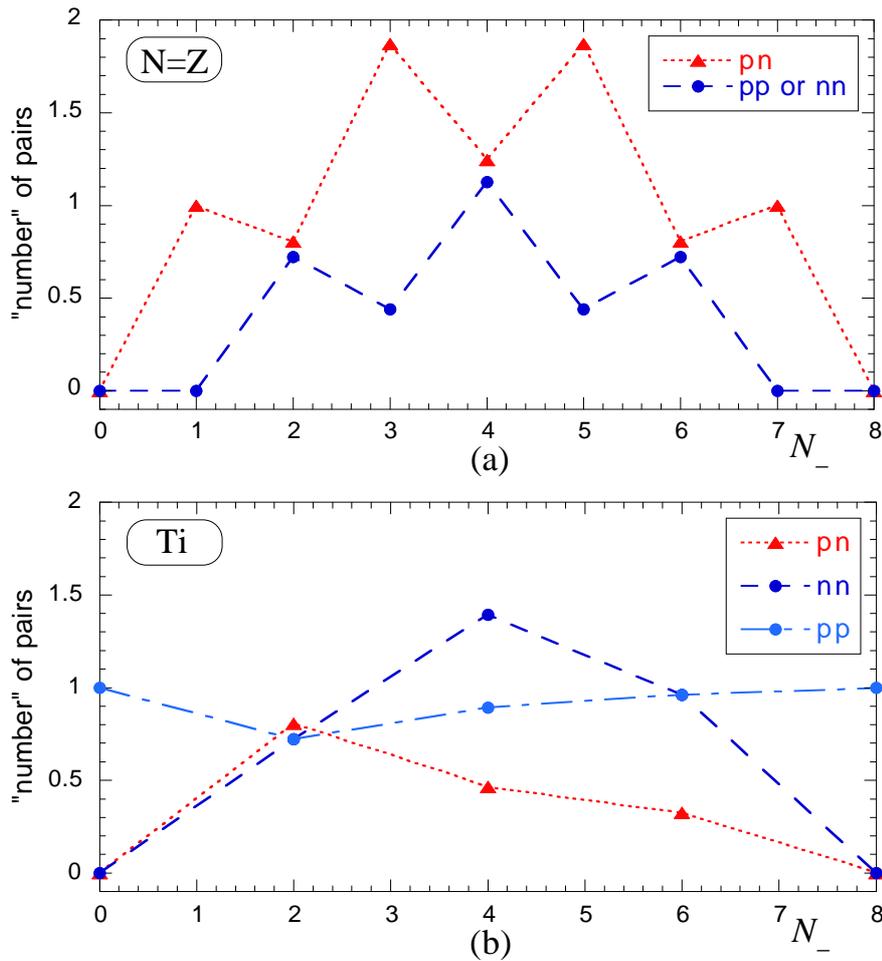


Фигура 12.2: Енергии на най-ниските изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния спрямо  $N_-$ , когато  $N_+ = N_-$  за ядрата от  $1f_{7/2}$ : (a) енергии на сдвояване:  $pn$ ,  $pp + nn$  и пълната; (b) симетричната енергия ( $E$  члена в (11.4)) и общата сдвояваща + симетрична енергия.

$SU^\pm(2)$  и  $SU^0(2)$ , енергиите на сдвояване намаляват, когато разликата между броя на протоните и неутроните нараства.

В повечето ядра различните типове сдвояващи взаимодействия съществуват едновременно и може да се изследва приноса на всяка от сдвояващите моди  $\langle H_{pp} + H_{nn} \rangle = F \langle A_{+1}B_{+1} + A_{-1}B_{-1} \rangle$  и  $\langle H_{pn} \rangle = G \langle A_0B_0 \rangle$ , към общата енергия на сдвояването  $\langle H_{pair} \rangle = \langle H_{pn} \rangle + \langle H_{pp} + H_{nn} \rangle$ .  $\Delta N = 2$  стагеринг съществува и за двете сдвояващи взаимодействия (Фигура 12.2(a)) [60, 151, 155]. За нечетно-нечетните ядра с  $N_+ = N_-$ ,  $\tau = 1$   $pn$  двойките имат преобладаващ принос, докато за четно-четните ядра с  $N_+ = N_-$  и двете сдвояващи моди имат почти еднакъв принос, като този на двойките от еднакви частици е малко по-голям. Въпреки че, съществува различие във приноса на различните сдвоявания между четно-четните и нечетно-нечетните ядра, общата енергия на сдвояване има изненадващо гладко поведение. Приносът от симетричния член в (11.4) [147, 158] компенсира стагеринга, тъй като той намалява енергията на нечетно-нечетните ядра по-отношение на техните четно-четни съседи (Фигура 12.2(b)).

Груба оценка на броя на  $pn$  двойките, както и на тези с еднакви частици дават величините  $\frac{1}{G} \langle H_{pn} \rangle$  и  $\frac{1}{F} \langle H_{pp} + H_{nn} \rangle$ , съответно, които са свързани с сдвояващите процепи [60,61]. “Броят” на  $pn$  двойките (Фигура 12.3) е по-голям от “броя” на  $pp(nn)$  двойките за нечетно-нечетните ядра с  $N_+ = N_-$ , и е от същия порядък за четно-четните ядра [60, 151, 155].



Фигура 12.3: “Брой” на сдвоените неидентични ( $pn$ ) и идентични ( $pp$  or  $nn$ ) частици спрямо  $N_-$  (а) за ядрата с  $N_+ = N_-$  от  $Z = 20$  до  $Z = 28$  в  $1f_{7/2}$  и (б) за изотопите на  $Ti$  от същия слой.

## 12.2 Дискретни производни и ефекти на финната структура

Симплектичният  $Sp(4)$  модел, а именно максималните собствени стойности на  $|H|$  (11.4) възприизвеждат кулоново коригираните [181, 182] енергии  $E_0$  на *изовекторно сдвоените*  $0^+$  състояния твърде точно [A12]. По детайлно изследване и значима проверка на теорията се получава чрез дискретните производни на енергритичната функция  $E_0$

$$Stg_{\delta}^{(m)}(x) = \frac{Stg_{\delta}^{(m-1)}(x + \frac{\delta}{2}) - Stg_{\delta}^{(m-1)}(x - \frac{\delta}{2})}{\delta^m}, \quad m \geq 2$$

$$Stg_{\delta}^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{E_0(x + \frac{\delta}{2}) - E_0(x - \frac{\delta}{2})}{\delta}, & m - \text{четно} \\ \frac{E_0(x + \delta) - E_0(x)}{\delta}, & m - \text{нечетно.} \end{cases} \quad (12.1)$$

изразена рекурсивно с две условия за прекъсване на последователността зависещи от порядъка на производната  $m$  (четно или нечетно), където променливата е  $x = \{n, i, N_{+1}, N_{-1}\}$  съгласно  $Sp(4)$  класификацията и цялото число  $\delta \geq 1$  е крайната стъпка на производната. Настоящото изследване е насочено предимно към  $\delta = 1$  или 2 случаите (начинът, по който се менят променливите  $n, i, N_{+1}$  или  $N_{-1}$  се мени в  $Sp(4)$  систематиката може да се определи от Таблица 12.2).

Първата ( $m = 1$ ) крайна производна, дефинирана в уравнение (12.1)  $[E_0(x + \delta) - E_0(x)]/\delta$  е свързана с енергията за отделяне на  $\delta$  частици, когато  $x$  представлява техния общ брой, броя на протонните или неутроните. Изобщо величината  $Stg_\delta^{(m)}(x)$  представлява крайна разлика на  $E_0$ -енергиите на две съседни ядра, като например

$$Stg_\delta^{(2)}(x) = \frac{E_0(x + \delta) - 2E_0(x) + E_0(x - \delta)}{\delta^2}, \quad (12.2)$$

където  $m = 2$ , и

$$Stg_\delta^{(3)}(x) = \frac{E_0(x + 2\delta) - 3E_0(x + \delta) + 3E_0(x) - E_0(x - \delta)}{\delta^3}, \quad (12.3)$$

където  $m = 3$ , и изолира приносите към  $E_0$  пропорционални на  $x^{m-1}$ .

Филтрите (12.1) са  $(m + 1)$ -точкови изрази и отчитат взаимното поведение на съседни ядра. Когато  $m \geq 3$  крайните производни  $Stg_\delta^{(m)}(x)$  са независими от силните ефекти на средното поле, и казано по-точно те унищожават всички равномерно променящи се линейни и квадратични по  $x$  приноси към енергията, които са обикновено голями, като само дават описание на ефекти от по-висок порядък по променливата  $x$ , както и на прекъснатости в енергетичната функция. По този начин крайните енергетични разлики изолират специфични части от взаимодействието, които са сравнително малки, но може да се изменят значително от едно ядро към съседните му. Докато тези взаимодействия могат да не допринасят много към общата поведение на енергиите  $E_0$ , те играят значителна роля при определянето на свойствата на ядрената структура.

Смесените производни също дават полезна информация за финните ефекти на ядрената структура и се дефинират като:

$$Stg_{\delta_1, \delta_2}^{(2)}(x, y) = \frac{E_0(x + \delta_1, y + \delta_2) - E_0(x + \delta_1, y) - E_0(x, y + \delta_2) + E_0(x, y)}{\delta_1 \delta_2} \quad (12.4)$$

където променливите са измежду величините от набора  $(x, y) = \{n, i, N_{+1}, N_{-1}\}$  и  $\delta_{1,2} \geq 1$  са техните крайни нараствания в съответствие с  $Sp(4)$  класификационната схема от Таблица 12.2.

В следващите параграфи са разгледани различни видове стагерингово поведение. Съответните компоненти на взаимодействието, изолирани чрез филтрите на различните крайни разлики могат да се обяснят по начин аналогичен на този в [217, 218], в допълнение на предимството, че тъй като те са свободни от кулоновите ефекти, те отразяват само ефекти свързани с ядрените сили.

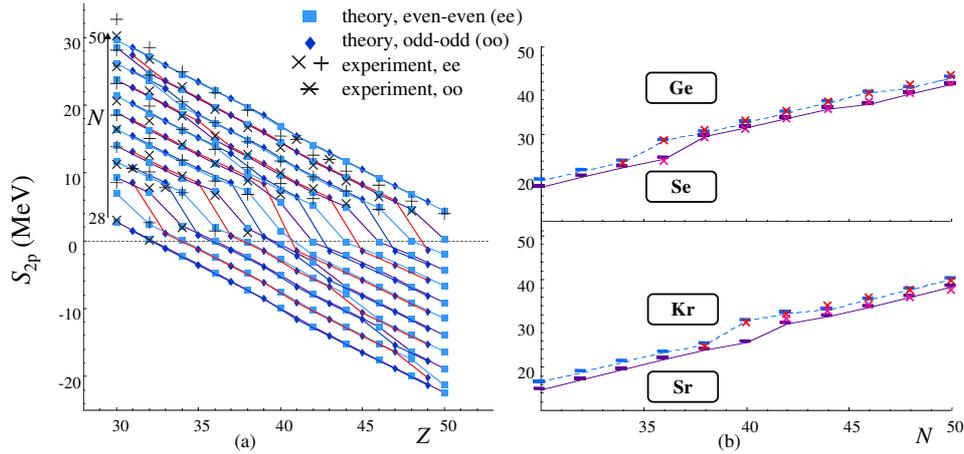
**12.3 Дискретни производни по отношение на  $N_{+1}$  и  $N_{-1}$ . Областта с  $N = Z$ .**

За четно-четните ядра, дискретното приближение на първата производна на енергиите на свързване  $\partial E_0^C / \partial N_{\pm 1}$  (включително и кулоновата енергия на отблъскване) е свързано с добре известната енергия на отделяне на два протона (два неутрона), която обикновено се дефинира като  $S_{2p(2n)}(N_{\pm 1}) = E_0^C(N_{\pm 1}) - E_0^C(N_{\pm 1} - 2)$  (виж Фигура 12.4(a) по отношение на броя на протоните и Фигура 12.4(b) за разликите на кулоново поправените енергии  $E_0$ , спрямо броя на неутроните).  $Sp(4)$  теорията възпроизвежда много добре съществуващите експериментално данни [181, 182] (показани като  $\times$  или  $+$  за четно-четните и като  $*$  за нечетно-нечетните ядра на Фигура 12.4(a)), и по специално нерегулярността при  $N_{+1} = N_{-1}$ . Нулевата точка на  $S_{2p}$  определя двупротонната линия на прекъсване (drip line), която съгласно  $Sp(4)$  модела за главния слой  $1f_{(\frac{5}{2})}2p_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}1g_{(\frac{9}{2})}$  лежи близо да следните ядра:

$$\begin{aligned} & {}^{60}Ge_{28}, \quad {}^{64}Se_{30}, \quad {}^{68}Kr_{32}, \quad {}^{72}Sr_{34}, \quad {}^{76}Zr_{36}, \\ & {}^{78}Zr_{38}, \quad {}^{82}Mo_{40}, \quad {}^{86}Ru_{42}, \quad {}^{90}Pd_{44}, \quad {}^{94}Cd_{46}, \end{aligned} \quad (12.5)$$

след която изотоните с по-високи  $Z$  са нестабилни по отношение на изпускането на два протона. Както може да се види на Фигура 12.4 тези ядра още не са изследвани и сравнението с експерименталната линия на прекъсване за два протона не може да се направи, но се очаква това скоро да е възможно в резултат на експериментите с радиоактивни снопове близо до линията на стабилност. Но все пак резултатите от нашия модел са в добро съответствие с резултатите от други теоретични предсказания [219–222]. В частност, оценките за енергиите на отделяне на два протона в [220–222] потвърждават такова разделяне на нуклидите, че изотоните с по-ниска/по-висока стойност на  $Z$  от (12.5) имат положителна/отрицателна  $S_{2p}$  енергия (сравни с Фигура 12.4). В допълнение, енергиите на отделяне на два протона за тези от ядрата в (12.5), които са разглеждани и в другите изследвания са много близко по оценка: средно квадратичната разлика за  $S_{2p}$  между нашия модел и [220] е 0.32 MeV (сравнението е с първите 3 ядра от (12.5)), тя е 0.78 MeV при сравняване на всичките ядра от (12.5) с даденото в [221], и е 0.43 MeV в сравнение с [222] за първите четири ядра (12.5). За нечетно-нечетните ядра нулевата стойност на  $S_{2p}$  също може да се определи ( ${}^{60}Ga_{29}$ ,  ${}^{64}As_{31}$ ,  ${}^{68}Br_{33}$ ,  ${}^{72}Rb_{35}$ ,  ${}^{76}Y_{37}$ ,  ${}^{78}Y_{39}$ ,  ${}^{82}Nb_{41}$ ,  ${}^{86}Tc_{43}$ ,  ${}^{90}Rh_{45}$ ,  ${}^{94}Ag_{47}$ ), въпреки че тя не дефинира drip линията, тъй като  $S_{2p}$  за повечето нечетно нечетни ядра е съотношение за най-ниските енергии  $E_0$  на  $0^+$  състоянията, а не за енергиите на свързване.

Като цяло, производните от по-висок порядък по отношение на броя на протоните (неутроните) имат гладко поведение. Това е защото тези производни отразяват измененията в последователности от само четно-четни или нечетно-нечетни ядра.



Фигура 12.4: Енергия на отделяне на два протона  $S_{2p}$  в MeV за ядрата с четно  $A$  от главния слой  $1f_{(5/2)}2p_{(1/2,3/2)}1g_{(9/2)}$ : (a) спрямо броя протони за различните изотони ( $N = 28 - 50$ ) (отчетена е енергията на кулоновото отблъскване); (b) спрямо броя на неутроните за Ge, Se, Kr, Sr изотопи.

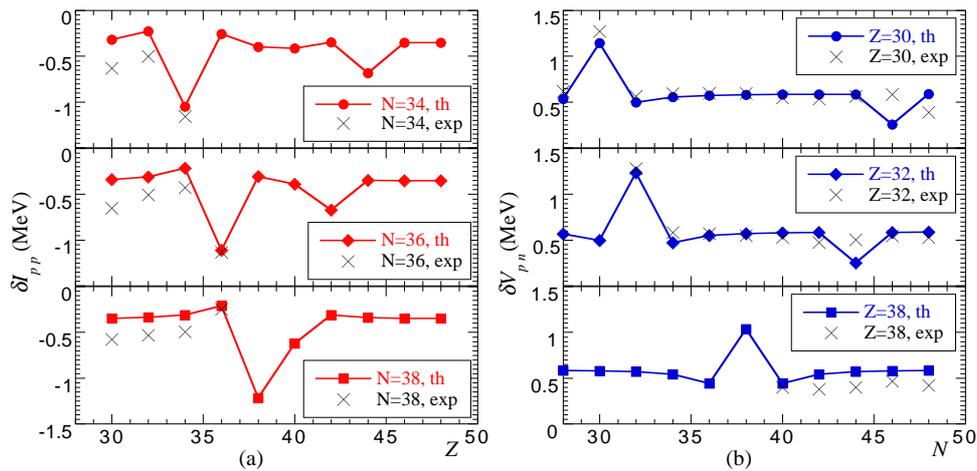
Дискретизацията

$$4\delta I_{pp(nn)}(N_{\pm 1}) = E_0(N_{\pm 1} + 2) - 2E_0(N_{\pm 1}) + E_0(N_{\pm 1} - 2)$$

[ $= 4Stg_2^{(2)}(N_{\pm 1})$ ] (12.1) ] на производната от втори порядък  $\partial^2 E_0 / \partial N_{\pm 1}^2$ , отчита взаимодействието между последните две  $pp$  ( $nn$ ) двойки в  $(N_{\pm 1} + 2)$  ядрата (Фигура 12.5(a)). Средното взаимодействие  $\delta I_{pp(nn)}$ , може да се използва като алтернативен на [218] начин за отчитане на несдвояващото взаимодействие между еднакви частици<sup>2</sup> (на последните два протона (неутрона)). То не показва изразено осцилиращо поведение, а отблъскващ връх около ядрата с  $N = Z$  в много добро съгласие с експеримента [181, 182] и с резултатите и анализа в [218]. Още един по-нисък максимум се наблюдава около средата на слоя (Фигура 12.5(a)), който се дължи на въвеждането на отличаващи се частици и дупки в теорията на сдвояването. Анализът показва, че изобщо  $Sp(4)$  модела възпроизвежда финните ефекти на взаимодействието, изолирани чрез  $Stg_2^{(2)}(N_{\pm 1})$  филтрите.

Друг аспект на ядреното взаимодействие се разкрива от смесените производни от втори порядък на енергията [174],  $\delta V_{pn}(N_{+1}, N_{-1}) = (E_0(N_{+1} + 2, N_{-1} + 2) - E_0(N_{+1} + 2, N_{-1}) - E_0(N_{+1}, N_{-1} + 2) + E_0(N_{+1}, N_{-1})) / 4$  (12.4). Показано е, че за четно-четните ядра те представляват остатъчното взаимодействие между последния протон и последния неутрон [217, 223] и което се апроксимира емпирично с  $40/A$  [173]. Теоретичната дискретна производна (Фигура 12.5(b)) е в забележително добро съгласие с експеримента, особено при възпроизвеждането на типичното поведение при  $N_{+1} = N_{-1}$ ,

<sup>2</sup> Значението “несдвояващо” се отнася до  $J \neq 0$  и  $T \neq 1$  взаимодействие или всяко взаимодействие, което е различно от това на изовекторното сдвояване. Тук също, е взето приближение до  $O(1/\Omega)$ .

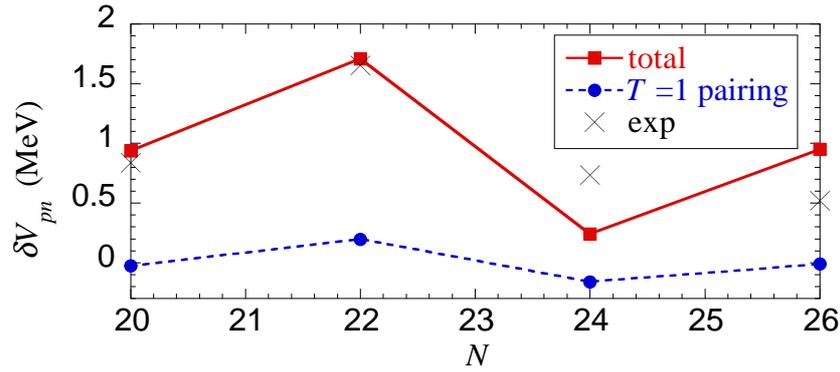


Фигура 12.5: Крайни производни от втори порядък на енергията  $E_0$  в слоя  $(1f_{(5/2)}2p_{(1/2,3/2)}1g_{(9/2)})$  shell): (a) спрямо  $N_{\pm 1}$ ,  $\delta I_{pp(nn)}(N_{\pm 1})$ , като оценка на несдвояващите взаимодействия между еднакви частици в MeV за  $N(Z) = 34, 36, 38$ -мултиплетите; (b) спрямо  $N_{+1}$  и  $N_{-1}$ ,  $\delta V_{pn}(N_{+1}, N_{-1})$ , за  $Zn, Ge, Sr$  изотопи.

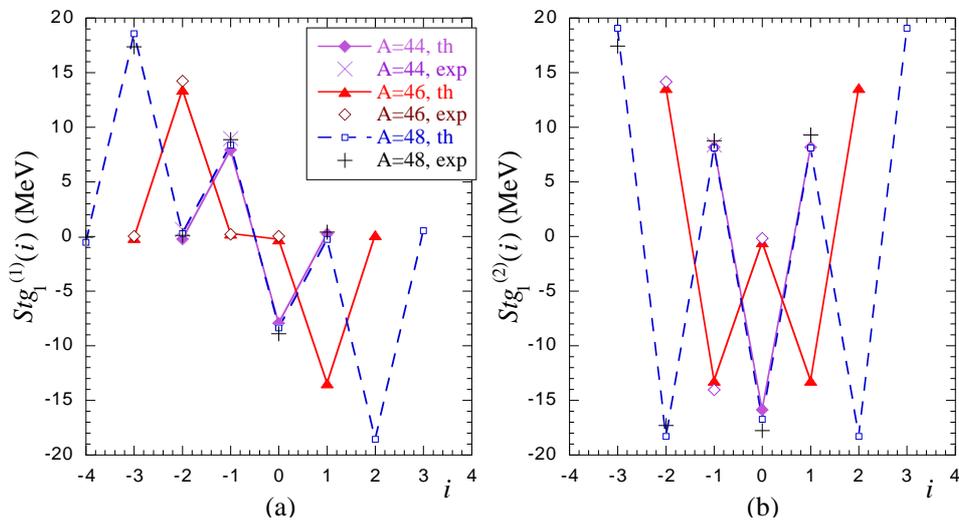
и е в съответствие с емпиричното поведение (осреднено  $\sim 0.71$  за  $1f_{7/2}$  и  $\sim 0.52$  за главния слой над  $^{56}Ni$ ). Добре известно е, че привличащия връх в самоспрегнатите ядра не може да се опише в модел само с изовекторно взаимодействие [223] и в това отношение нашия модел постига този резултат благодарение на допълнителните членове включени в хамилтониана, главно симетричния член (Фигура 12.6). Енергетичната разлика  $\delta V_{pn}$  представлява мощно средство за проверка на симплектичния модел. Теорията не само дава детайлно описание на изовекторното  $pn$  и сдвояване на еднакви частици, а и допълнително отчита  $J > 0$  компонентите на  $pn$  взаимодействие в съответствие с експеримента. В резултат модела може да се използва за разумно предсказание на  $\delta V_{pn}$  на протонно богатите екзотични ядра, както и на нечетно-нечетните ядра.

## 12.4 Дискретни производни спрямо $n$ и $i$ . Стагерингово поведение.

$Sp(4)$  класификационната схема може да се използва също и за изследване на енергетичните разлики по отношение на общия брой на частиците  $n$  и изоспиновата проекция ( $i$ ). Наистина, противно на типично гладкото поведение на крайните производни по отношение на  $N_{+1}$  и  $N_{-1}$ , което беше описано в предишния параграф 12.3, производните по отношение на  $n$  и  $i$  са тези които показват отчетливи стагеринг ефекти. Те дават връзки между четно-четните (even-even ( $ee$ )) и нечетно-нечетните (odd-odd( $oo$ )) ядра и получените зигзаообразни графики могат да се нарекат “ $ee - oo$ ” стагеринг.



Фигура 12.6:  $\delta V_{pn}$  в MeV за Ti-изотопи от  $1f_{7/2}$  слоя: (a) общата енергия на свързване; (b)  $T = 1$  сдвояващата енергия. Изовекторното сдвояващо взаимодействие не е достатъчно за да възпроизведе експерименталния връх при  $N = Z$ .



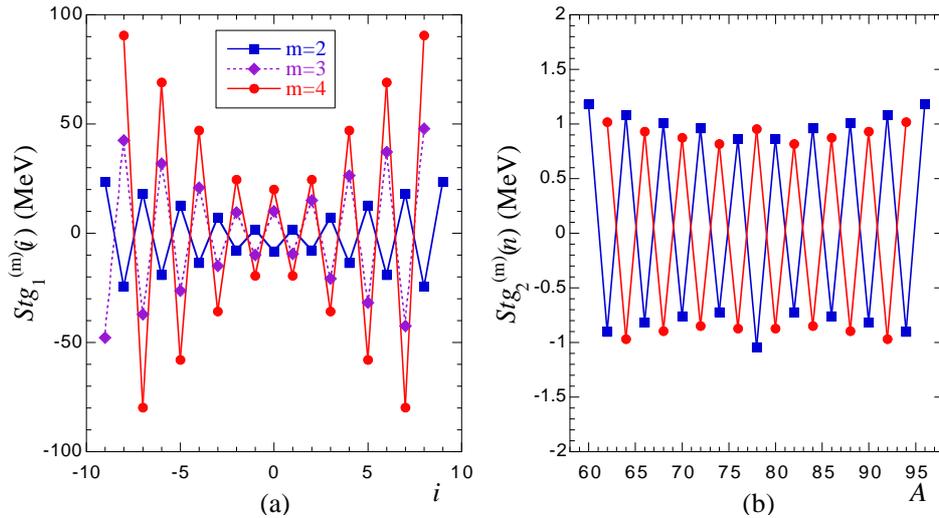
Фигура 12.7: Дискретните производни  $Stg_1^{(1,2)}(i)$  за различни изобарни мултиплети от ядрата с четни  $A$  с валентни нуклони в  $1f_{7/2}$  слоя над сърцевината  $^{40}Ca$ .

#### 12.4.1 Производни по една променлива от втори и по-висок порядък.

Дискретните производни,  $Stg_1^{(m)}(i)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , показват ясно изразен  $\Delta i = 1$  стагеринг на експерименталните енергии на най-ниските  $0^+$  изовекторно сдвоени състояния за различните изобарни мултиплети (виж Фигура 12.7 за  $1f_{7/2}$  слоя и Фигура 12.8(a) за ядрата над двойно магическата сърцевина  $^{56}Ni$ ). Теорията възпроизвежда стагеринга много добре.

За всеки от  $i$ -мултиплетите ( $i$  фиксирано), се наблюдава също и  $\Delta n = 2$  стагеринг ефект на експерименталните стойности чрез енергетичните филтри  $Stg_2^{(m)}(n)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и той е успешно предсказан от симплектичния модел (Фигура 12.9 ( $1f_{7/2}$ ) и Фигура 12.8(b) ( $1f_{(\frac{5}{2})}2p_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}1g_{(\frac{9}{2})}$ )).

Амплитудите и на двата стагеринга  $Stg_1^{(m)}(i)$  и  $Stg_2^{(m)}(n)$ , макар и почти незави-

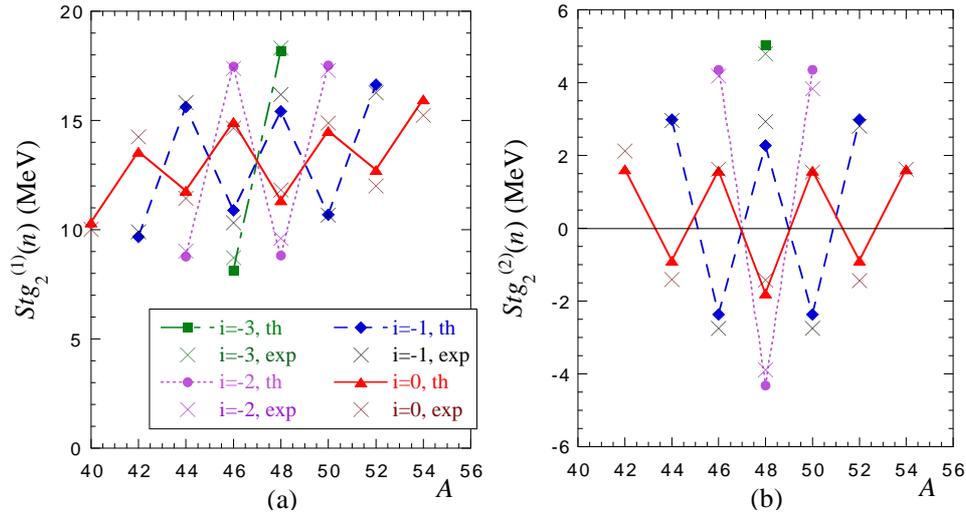


Фигура 12.8: Дискретни производни  $Stg_\delta^{(m)}(i)$  ( $1f_{(\frac{5}{2})}2p_{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})}1g_{(\frac{9}{2})}$ , над  $^{56}Ni$  сърцевината): (a)  $\delta = 1$ ,  $m = 2, 3, 4$  за изобарите с  $A = 76$ ; (b)  $\delta = 2$ ,  $m = 2, 4$  за  $i = -1$  мултиплета [ $N = Z + 2$ ].

сеци от общия брой частици  $n$ , нарастват с нарастването на разликата между броя на протоните и неутроните  $i$ , и в резултат “ $ee - oo$ ” стагеринг ефекта е по-голям за протонно- (неутронно-) богатите ядра отколкото при тези с  $N \approx Z$ . Също така, амплитудата на  $Stg_1^{(m)}(i)$  нараства при производните от по-висок порядък. Този анализ показва по сложната зависимост на енергетичната функция от изоспиновата проекция, отколкото от масовото число  $A$ .

Първата  $m = 1$ , дискретна производна,  $S_{pn} = 2Stg_2^{(1)}(n) = E_0(n+2) - E_0(n)$ , при фиксирано  $i$ , отговоря на енергията придобита при добавянето на  $pn$  двойка с  $T = 1$  (Фигура 12.9(a) ( $1f_{7/2}$ ) и Фигура 12.10 (над  $^{56}Ni$  сърцевината)).  $S_{pn}$  е истинската  $pn$  енергия на отделяне само когато  $E_0$  е енергията на свързване на нечетно-нечетното ядро влизащо в пресмятането. Експерименталните данни, където съществуват също са показани на Фигура 12.10 и  $Sp(4)$  модела следва отчетливото зигзагообразно поведение много добре.  $\Delta n = 4$  бифуркация разделя ядрата на две групи: една на четно - четните ядра  $[(n/2 + i)\text{-четно}]$  и другата на нечетно - нечетните ядра  $[(n/2 + i)\text{-нечетно}]$ .  $S_{pn}$  енергетичната разлика има гладко поведение вътре във всяка от групите. Големината на  $S_{pn}$  е пропорционална на общия брой частици и нараства (намалнява) с  $i$  за нечетно-нечетните (четно-четните) ядра (Фигура 12.10)<sup>3</sup>. Нещо повече енергетичната разлика  $Stg_4^{(1)}(n) = \frac{Stg_2^{(1)}(n+2) + Stg_2^{(1)}(n)}{2}$  не показва  $\Delta n = 4$  стагеринг (средните стойности на две последователни точки на Фигура 12.10). Това показва, че добавянето на кластер подобен на  $\alpha$ -частица има почти един и същи ефект върху четно-четните и нечетно-нечетните ядра. Това твърдение не е в про-

<sup>3</sup> Когато  $(n/2 + i)$  отговаря на нечетно-нечетно ядро  $S_{pn}$  е свързано със свойствата на четно-четното  $(n + 2)$  ядро.



Фигура 12.9: Дискретни производни  $Stg_2^{(1,2)}(n)$  за различни  $i$ -мултиплети от ядрата с четни  $A$  в  $1f_{7/2}$  слоя над  $^{40}Ca$ .

творечие с факта, че ядрата с четен брой двойки са по-силно свързани от тези с нечетен брой, което се установява чрез  $S_{pn}$  и филтъра на енергията на свързване ( $BE$ ) [191]  $\rightarrow BE(Z+2, N+2) - \frac{BE(Z+2, N) + BE(Z, N+2)}{2}$ .

#### 12.4.2 Сдвояващи процепи.

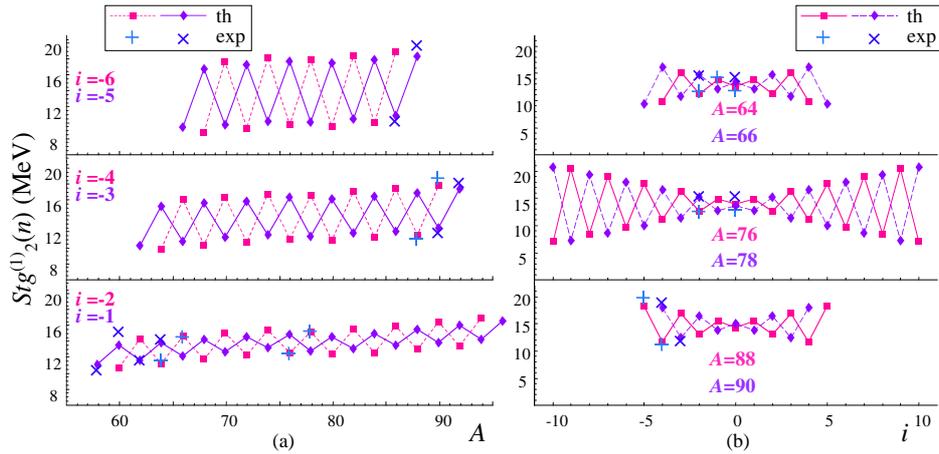
Енергетичните разлики  $Stg_1^{(m)}(i)$  и  $Stg_2^{(m)}(n)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , описани по-горе, изолират ефекти свързани с различните видове сдвояване в допълнение на немонополните взаимодействия, които са резултат на промените в енергията дължащи се на различаващи се стойности на изоспина (симетричния член). Както е отбелязано в [217, 218], значението на различните енергетични филтри може да се разбере като се използват феноменологични аргументи, на които може да се даде просто и полезно графично представяне. По-конкретно, всяко ядро може да се представи като пасивна сърцевина, схематично изобразена с квадратче  $\square$ , в което взаимодействието между частиците не се променя. Активните частици над тази сърцевина могат да се представят като плътни или кухи точки над квадратчетата, за протони и неутрони съответно.

Филтърът от втори порядък

$$\begin{aligned} Stg_1^{(2)}(i) &= E_0(i+1) - 2E_0(i) + E_0(i-1), \quad n = \text{const} \\ &= E_0(N_{+1} + 1, N_{-1} - 1) - 2E_0(N_{+1}, N_{-1}) + E_0(N_{+1} - 1, N_{-1} + 1) \end{aligned} \quad (12.6)$$

когато е центриран върху нечетно-нечетно  $[(n/2 + i)\text{-нечетно}]$  самоспрегнато ( $i = 0$ ) ядро, представя съотношението за сдвояващия процес  $2\tilde{\Delta}$ ,

$$\begin{aligned} Stg_1^{(2)}(i=0) &\stackrel{\binom{n}{2} - \text{odd}}{=} \overset{\bullet\bullet}{\square} + \overset{\circ\circ}{\square} - 2\overset{\bullet\circ}{\square} \\ &\approx 2\tilde{\Delta} \equiv 2\Delta_{pp} + 2\Delta_{nn} - 4\Delta_{pn}. \end{aligned} \quad (12.7)$$



Фигура 12.10: Дискретната апроксимация  $Stg_2^{(1)}(n)$  на първата производна,  $\partial E_0/\partial n$  (над  ${}^{56}Ni$ ) по отношение на: (a)  $A$  за няколко  $i$ -мултиплета; (b)  $i$  за различни изобари.

Резултатът (12.7) следва от добре известната емпирична дефиниция на сдвояващия процес между еднакви частици [111]

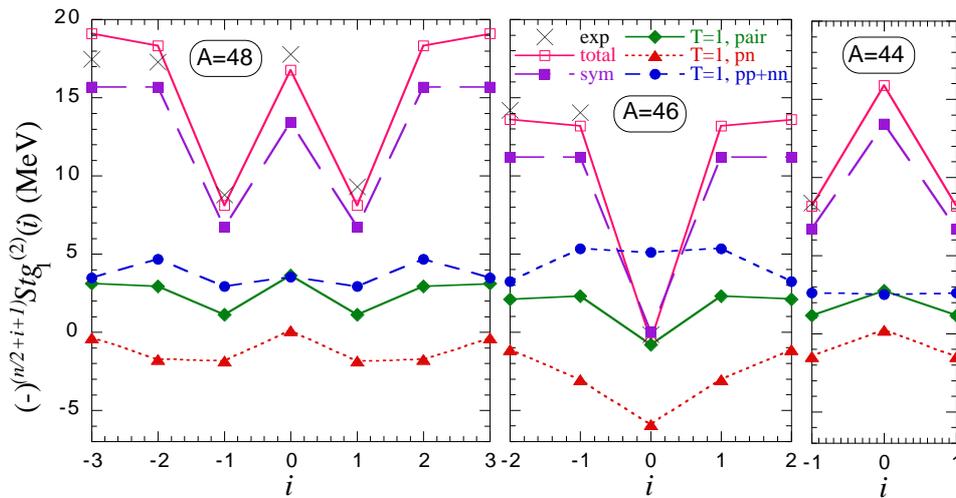
$$\begin{aligned}
 \Delta_{pp(nn)} &\equiv \\
 &\equiv \frac{1}{2}(BE(N_{+1} \pm 1, N_{-1} \mp 1) - BE(N_{+1} - 1, N_{-1} - 1) \\
 &\quad - 2[BE(N_{\pm 1}, N_{\mp 1} - 1) - BE(N_{+1} - 1, N_{-1} - 1)]) \\
 &= \frac{1}{2}(\overset{\bullet\bullet}{\square} - \square - 2[\overset{\bullet}{\square} - \square]),
 \end{aligned} \tag{12.8}$$

която изолира изовекторното сдвояващо взаимодействие на  $(N_{\pm 1})$ -ия и  $(N_{\pm 1} + 1)$ -ия протони (неутрони) за четно-четната  $(N_{+1} - 1, N_{-1} - 1)$ -сърцевина (означена с квадратче) [218]. Ние дефинираме също и  $pn$  изовекторен процес на сдвояване

$$\begin{aligned}
 \Delta_{pn} &\equiv \\
 &\equiv \frac{1}{2}(E_0(N_{+1}, N_{-1}) - BE(N_{+1}, N_{-1} - 1) \\
 &\quad - [BE(N_{+1} - 1, N_{-1}) - BE(N_{+1} - 1, N_{-1} - 1)]) \\
 &= \frac{1}{2}(\overset{\bullet\circ}{\square} - \overset{\bullet}{\square} - [\overset{\circ}{\square} - \square])
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

като сдвояващото взаимодействие на  $(N_{+1})$ -ия протон и на  $(N_{-1})$ -ия неутрон. За да се отчете коректно  $T = 1$  приноса на  $pn$  сдвояването в (12.9) трябва да се приеме  $E_0$  енергията на нечетно-нечетното  $(N_{+1}, N_{-1})$  ядро (т.е., енергията на изобарно аналоговото състояние, а не тази на основното състояние  $BE$ ). За останалите четно-четни ядра в (12.6), заместването на означението  $E_0$  с  $BE$  е оправдано. При изчисляването на  $\tilde{\Delta}$ , всички енергии на свързване на ядрата с нечетни  $A$  в (12.8) и (12.9) се съкращават, така че тяхното теоретично пресмятане не е необходимо.

Изразът за процеп –  $\tilde{\Delta}$  дава мярка за разликата в енергиите на изовекторно-то сдвояване между четно-четните и нечетно-нечетните ядра. За нечетно-нечетните ядра с  $N = Z$  информацията за  $\tilde{\Delta}$  се получава чрез енергетичния филтър  $Stg_1^{(2)}(i)$  (12.6). И експерименталната и моделната оценки дават  $\tilde{\Delta} \cong 0$  за всички нечетно-нечетни ядра с  $i = 0$  в  $1f_{7/2}$  слоя (например, виж плътната (лилава) линия с кухи квадратчета на Фигура 12.11 за  $A = 46$ ,  $i = 0$ ). Този резултат отразява факта, че в този случай всичките три изовекторни сдвояващи процепи,  $\Delta_{pp}$ ,  $\Delta_{nn}$  и  $\Delta_{pn}$ , са равни [157, 158].



Фигура 12.11: Сравнение на експерименталните и теоретични амплитуди на стагеринга за пълната енергия на изовекторното сдвояване, за сдвояващите енергии на  $pp$  и на еднакви частици и за симетричната енергия за  $A = 48$ ,  $A = 46$  и  $A = 44$  ядра от  $1f_{7/2}$  слоя (сърцевина  $^{40}\text{Ca}$ ).

Като разглеждаме дискретната производна  $Stg_1^{(2)}(i)$  центрирана на четно ( $n/2+i$ ) ядро с  $N = Z$  (спрямо  $(N_{+1} - 2, N_{-1} - 2)$  сърцевина)

$$\begin{aligned} Stg_1^{(2)}(i=0) &= \begin{array}{ccc} \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \square & + \square & - 2 \square \end{array}, \quad \left(\frac{n}{2} + i\right) - \text{четно} \\ &\approx -\frac{2}{3}\tilde{\Delta} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1}, \end{aligned} \quad (12.10)$$

се осъществява различна в две отношения ситуация. В (12.10) се появява допълнително несдвояващо двучастично взаимодействие,  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$ , което не е филтрирано. Тук, например,  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$  е свързано с несдвояващото взаимодействие на три протона и на три неутрона в нечетно-нечетното ядро. Друга нова характеристика на (12.10) е, че  $Stg_1^{(2)}(i=0)$  не само просто отчита енергията спечелена, когато се създават две  $pn$  двойки (в първите две нечетно-нечетни ядра), но и енергията загубена при разделянето на  $pp$  и на  $nn$  двойки в четно-четното ядро с  $N = Z$ . Пряката причина

за това е, че  $pp$ ,  $nn$  и  $pn$  ( $T = 1$ ) двойките съществуват едновременно. Добро приближение, което служи при оценката на сдвояващите процепи е да се предположи, че  $2p - 2n$  формацията над неактивната сърцевина ( $\square$ ) се състои от  $n_0 = 2/3 pn$  двойки,  $n_1 = 2/3 pp$  двойки и  $n_{-1} = 2/3 nn$  двойки (вместо от протонна двойка ( $n_1 = 1$ ) и неутронна двойка ( $n_{-1} = 1$ )). Това е аналогично на ядро с  $n = 4$ , където броя на  $pp$ ,  $nn$  и  $pn$  двойките е същия и е равен на една трета от общия брой на двойките  $n/2$  [A12, 60, 61]. Допълнително, съотношения като (12.7) – (12.10) се основават на допускането, че взаимодействието на частиците със сърцевината е независимо от типа на добавените/ премахнатите частици и е еднакво за всички протони (неутрони) над сърцевината. На края трябва да се отбележи, че всички приближения са до порядък  $O(1/\Omega)$ .

Допълнителното немонополно двучастично остатъчно взаимодействие  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$  трябва да се отчита също за останалите (четно-четни,  $ee$ , и нечетно-нечетни,  $oo$ ) ядра с  $i \neq 0$ .

$$Stg_1^{(2)}(i \neq 0) \approx \begin{cases} -\frac{4}{3}\tilde{\Delta} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , ee \\ \frac{4}{3}\tilde{\Delta} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , oo. \end{cases} \quad (12.11)$$

Главния принос към  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$  взаимодействието се дължи на симетричната енергия, както се вижда от  $Sp(4)$  модела.

Много близките до експерименталния стагеринг теоретични резултати позволяват да използваме симплектичния модел за микроскопично обяснение на наблюдаваните ефекти, чрез изследване на различните членове в Хамилтониана (11.4) (Фигура 12.11). Съгласно  $Sp(4)$  модела, “ $ee-oo$ ” стагеринг се появява заради дискретната промяна на квантовите числа на сташинството (seniority numbers) предизвикана от  $T = 1$  сдвояващото взаимодействие [A12]. Четните стойности на числото ( $\nu_1$ ) в четно-четните ядра и нечетните в нечетно-нечетните ядра водят до промяна във взаимно противоположни посоки на сдвояващите енергии на  $pn$  и еднаквите частици. След като се отстрани приноса на изовекторната енергия на сдвояване, теоретичната амплитуда на стагеринга  $(-)^{\frac{n}{2}+i+1} Stg_1^{(2)}(i)$ , все още съдържа (сравнително голяма) компонента от останалите ( $J \neq 0, T \neq 1$ ) взаимодействия в хамилтониана (11.4), главно от симетричния ( $T^2$ ) член (Фигура 12.11, линията (лилава) със широкия пунктир и квадратчетата). Това е същото немонополно ядрено взаимодействие,  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$ , което се получава в (12.10) и (12.11) с помощта на феноменологични аргументи. Наистина приносът на симетричната енергия е значителен и ненулев във всички ядра, с изключение на нечетно-нечетните с  $N = Z$  (11.4) (Фигура 12.11), което е в съответствие и с анализа направен по-горе [(12.7), (12.10) и (12.11)]. Оценка на сдвояващите процепи е възможна също и само с анализ на моделния хамилтониан, но теоретичните амплитуди на стагеринга на сдвояващите енергии с  $T = 1$  (показани на Фигура

12.11) трябва да се прескалират в съответствие с (12.7), (12.10) и (12.11).

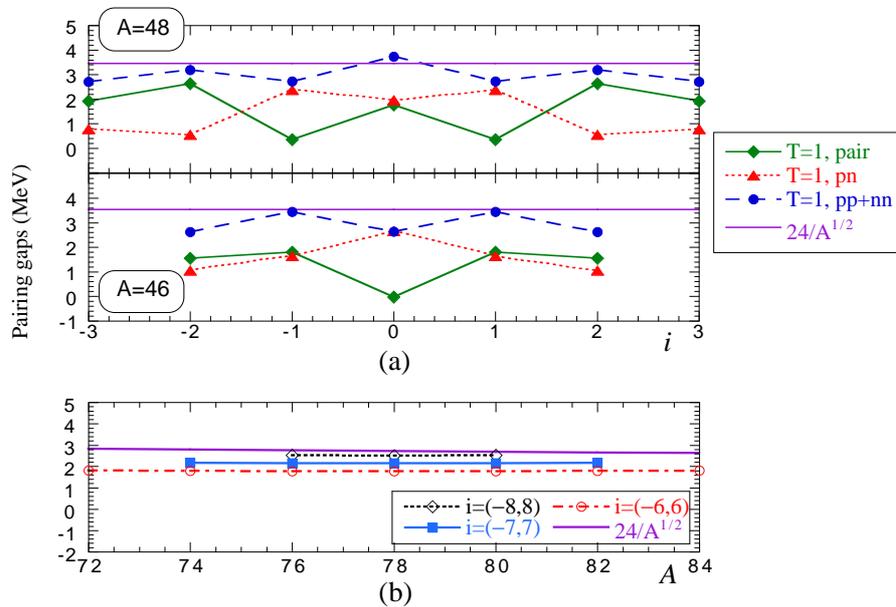
По начин, аналогичен на изложения по-горе (12.11), дискретната производна от втори порядък по отношение на  $n$  (може да се сравни с филтъра използван в [157])

$$Stg_2^{(2)}(n) = \frac{E_0(n+2) - 2E_0(n) + E_0(n-2)}{4}, \quad i = \text{const} \quad (12.12)$$

е свързана със съотношението за сдвояващия процес

$$Stg_2^{(2)}(n) \approx \begin{cases} -\frac{\tilde{\Delta}}{3} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , ee \\ \frac{\tilde{\Delta}}{3} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , oo, \end{cases} \quad (12.13)$$

където в нечетно-нечетния случай, например  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$  е несдвояващото взаимодействие на последните два протона с последните два нейтрона в  $(n+2)$  ядрото. Ефектите дължащи се на  $\tilde{\Delta}$  не могат да се изолират от (12.13), поради допълнителния ненулев принос на симетричната енергия. Обаче стагеринг амплитудата на крайната производна (12.12),  $-3(-)^{\frac{n}{2}+i} Stg_2^{(2)}(n)$ , на теоретичната обща,  $pp$  ( $nn$ ) и  $pn$  сдвояващи енергии може да послужи за оценка на сдвояващите процеси  $\tilde{\Delta}$ ,  $\Delta_{pp(nn)}$  и  $-2\Delta_{pn}$ , съответно (Фигура 12.12(a)). Сдвояващия процес на еднакви частици може да се сравни с емпиричната стойност на  $\Delta_{pp} + \Delta_{nn} = 24/A^{1/2}$  [111] (плътната (виолетова)



Фигура 12.12: Оценка на сдвояващите процеси: (a) общ изовекторен сдвояващ процес  $\tilde{\Delta}$ ,  $2\Delta_{pn}$  и  $\Delta_{pp} + \Delta_{nn}$ , както и емпиричен сдвояващ процес за еднакви частици  $\Delta_{pp} + \Delta_{nn} = 24/A^{1/2}$  даден за сравнение за  $A = 48$  и  $A = 46$  ядрата спрямо  $i$  ( $1f_{7/2}$  слоя); (b) сдвояващ процес за еднакви частици (съгласно (12.14)) спрямо  $A$  за  $i = \pm 6, \pm 7, \pm 8$  мултиплетите в  $1f_{(5/2)} 2p_{(1/2, 3/2)} 1g_{(9/2)}$  слоя.

линия). Процепът в нечетно-нечетните ядра е по-малък в сравнение с този в тяхните съседни четно-четни ядра. Това е следствие от намаляването на сдвояващата енергия на еднаквите частици в нечетно-нечетните ядра, дължащо се на блокиращия ефект, докато енергията на  $pn$  сдвояване нараства.  $pn$  изовектореният сдвояващ процес нараства към  $i = 0$  и евентуално става почти равен на  $\Delta_{pp(nn)}$  за нечетно-нечетните ядра от областа с  $N = Z$ , което е в съгласие с обсъждането в [157, 158].

Понататък, средна стойност на допълнителното несдвояващо взаимодействие се получава чрез производните от четвърти порядък както по  $n$  ( $Stg_2^{(4)}(n)$ ) така и по  $i$  ( $Stg_1^{(4)}(i)$ )

$$\tilde{\Delta}_{|i| \neq 0,1} \approx \frac{3}{16} (-)^{n/2+i} (Stg_1^{(4)}(i) - I_2^{J \neq 0, T \neq 1}) \quad (12.14)$$

$$\approx 3 (-)^{n/2+i} (Stg_2^{(4)}(n) - I_2^{J \neq 0, T \neq 1}). \quad (12.15)$$

Ако предположим, че  $pn$  сдвояващия процес е пренебрежим за ядрата с голямо  $i$  в широките слоеве като главния слой  $1f_{(\frac{5}{2})}2p_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}1g_{(\frac{9}{2})}$ , съотношенията за процеп (12.14) или (12.15) дават възможност за груба оценка и на сдвояващия процес между еднакви частици. Използвайки моделния хамилтониан (11.4) може да се оцени и допълнителното взаимодействие  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$  с главен принос от симетричната енергия. Въпреки, че съществуването на много слабо смесване на стойностите на изоспина усложнява пресмятането на симетричната енергия за ядрените системи с много големи матрици на взаимодействието, като много добро приближение може да се ползва  $E_{sym, T} = \frac{E}{2\Omega} T(T+1)$  със стойност на изоспина  $T = |i|$  за четно-четните ядра и  $T = |i| + 1$  за нечетно-нечетните. Ако дискретната производна от четвърти порядък (12.1) на приближената енергия на симетрия, се премахне от  $Stg_1^{(4)}(i)$  (12.14), получените стойности за сдвояващите процепи на еднаквите частици  $\Delta_{pp} + \Delta_{nn}$  се получават с много добро съответствие на експерименталната апроксимация от  $24/\sqrt{A}$  за ( $i = \pm 6, \pm 7, \pm 8$ )-мултиплетите в главния слой  $1f_{(\frac{5}{2})}2p_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}1g_{(\frac{9}{2})}$  (Фигура 12.12(b)). За по-ниските стойности на  $|i|$  разликата се увеличава, поради нарастването на  $pn$  сдвояващия процес, както бе отбелязано по-горе. Изобщо, изводът е, че съгласието би било невъзможно, без отчитането на значителния принос на симетричната енергия.

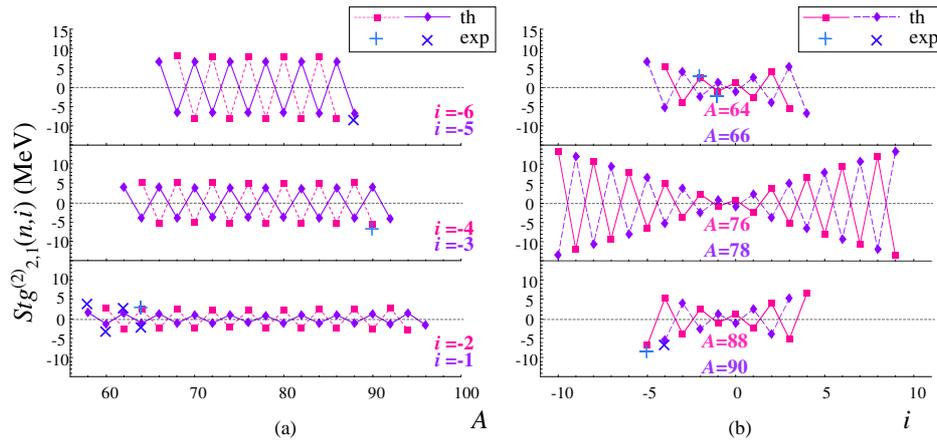
### 12.4.3 Смесени производни от втори порядък.

Понататък разглеждаме смесените дискретни производни на съответните енергии, от втори порядък по отношение на общия брой частици  $n$  и третата проекция  $i$

$$Stg_{2,1}^{(2)}(n, i) = \frac{E_0(n+2, i+1) - E_0(n+2, i) - E_0(n, i+1) + E_0(n, i)}{2} \quad (12.16)$$

$$\approx \begin{cases} \frac{2}{3} \tilde{\Delta} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , ee \\ -\frac{2}{3} \tilde{\Delta} + I_2^{J \neq 0, T \neq 1} & , oo \end{cases} \quad (12.17)$$

където в допълнение на съотношението за сдвояващите процепи  $\tilde{\Delta}$ , се появява и принос дължащ се на несдвояващото взаимодействие  $I_2^{J \neq 0, T \neq 1}$ . Например за нечетно-нечетния (четно-четния) случай, това е положителното (отрицателното) несдвояващо средно взаимодействие между последните три протона (неутрона) в  $(n+2[n], i+1)$  ядрото със сърцевина  $(n-2[n-4], i)$ . В рамките на  $Sp(4)$  допълнителното несдвояващо взаимодействие отговаря на стагеринг на приближението на симетричната енергия,  $E_{sym,T}$ , което е  $(-)^{n/2+i+1} \frac{E}{2\Omega} (2|i| + 3)$ .



Фигура 12.13: Енергичен филтър от втори порядък  $Stg_{2,1}^{(2)}(n, i)$  за ядрата над сърцевината  ${}^{56}Ni$  по отношение на  $A$  (a) и  $i$  (b).

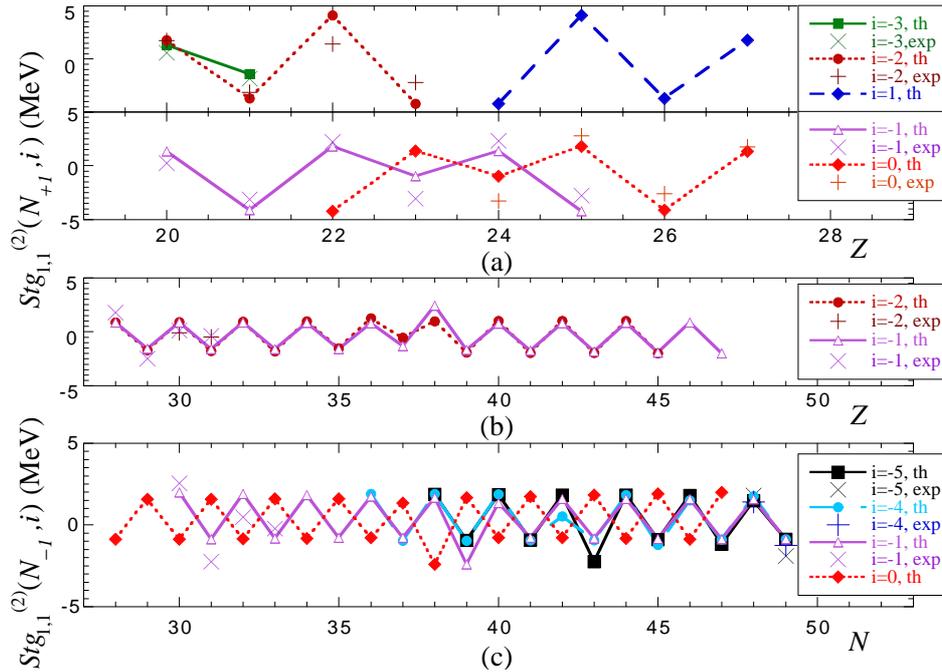
Филтърът (12.16) изолира ефектите на финната структура между два  $i$ -мултиплета (Фигура 12.13(a)) и две последователни изобарни редици (Фигура 12.13(b)). Очевидно той показва  $\{\Delta n, \Delta i\} = \{2, 1\}$  симетрични осцилации, каквито се наблюдават и експериментално. Неговите положителни (отрицателни) стойности са центрирани на четно-четните (нечетно-нечетните) ядра и неговата амплитуда нараства (намалява) с  $|i|$ . Тази смесена дискретна производна (12.16) служи като още един тест на  $Sp(4)$  модела и позволява да се изследват подробно, включените в него несдвояващи взаимодействия между един и същи вид частици.

За да се изолират ефектите на несдвояващите взаимодействия (отново се разбира до порядък,  $1/\Omega$ ), може да се разгледа енергична разлика по отношение едновременно на  $N_{\pm 1}$  и  $i$ . Втората крайна производна на енергията

$$Stg_{1,1}^{(2)}(N_{\pm 1}, i) = \frac{1}{2} \left[ E_0(N_{\pm 1}+1, i+1) - E_0(N_{\pm 1}+1, i) - E_0(N_{\pm 1}, i+1) + E_0(N_{\pm 1}, i) \right] \quad (12.18)$$

представлява отрицателното (положителното) несдвояващо двучастично взаимодействие на последните два неутрона (протона) с протон и неутрон в  $(N_{\pm 1}+1, i[+1])$  ядрото. Тя показва ясно изразен  $\Delta i = 1$  стагеринг за различните  $i$ -мултиплети (Фигура 12.14). Докато в рамките на  $Sp(4)$  модела, неговата амплитуда не зависи от

$N_{\pm 1}$  и  $i$  с изключение на нерегулярностите в средата на слоя, големината на няколко експериментални стойности (където съществуват данни) има тенденция слабо да намалява с отдалечаването от затворения слой. Изобщо, резултатите показват, че стагеринговото поведение на това взаимодействие се дължи на характеристиките на финната структура във взаимоотношеността между несдвояващите взаимодействия на частиците от един и същи тип и  $pn$  и се различава при протонно богатите и неутронно богатите ядра.



Фигура 12.14: Дискретна производна,  $Stg_{1,1}^{(2)}(x, i)$ , за различни  $i$ -мултиплети на ядрата с четни  $A$ : (a)  $x = N_{+1}$ ,  $1f_{7/2}$  нивото; (b)  $x = N_{+1}$ ,  $1f_{(5/2)}2p_{(1/2, 3/2)}1g_{(9/2)}$  слоя; (c)  $x = N_{-1}$ ,  $1f_{(5/2)}2p_{(1/2, 3/2)}1g_{(9/2)}$  слоя.

Относно (12.18) и другите дискретни апроксимации на производните в §12.4, е ясно, че съществуващите осцилации и равномерното им поведение по цялата таблица на ядрата не може да е просто ефект в следствие на грешките в теоретичните или експериментални енергии. Нещо повече, амплитудите на стагеринга са обикновено много големи в сравнение с неопределеностите в енергиите.

За всички крайни производни, които изследвахме по-горе и които показват “ $ee$ - $oo$ ” стагерингово поведение, прекъснатостта на симетричния член (дължаща се на дискретните промени в стойностите на изоспина) играе много важна роля. И напротив, когато тези дискретни производни включват състояния на нечетно-нечетни ядра с преобладаващо  $T = 0$   $pn$  сдвояване има постоянен или никакъв принос от симетричната енергия и следователно се наблюдава поведение от различен тип и с различна интерпретация. Нашето изследване нямаше за цел да отчете такива ефек-

ти. То е фокусирано на “ $ee-oo$ ” стагеринговото поведение на  $E_0$  енергиите на най-ниските *изовекторно сдвоени* състояния, каквито са наблюдавани в експеримента и които се възпроизвеждат забележително добре от  $Sp(4)$  модела.

В заключение, можем да обобщим, че динамичната  $Sp(4)$  симетрия беше използвана тук за създаването на естествена класификационна схема на ядрата и за описание на изовекторните сдвояващи и с по-високи  $J$  взаимодействия. В предишното изследване [A12], беше показано, че  $Sp(4)$  модела възпроизвежда сравнително добре експерименталните енергии на най-ниските *изовекторно сдвоени*  $0^+$  състояния и дава възможност за отределяне на параметрите на силите на взаимодействията.

Тук приложимостта на алгебричния  $sp(4)$  подход беше допълнително проверена чрез дискретните производни от втори и по-висок порядък на енергиите на най-ниските *изовекторно сдвоени*  $0^+$  състояния в  $Sp(4)$  систематиката, без да се прави допълнително вариране на параметрите. Ако в действителност имахме само теорията на средното поле, нито една от енергетичните крайни разлики би показала равномерно или неравномерно стагерингово поведение. Наистина получените резултати показват, че това не се случва. Изследваните теоретични дискретни производни не само следват експериментално наблюдаваното поведение, но и тяхната стойност е в забележително съответствие с данните.

### 13. Нарушаване на изоспиновата симетрия в алгебричния

#### $Sp(4)$ модел на сдвояване

Фундаментална характеристика на ядрената структура е основната симетрия между неутроните и протоните, а именно *зарядовата независимост* на ядрените сили, която се изявява чрез поразителната прилика в енергетичните спектри на ядрените изобари [111]. Това означава, че протон-протонното ( $pp$ ) взаимодействие и неутрон-неутронното ( $nn$ ) взаимодействие са равни на протон-неутронното  $pn$  с изоспин  $T = 1$  взаимодействие, като това води до “ротационна инвариантност” в изотопичното пространство.

Въпреки това “проблема за нарушаване на симетрията е от основно значение както в ядрената (например [224]) така и в физиката на елементарните частици (например [225])” [111], и представлява интерес от дълго време [226–233], тъй като се свързва винаги с възникването на нови, интересни физически явления. Все пак изоспинавата инвариантност се нарушава от електромагнитното взаимодействие, главно кулоновото отблъскване между нуклоните, което е обект на множество феноменологични и микроскопични изследвания [111, 150, 171, 172, 226–242].

Основния ефект от кулоновите сили в теорията, е вкарването на зависимост от третата проекция на изоспина,  $T_0$ , в резултат на което се получава разцепване на енергиите на изобарово аналоговите състояния ( $T$ -мултиплет), без да се куплират различните изоспинови мултиплети. В същото време, нарушаващата изоспиновата инвариантност част на кулоновото взаимодействие води до слабо смесване на изоспиновете в ядрените основни състояния, увеличаващо се с  $Z$  и най-голямо при  $N = Z$ . Теоретично е оценено, че нечистотата на изоспина в основното състояние е около процент за ядрата от  $1f_{7/2}$  нивото [111], и нараства до към 4 – 5% около затварянето на  $fp$  слоя [233]. Друг източник на вероятността за смесване е незапзващата изоспина част на ядрения хамилтониан, която включва ефекти дължащи се на протон-неутронната масова разлика ( $\Delta m/m = 1.4 \times 10^{-3}$ ) и на малки зависещи от товара компоненти на силното нуклонно взаимодействие [228]. Експерименталните резултати ясно показват съществуването на изоспиново смесване [170, 243]. Нарастването на изоспиновото смесване към ядрата със средни маси е открито в новите експерименти с висока точност [224, 244–247], които продължават развитието на изследванията на нестабилните ядра с помощта на най-модерните съоръжения с

радиоактивни снопове.

Чисто ядрените части от  $pp$  сили и  $T = 1$   $pn$  сили се различават една от друга, което изглежда е свързано с електромагнитната структура на нуклоните [228]. Анализите на  $^1S$  разсейването в  $pn$  система и на нискоенергетичното  $pp$  разсейване води до оценката, че ядреното взаимодействие между протоните и неутроните ( $V_{pn}^{T=1}$ ) в  $T = 1$  състоянията е с 2% повече привличащо отколкото силата между ( $V_{pp}$ ), т.е.  $|V_{pn}^{T=1} - V_{pp}|/V_{pp} \sim 2\%$  [248]. Допълнително е намерено че, зарядовата асиметрия между  $pp$  и  $nn$  взаимодействия е по-слаба (с по-малко от 1%) [249]. По-скорошни изследвания потвърждават нарушаването на изоспиновата инвариантност в леките ядра [236, 250–253] като включват модерни зарядово зависими реалистични взаимодействия [254–257] и ценна информация от физиката на елементарните частици (виж например, [38, 225]). Нещо повече, при отчитането на кулоновата енергия, различията в енергиите на изобарните мултиплетни е по-голяма за нивата със нулево старшинство в сравнение със състоянията с по-високо старшинство, показвайки наличието на късодействащи, зависещи от товара взаимодействия [231]. Наистина, наскоро беше показано, че вдвояващите корелации с  $J = 0$  имат преобладаващо влияние в изотензорната енергетична разлика вътре в изобарните мултиплетни [258], което се проявява в товарозависимата  $T = 2$  природа на вдвояващото взаимодействие.

Откритията споменати по-горе показват необходимостта от зависещо от товара микроскопично описание на вдвояващите корелации с  $J = 0$ . Алгебричният  $sp(4)$  подход е абсолютно подходящ за тази цел [A12, A14], тъй като той комбинира от една страна микроскопичното моделиране на вдвояващото взаимодействие и зависимостта му от товара, и от друга страна дава директна схема за оценяване на значимостта на изоспиновото смесване, дължащо се на вдвояващите корелации, без нуждата от провеждането на диагонализация на многомерни матрици. Ако бъде открито силно нарушаване на изоспиновата симетрия при образуването на двойките, то това би означавало, че съществува значително изоспиново смесване между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния с нулево старшинство, включително и  $0^+$  основните състояния. Това от своя страна ще повлияе на предсказателната сила на прецизните изследвания на суперразрешените  $0^+ \rightarrow 0^+$  Fermi преходи при  $\beta$ -разпада. Това е така, защото последните представляват надежден тест за изоспиновото смесване (виж като обзор [259]), и също представляват и точен метод за оценка на условието за унитарност на матрицата на Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [260] (като обзор по този въпрос виж [261]).

Нашата цел сега е да изследваме изоспиновото смесване извън това дължащо се на кулоновото взаимодействие, което е изолирано с помощта на много съвременната формула за кулонова поправка [179]. По-конкретно ние се насочваме към незапазващата изоспина част от *чисто ядреното* взаимодействие, което напоследък се счита,

че е най-малкото толкова важно, колкото е и кулоновото отблъскване [258]. Резултатите от това изследване показват значението на зарядовата зависимост на сдвояването и неговата роля при смесването на изоспиновите мултиплети в породените от сдвояването изобарно аналогови  $0^+$  състояния.

### 13.1 Теоретичен подход: разумното приближение

Ние използваме прост, но мощен групово-теоретичен модел, който се основава на  $sp(4)$  алгебра (изоморфна на  $so(5)$  [48, 57–60]).  $Sp(4)$  микроскопичния модел е точно подходящ за качествено изучаване на нарушаването на изоспина в изобарно аналоговите  $0^+$  състояния, защото той по естествен начин разширява изоспиново инвариантното ядрено взаимодействие, за да се включат незапазващи изоспина сили, като същевременно съхранява  $Sp(4)$  динамичната симетрия на хамилтониана (виж [180] като обзор по динамични симетрии).

Сравнението с експерименталните данни доказва, че  $Sp(4)$  модела води до разумно и добро описание на напълно сдвоените изобарно аналогови  $0^+$  състояния<sup>1</sup> в леките и ядрата със средни маси, където протоните и неутроните заемат един и същи слой [A12, A13, A14]. Двучастичното моделно взаимодействие включва сдвояване на еднакви частици и протон неутронно сдвояване плюс симетрични членове и съдържа непренебрежима неявна част от квадрупол-квадруполното взаимодействие [262]. Нещо повече, моделното взаимодействие на  $Sp(4)$  подхода, е свързано с целия енергетичен спектър, а не само и единствено с  $J^\pi = 0^+ T = 1$  състоянията, и беше получено, че то е твърде силно корелирано (0.85) с реалистичното CD-Bonn+3члена взаимодействие [263] в  $T = 1$  канала и с осреднена корелация от 0.76 с реалистичното GXPF1 взаимодействие [264] за  $1f_{7/2}$  нивото [262]. На кратко, изглежда че, относително простия  $Sp(4)$  модел е разумно приближение, което възпроизвежда специално тази част от взаимодействието, която е причина за възникването на получените в резултат на сдвояването изобарно аналогови  $0^+$  състояния.

$Sp(4)$  модела отразява симплектичната динамична симетрия на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния [A14], определена от силните ядрени взаимодействия. Послабото кулоново взаимодействие нарушава тази симетрия и значително усложнява проблема за сдвояването в ядрата. Това е причината, поради която в нашето изследване ние прилагаме сложна кулонова поправка към експерименталните енергии, така че да можем да разглеждаме ядрената система като такава, в която няма кулоново взаимодействие между съставляващите я нуклони. *Кулоново поправените*

<sup>1</sup> Най-ниските от тези състояния включват основните състояния на четно-четните ядра и само някои нечетно-нечетни с  $N \approx Z$ , както и например, нисколежащите  $0^+$  състояния в нечетно-нечетните ядра които имат същия изоспин като основното състояние на полумагическото съседно четно-четно изобарно ядро с напълно сдвоени протони или неутрони.

експериментални енергии,  $E_{\text{exp}}$ , за ядро с определен брой валентни протони  $N_{+1}$  и неутрони  $N_{-1}$  се приема да бъде:

$$E_{\text{exp}}(N_{+1}, N_{-1}) = E_{\text{exp}}^C(N_{+1}, N_{-1}) - E_{\text{exp}}^C(0, 0) + V_{\text{Coul}}(N_{+1}, N_{-1}), \quad (13.1)$$

където  $E_{\text{exp}}^C$  е общата измерена енергия, включително с кулоновата енергия,  $E_{\text{exp}}^C(0, 0)$  е енергията на свързване на ядрената сърцевина, и  $V_{\text{Coul}}(N_{+1}, N_{-1})$  е кулоновата поправка за ядро с масово число  $A$  и  $Z$  протони взета по отношение на сърцевината:

$$V_{\text{Coul}}(N_{+1}, N_{-1}) = V_{\text{Coul}}(A, Z) - V_{\text{Coul}}(A_{\text{core}}, Z_{\text{core}}).$$

Рекурсионната формула за кулоновата енергия  $V_{\text{Coul}}(A, Z)$  е изведена в [179] като се използва формулата на Rare и Antony [265]. Кулоново поправените енергии (13.1) отразяват единствено и само ядрените свойства на многонуклонните системи.

Приемайки независимост от товара на ядрените сили, общия изоскаларен хамилтониан с  $Sp(4)$  динамична симетрия, който се състои от едно- и двучастични членове и запазва броя на частиците, е изразен тук чрез груповите генератори на  $Sp(4)$  по следния начин:

$$H_0 = -G \sum_{i=-1}^1 \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i - \frac{E}{2\Omega} \left( \hat{T}^2 - \frac{3\hat{N}}{4} \right) - C \frac{\hat{N}(\hat{N}-1)}{2} - \epsilon \hat{N}, \quad (13.2)$$

където  $\hat{T}^2 = \Omega \{ \hat{T}_+, \hat{T}_- \} + \hat{T}_0^2$  и  $2\Omega$  е размерността на слоя за даден вид нуклони. Генераторите  $\hat{T}_\pm$  и  $\hat{T}_0$  са валентните изоспинови оператори,  $\hat{A}_{0,+1,-1}^{(\dagger)}$  раждат (унищожават) съответно протон-неутронна ( $pn$ ) двойка, протон-протонна ( $pp$ ) двойка или неутрон-неутронна ( $nn$ ) двойка с общ ъглов момент  $J^\pi = 0^+$  и изоспин  $T = 1$ , и  $\hat{N} = \hat{N}_{+1} + \hat{N}_{-1}$  е общия брой валентни частици със собствена стойност  $n$ .  $G, E$  и  $C$  са параметрите на силите на взаимодействията и  $\epsilon > 0$  е енергията на Fermi нивото (виж за стойностите им Таблица 11.4 в Глава 11 и [A14]). Запазващия изоспина хамилтониан (13.2) включва изовекторно ( $T = 1$ ) сдвояващо взаимодействие ( $G \geq 0$  за привличане) и диагонална изоскаларна ( $T = 0$ ) сила, която е свързана със симетричния член ( $E$ ).

Зависещото от товара, но симетрично по него нуклон-нуклонно взаимодействие ( $V_{pp} = V_{nn} \neq V_{pn}$ ) вкарва в ядрения хамилтониан малка изотензорна компонента (с нулева трета проекция на изоспина, така че хамилтониана комутира с  $T_0$ ). Това се постига в  $Sp(4)$  модела чрез въвеждането на два допълнителни члена,

$$H_{\text{IM}} = -F \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0, \quad H_{\text{split}} = -D \left( \hat{T}_0^2 - \frac{\hat{N}}{4} \right), \quad (13.3)$$

<sup>2</sup> За да избегнем объркване ние отбелязваме, че в (13.1) енергиите се приемат положителни за свързаните състояния;  $V_{\text{Coul}}$  е също дефинирано като положително.

Таблица 13.1: Параметри на силата на взаимодействията свързани с изоспиновия проблем за три области от ядра определени от валентните моделни пространства.  $F$ ,  $D$ , и  $E$  са в MeV.

Параметри	Моделни пространства			
		$(1d_{3/2})$	$(1f_{7/2})$	$(1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2})$
$F/\Omega$		0.007	0.072	0.056
$D$		0.127	0.149	-0.307
$ D/\frac{E}{2\Omega} $		0.090	0.133	0.628

към изоспиново инвариантния моделен хамилтониан (13.2) така че хамилтониана

$$H = H_0 + H_{\text{IM}} + H_{\text{split}} \quad (13.4)$$

притежава  $Sp(4)$  динамична симетрия. С други думи, зависимостта от товара се въвежда в моделния вдвояващ хамилтониан (13.2) като се оставят силите на двете съдържащи се в него взаимодействия да варират. Параметрите на силите на взаимодействията  $F$  и  $D$  (13.3) определени при оптимално фитиране на значителен брой ядра (общо 149) [A12] са дадени в Таблица 13.1 и очевидно имат ненулеви стойности. Както се очаква от наблюденията, за  $1d_{3/2}$  нивото силите на взаимодействието на всичките типове  $pn$ ,  $pp$  и  $nn$  вдвояване са почти равни ( $T$  е добро квантово число),  $F/\Omega = 60.007$ , и те се различават за  $1f_{7/2}$  and for и  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоевете, като изовекторната сила на  $pn$  вдвояването е по-привличаща,  $F > 0$ . Пълният хамилтониан (13.4) дава качествени резултати, които превъзхождат получените с  $F = 0$  и  $D = 0$ ; на пример, в случая на  $1f_{7/2}$  нивото отклонението между моделните и експерименталните енергии на най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния нараства с 85% когато се изключат  $D$  и  $F$  взаимодействията. За настоящото изследване параметрите в (13.2) заедно с  $F$  и  $D$  (13.3) не се варират, тъй като техните стойности са фиксирани като физически валидни и дават добри енергии [A12, A14] както и възпроизвеждат финната структура [A13] за леките и средно тежките ядра с валентни протони и неутрони заемащи един и същи слой. За тези ядра в масовата област  $32 \leq A \leq 100$ , породените от вдвояването изобарно аналогови  $0^+$  състояния се описват добре, но все пак приблизително от собствените вектори на ефективния хамилтониан (13.4) в базиса на напълно вдвоените ( $pp$ ,  $pn$  и  $nn$   $T = 1$  двойки)  $0^+$  състояния ([A14] Table 13.2).

Докато второто взаимодействие ( $H_{\text{split}}$ ) в (13.3) отчита само разцепването на изобарно аналоговите енергии, първият член предизвиква малко изоспиново смесване (isospin mixing – IM). Взаимодействието на изоспиновото смесване (13.3) не отчи-

Таблица 13.2: Класификационна схема на ядрата с четно- $A$  от  $1f_{7/2}$  слоя. Формата на Таблицата е симетрична по отношение на знака на  $T_0$  и  $n - 2\Omega$ . Операторите дадени в скоби (и техните ермитова спрегнати) дават преходите в пространството на действие опънато от собствените стойности на изоспина,  $|n, T, T_0\rangle$ , които са линейни комбинации на напълно сдвоените базисни състояния.

$n$	Проекция на изоспина $T_0$					
	2	1	0	-1	-2	-3
0			${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ $ 0, 0, 0\rangle$			
2		${}^{42}_{22}\text{Ti}_{20}$ $ 2, 1, 1\rangle$	${}^{42}_{21}\text{Sc}_{21}$ $ 2, 1, 0\rangle$	${}^{42}_{20}\text{Ca}_{22}$ $ 2, 1, -1\rangle$		
4	↙	${}^{44}_{23}\text{V}_{21}$ $ 4, 2, 1\rangle$	${}^{44}_{22}\text{Ti}_{22}$ $ 4, 2, 0\rangle$	${}^{44}_{21}\text{Sc}_{23}$ $ 4, 2, -1\rangle$	${}^{44}_{20}\text{Ca}_{24}$ $ 4, 2, -2\rangle$	
6	⋯	${}^{46}_{24}\text{Cr}_{22}$ $ 6, 3, 1\rangle$ $ 6, 1, 1\rangle$	${}^{46}_{23}\text{V}_{23}$ $ 6, 3, 0\rangle$ $ 6, 1, 0\rangle$	${}^{46}_{22}\text{Ti}_{24}$ $ 6, 3, -1\rangle$ $ 6, 1, -1\rangle$	${}^{46}_{21}\text{Sc}_{25}$ $ 6, 3, -2\rangle$	↘ ( $A_{-1}^{\dagger}$ )
8	← ( $T_+$ )	${}^{48}_{25}\text{Mn}_{23}$ $ 8, 4, 1\rangle$ $ 8, 2, 1\rangle$	${}^{48}_{24}\text{Cr}_{24}$ $ 8, 4, 0\rangle$ $ 8, 2, 0\rangle$ $ 8, 0, 0\rangle$	${}^{48}_{23}\text{V}_{25}$ $ 8, 4, -1\rangle$ $ 8, 2, -1\rangle$	${}^{48}_{22}\text{Ti}_{26}$ $ 8, 4, -2\rangle$ $ 8, 2, -2\rangle$	⋯
10	⋮	⋮	↓ ( $A_0^{\dagger}$ )	⋮	⋮	↙ ( $A_{+1}^{\dagger}$ )

та пълното взаимодействие, което смесва състоянията със еднакъв ъглов момент и четност, но различни стойности на изоспина. То описва само възможното  $\Delta T = 2$  смесване между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния, дължащо се на чистото ядрено сдвояващо взаимодействие. Докато степента на такова смесване се очаква да е по-малка отколкото от пълното смесване, предизвикано от незапазващите изоспина членове [171, 230, 234–236, 259], то може да повлияе на точността на моделните пресмятания в зависимост от важността на зависимостта от товара при сдвояващите корелации.

### 13.2 Нарушаване на изоспиновата инвариантност и смесване на изоспина

Оценката за моделните параметри (Таблица 13.1) може да определи степента, до която изоспиновата симетрия е нарушена, докато  $T$  все още е добро квантово число. Нарушаването на изоспиновата инвариантност  $|D/\frac{E}{2\Omega}|$  (Таблица 13.1) е изобщо пренебрежимо за леките ядра от  $1d_{3/2}$  и  $1f_{7/2}$  нивата, което съответства и на експе-

рименталните данни. За ядрата със средни маси в главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  нарушаването на изоспиновата симетрия е значително по-голямо. Нещо повече, както се очаква от наблюденията на експеримента, за  $1d_{3/2}$  нивото силите на взаимодействията за всички  $pn$ ,  $pp$  и  $nn$  сдвоявания са почти равни ( $T$  е добро квантово число),  $F \approx 0$  (Таблица 13.1), и те се различават от тези за  $1f_{7/2}$  и  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоевете, като силата на изовекторното  $pn$  сдвояване е по-силно привличаща,  $F > 0$ . Наистина, силата на смесващото изоспина  $F$  взаимодействие е изключително малка и следователно зарядово независимо ядрено взаимодействие (в което  $F$  е пренебрегнато) представлява доста добро приближение. Това води до сериозно упростиране на проблема на сдвояването и в резултат повечето от изследванията на изовекторното сдвояване са направени при допускането за добър изоспин.

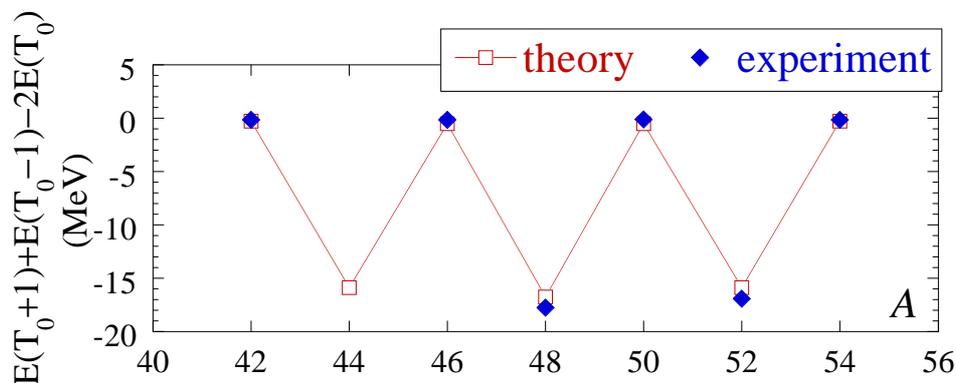
Въпроса колко са силни индивидуалните ядрени взаимодействия, незапазващи изоспина [такива като (13.3)] все още е открит – точни отговори на сегашното ниво на експериментални резултати и микроскопично теоретични интерпретации, все още няма. От данните по свободното нуклон-нуклонно разсейване [248] се получава само тяхния осреднен принос като слабо (на 2%) по привличащ в  $pn$   $T = 1$  система, отколкото в  $pp$  системата. В рамките на  $Sp(4)$  модела, зарядовата зависимост на чистото ядрено взаимодействие може да се оцени чрез сравняване на  $T_0 = 0$  двучастичното моделно взаимодействие [(13.4) с  $\varepsilon = 0$ ] спрямо това с  $T_0 = 1$  в  $T = 1$  мултиплетите, което например в  $1f_{7/2}$  нивото, е средно  $\sim 2.5\%$ . Тази оценка не цели да потвърди зарядовата зависимост, което е много трудно на това ниво на точност в сравнение с обширната енергетична област разглеждана в модела за ядра с маси  $32 \leq A \leq 100$ . Въпреки това тя отразява отличителните белези на експерименталните данни в свойствата на моделното взаимодействие (13.4).

В допълнение,  $Sp(4)$  модела възпроизвежда сравнително добре  $c$ -коэффициента в добре известното масово уравнение на изобарните мултиплетите [220, 226, 232]

$$a + bT_0 + cT_0^2, \quad (13.5)$$

за енергиите на свързване на изобарните аналози (със същите масови числа  $A$ , изоспин  $T$ , ъглов момент  $J$ , и т.н.), където коэффициента  $c$  ( $b$ ) зависи от изотензорната (изовекторната) компонента на ядреното взаимодействие [например, от ранг 2 (1) по отношение на изоспиновите “ротации”]. Коэффициентът  $c$  е в същност един енергетичен филтър,  $2c = E(T_0 + 1) + E(T_0 - 1) - 2E(T_0)$ , за дадено масово число  $A$  и изоспин  $T$ . В рамките на нашия модел беше получено, че тази енергетична функция за най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния е в добро съгласие с наблюдаваните ефекти на финната структура (където има налични данни) [A13] и тя възпроизвежда експерименталните ефекти на стагеринга по отношение на  $A$  (Фигура 13.1). И теоретичните и експерименталните резултати показват, че тази енергетична крайна

разлика, т.е.  $c$  е отрицателно и много близо до нулата за  $T = 1$  мултиплетите в  $1f_{7/2}$  слоя, когато функцията е центрирана на нечетно-нечетно ядро с  $N = Z$  ( $T_0 = 0$   $A/2$  нечетно), (виж Фигура 13.1 за  $A/2$  нечетно). Такова съгласие на резултатите от  $Sp(4)$  модела с експерименталните наблюдения е много ценен резултат. Изискването коефициентите на (13.5) да се възпроизвеждат добре е основно за незапазващите изоспина модели [171,230,234,258], което е постигнато в [230] чрез увеличаване (приблизително с 2%) на всички  $T = 1$   $pn$  матрични елементи спрямо тези на  $nn$  и което води до заключението в [258], че в изотензорната природа на ядреното взаимодействие преобладава вдвояващия член с  $J = 0$ . В съгласие с експеримента коефициента



Фигура 13.1: Енергетичната разлика,  $E(T_0 + 1) + E(T_0 - 1) - 2E(T_0)$  с  $T_0 = 0$ , за най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния в ядрата от  $1f_{7/2}$  нивото (или два пъти  $c$ -коефициента от (13.5) за  $A/2$ -нечетно в  $T = 1$  мултиплетите) съгласно  $Sp(4)$  модела (червена пълтна линия с празни квадратчета) в сравнение с експеримента (сини пълтни ромбчета).

$c$  в  $Sp(4)$  модела се получават отрицателни и много близки до нула за  $T = 1$  мултиплетите в  $1f_{7/2}$  слоя. Тяхното средно по отношение на енергиите на свързване на валентните нуклони се отличава от съответните експериментални стойности само с 0.3%. На кратко, свободата получена в резултат на въведените допълнителни параметри (като  $F$  и  $D$ ) отразява симетриите наблюдавани в леките ядра (добър изоспин) и сравнително по-голямото нарушаване на симетрията в средно тежките ядра. Следователно, зарядовата зависимост на ядрените сили, която е сериозно предизвикателство, дава резултати получени чрез групово-теоретичния подход, които са в качествено съответствие с получените от експеримента.

### 13.2.1 Почти изоспинова симетрия на изобарно аналоговите $0^+$ състояния

Нито емпиричните доказателства (такива като анализ на разсейването и крайните енергетични разлики), нито сравнението на моделните с експерименталните данни

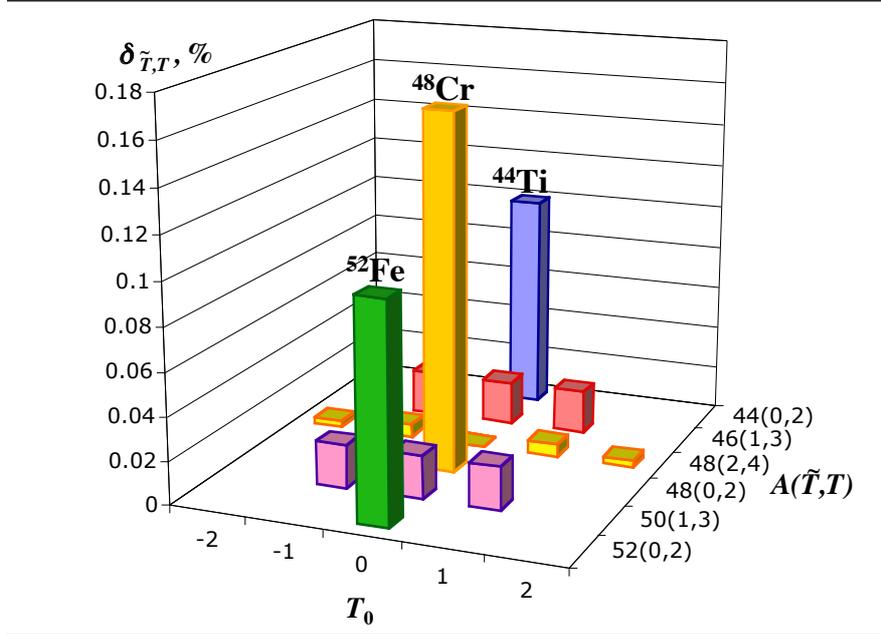
(Таблица 13.1) показват равни сили на сдвояване ( $F \gtrsim 0$ ), в резултат на което куплирането на собствените състояния на изоспина  $|n, T, T_0\rangle$  от различни изоспинови мултиплети да има степен на смесване, която се очаква да е много малка. Следователно, собствените вектори на пълния хамилтониан (13.4),  $|n(\tilde{T})T_0\rangle$ , имат почти добро квантово число на изоспина  $\tilde{T}$ . Тяхното припокриване със състоянията с определена стойност на изоспина дава оценка за големината на изоспиновите примеси (виж Таблица 13.3 за  $1d_{3/2}$  и  $1f_{7/2}$  орбиталите):

$$\delta_{\tilde{T},T} = \left| \langle n, T, T_0 | n(\tilde{T})T_0 \rangle \right|^2 * 100[\%]. \quad (13.6)$$

Таблица 13.3:  $Sp(4)$  моделни оценки за припокриването в [%] на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния с почти добър изоспин  $\tilde{T}$  със състоянията с определен изоспин за  $^{36}\text{Ar}$  в  $1d_{3/2}$  и за ядрата от  $1f_{7/2}$  слой. Таблицата е симетрична по отношение на знака на  $n - 2\Omega$ .

$^A\text{X}(\tilde{T})$	$(N_{+1}, N_{-1})$	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 3$	$T = 4$
$^{36}\text{Ar}^{(0)}$	(2, 2)	99.9999	-	0.0001	-	-
$^{44}\text{Ti}^{(0)}$	(2, 2)	99.90	-	0.10	-	-
$^{46}\text{Ti}^{(1)}$	(2, 4)	-	99.98	-	0.02	-
$^{46}\text{V}^{(1)}$	(3, 3)	-	99.98	-	0.02	-
$^{46}\text{Cr}^{(1)}$	(4, 2)	-	99.98	-	0.02	-
$^{48}\text{Ti}^{(2)}$	(2, 6)	-	-	99.997	-	0.003
$^{48}\text{V}^{(2)}$	(3, 5)	-	-	99.994	-	0.006
$^{48}\text{Cr}^{(0)}$	(4, 4)	99.83534	-	0.16465	-	$10^{-5}$
$^{48}\text{Cr}^{(2)}$	(4, 4)	0.143	-	99.849	-	0.008
$^{48}\text{Mn}^{(2)}$	(5, 3)	-	-	99.994	-	0.006
$^{48}\text{Fe}^{(2)}$	(6, 2)	-	-	99.997	-	0.003

Процентът на припокриване в Таблица 13.3 и Фигура 13.2 потвърждава, че най-ниските ядрени изобарно аналогови  $0^+$  състояния имат преобладаващо изоспин  $T = |T_0|$  за четно-четните, и  $T = |T_0| + 1$  за нечетно - нечетните ядра, с много малки примеси от възможни по-високи стойности на изоспина. Както може да се очаква изоспиновото смесване  $\delta_{\tilde{T},T}$  нараства, когато  $Z$  и  $N$  се приближават едно към друго в средата на слой. За ядрата запълващи слой от едно  $j$  ниво, смесването на изоспиновите състояния е по-малко от 0.17%. Въпреки, че изоспиновото смесване е пренебрежимо в леките ядра от  $j = 3/2$  орбитата, то е явно по-голямо за  $j = 7/2$  нивото. Смесването се очаква да е даже по-голямо за конфигурациите от няколко  $j$ -орбитали.



Фигура 13.2:  $Sp(4)$  моделни оценки за смесващото припокриване [%] на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния с почти добър изоспин  $\tilde{T}$  и състоянията с определен изоспин за ядрата от  $1f_{7/2}$  нивото ( $F/\Omega = 0.072$ ).

### 13.2.2 Неаналогови преходи на $\beta$ -разпад

За супер-разрешените Fermi преходи на  $\beta$ -разпад ( $0^+ \rightarrow 0^+$ ) сравнителното  $ft$  време на живот е независимо от ядрото съгласно хипотезата за запазване на векторния поток (conserved-vector-current –(CVC)) и се дава от

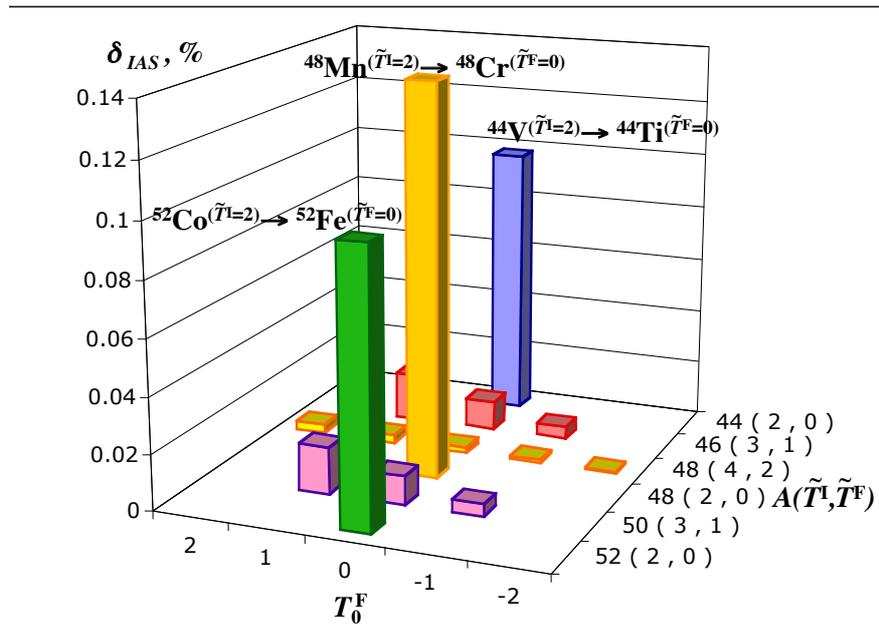
$$ft = \frac{K}{G_V^2 |M_F|^2}, \quad K = 2\pi^3 \hbar \ln 2 \frac{(\hbar c)^6}{(m_e c^2)^5}, \quad (13.7)$$

където  $K/(\hbar c)^6 = 8.120270(12) \times 10^{-7} \text{ GeV}^{-4} \text{ s}$  ( $m_e$  е масата на електрона) и  $G_V$  е константата на векторното куплиране за ядрения  $\beta$  разпад (виж например [171, 234]).  $M_F$  е Fermi матричният елемент  $\langle F | \sqrt{2\Omega} T_{\pm} | I \rangle$  между крайното (final–(F)) състояние с проекция на изоспина  $T_0^F$  и началното (initial–(I)) състояние с  $T_0^I$  в разпад предизвикан от повишаващия (за  $\beta^-$  разпада) и понижаващия ( $\beta^+$ ) изоспина оператор на прехода  $\sqrt{2\Omega} T_{\pm}$ , който в рамките на нашия модел се дава като

$$|M_F|^2 = 2\Omega \left| \langle F; n(\tilde{T}) T_0 \pm 1 | T_{\pm} | I; n(\tilde{T}) T_0 \rangle \right|^2. \quad (13.8)$$

където  $|n(\tilde{T}) T_0\rangle$  са собствените вектори на пълния хамилтониан (13.4) с почти добро квантово число на изоспина  $\tilde{T}$ . Обикновено нечистотата в изоспина причине-

<sup>3</sup> множителя  $2\Omega$  се появява поради нормализацията на базисните оператори приета в алгебричния  $sp(4)$  модел.



Фигура 13.3:  $Sp(4)$  моделни оценки за  $\delta_{IAS}$  корекции на изоспиново смесване [%] (13.9) към матричните елементи на преход между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния с почти добър изоспин  $\tilde{T}$  при Fermi  $\beta$ -разпад за ядрата от  $1f_{7/2}$  нивото ( $F/\Omega = 0.072$ ).

на от незапазващите изоспина сили в ядрата се оценява като корекция към Fermi матричния елемент  $|M_F|^2$  на супер-разрешените  $\tilde{T}$  аналогови  $0^+ \rightarrow 0^+$  преходи,  $\delta_C = 1 - |M_F|^2 / \left\{ \tilde{T}(\tilde{T} + 1) - T_0^F T_0^I \right\}$ . При смесване на повече от две състояния, степента на изоспиновите примеси между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния може да се оцени като се използва нормализирания матричен елемент на прехода между неаналоговите (non-analog-(NA)) състояния (виж например [259]),

$$\delta_{IAS} = \frac{|M_F^{NA}|^2}{\left\{ \tilde{T}(\tilde{T} + 1) - T_0^F T_0^I \right\}}, \quad (13.9)$$

където  $\tilde{T}$  е почти добрия изоспин на пораждащото ядро (виж Таблица 13.4 и Фигура 13.3 за  $1f_{7/2}$  нивото). Малкото смесване на  $0^+$  собствените състояния на изоспина от различни изоспинови мултиплети отразява много малките, но ненулеви стойности на матричните елементи  $|M_F^{NA}|^2$  за неаналоговите преходи на  $\beta^\pm$  разпади (Фигура 13.3 и първата колона на Таблица 13.4). На кратко теоретичния  $Sp(4)$  модел предполага възможното съществуване, макар и на силно подтиснати  $\Delta T = 2$  неаналогови преходи на  $\beta$ -разпад. Изобщо,  $\delta_{IAS}$  поправката може да е много различна от порядъка на величината на припокриване  $\delta_{\tilde{T}, T}$  (13.6) представена в Таблица 13.4,

Таблица 13.4: Неаналогови преходи на  $\beta$ -разпад към енергетично достъпните  $0^+$  състояния и съответните оценки на изоспиново смесване  $\delta_{IAS}$  (13.9), в %, заедно с независещите от параметрите отношения на изоспиновото смесване от първи порядък съгласно  $\delta_{IAS}^{(1)}$  спрямо  $\delta_{IAS}^{(1)}$  на  ${}^{44}_{23}\text{V}^{(2)} \rightarrow {}^{44}_{22}\text{Ti}^{(0)}$  разпада (означен като  $\delta_{IAS}^{(1)*}$ ) в рамките на  $Sp(4)$  модела за ядра от  $1f_{7/2}$  нивото. (Няма налични експериментални данни за сравнение.)

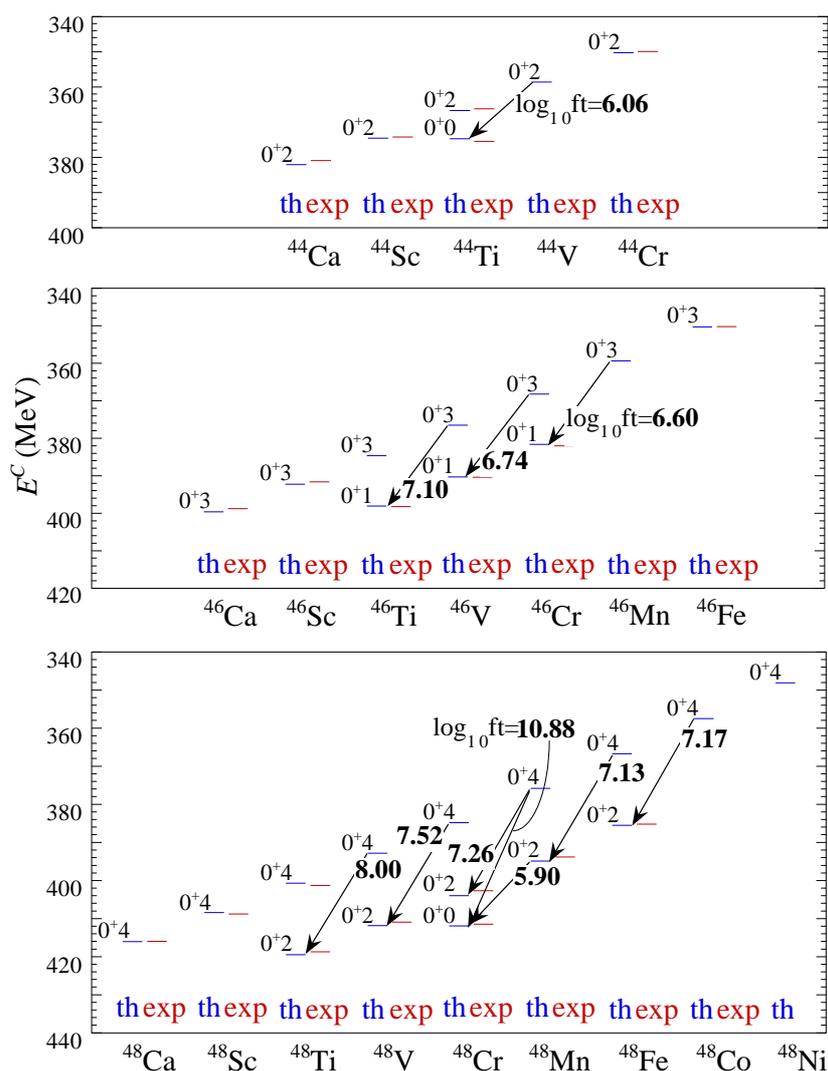
${}^A_Z X^{(\tilde{T}_X)}$	$\beta$ -decay	${}^A_{Z-1} Y^{(\tilde{T}_Y)}$	$\delta_{IAS}$ , %	$\frac{\delta_{IAS}^{(1)}}{\delta_{IAS}^{(1)*}}$
${}^{44}_{23}\text{V}^{(2)}$	$\rightarrow$	${}^{44}_{22}\text{Ti}^{(0)}$	0.098	1.000
${}^{46}_{25}\text{Mn}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{46}_{24}\text{Cr}^{(1)}$	0.0169	0.173
${}^{46}_{24}\text{Cr}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{46}_{23}\text{V}^{(1)}$	0.0104	0.115
${}^{46}_{23}\text{V}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{46}_{22}\text{Ti}^{(1)}$	0.00447	0.043
${}^{48}_{27}\text{Co}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{26}\text{Fe}^{(2)}$	0.00327	0.034
${}^{48}_{26}\text{Fe}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{25}\text{Mn}^{(2)}$	0.00280	0.030
${}^{48}_{25}\text{Mn}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{24}\text{Cr}^{(2)}$	0.00189	0.020
${}^{48}_{24}\text{Cr}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{23}\text{V}^{(2)}$	0.00103	0.011
${}^{48}_{23}\text{V}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{22}\text{Ti}^{(2)}$	0.00038	0.004
${}^{48}_{25}\text{Mn}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{24}\text{Cr}^{(0)}$	$4.5 \times 10^{-7}$	
${}^{48}_{25}\text{Mn}^{(2)}$	$\rightarrow$	${}^{48}_{24}\text{Cr}^{(0)}$	0.14328	1.452
${}^{50}_{27}\text{Co}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{50}_{26}\text{Fe}^{(1)}$	0.0169	0.173
${}^{50}_{26}\text{Fe}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{50}_{25}\text{Mn}^{(1)}$	0.0104	0.115
${}^{50}_{25}\text{Mn}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}^{50}_{24}\text{Cr}^{(1)}$	0.00447	0.043
${}^{52}_{27}\text{Co}^{(2)}$	$\rightarrow$	${}^{52}_{26}\text{Fe}^{(0)}$	0.098	1.000

защото при разпадите степените на изоспиново смесване между неаналоговите състояния в пораждащото и дъщерното ядро са значителни.

Анализът на резултатите показва, че смесването между изобарно аналоговите  $0^+$  състояния (което е поне  $\Delta T = 2$  смесване) е средно 0.006%, изключвайки четно-четните ядра с  $N = Z$ . Това е на порядък по-малко от смесването на първите възбудени неаналогови  $0^+$  състояния дължащо се на незапазващото изоспина взаимодействие, което обикновено е около 0.04% за  $1f_{7/2}$  нивото [170, 259]. Освен това, то води до неаналогови  $\beta$  преходи, по-слаби от възможните Gamow-Teller преходи, силата

на последните е измерена като по-малка от 0.02% от общата сила на  $\beta$  преходите за ядрата от  $1f_{7/2}$  слоя [170], и нараства съществено с увеличаването на масовото число  $A$  [237, 246, 266]. Това прави много трудно отчитането на  $\delta_{IAS}$  смесването, особено когато корекцията за смесването ( $\delta_C$ ) от нарушаването на изоспиновата симетрия на аналоговите Fermi матрични елементи в това ниво е от порядъка на процент [233, 237].

Въпреки недостига на експериментални данни, груба оценка на порядъка на  $\delta_{IAS}$



Фигура 13.4: Неаналогов преход  $0^+ \rightarrow 0^+$  на  $\beta^+$ -разпад към разглежданите енергетично достъпни  $J^\pi T$  състояния означени със стрелки и чрез съответните теоретично пресметнати  $\log_{10} ft$  стойности (няма налични експериментални данни за стойностите на  $ft$  за сравнение). Теоретичните (сини, “th”) и експерименталните [181, 182] (червени, “exp”) енергии на свързване  $E^C$  в MeV (включително кулоновата потенциална енергия) са дадени за изобарната последователност с  $A = 44$  до  $A = 48$  в  $1f_{7/2}$  слоя.

смесването предизвикано от  $H_{IM}$  (13.3) в  $Sp(4)$  модела може да бъде получено в сравнение с други типове корекции от смесване, които понастоящем се измерват или пресмятат теоретично. На пример, преходите на  $\beta$ -разпад от основното състояние на  $^{46}\text{V}$  към първото възбудено  $0^+$  неаналогово състояние на  $^{46}\text{Ti}$  при  $E_{0_1^+} = 2.61$  MeV дава експериментална поправка от 0.053% [170], която се възпроизвежда също от теоретични пресмятания [259]. Първото възбудено  $0^+$   $\tilde{T} = 2$  състояние в  $^{46}\text{Ti}$ , което е изобарен аналог на основното състояние на  $^{46}\text{Ca}$  лежи на  $E_{\tilde{T}=2} = 13.36$  MeV (както се предсказва и от  $Sp(4)$  модела [A14]) и неговото смесване с  $\tilde{T} = 0$  основното състояние, трябва да дава корекция от нарушаването на изоспиновата симетрия от порядъка на:

$$\delta_{IAS} \sim \left( \frac{E_{0_1^+}}{E_{\tilde{T}=2}} \right)^2 0.053\% \sim 0.0020\%, \quad (13.10)$$

която е около стойностите, които  $Sp(4)$  модела дава за  $\Delta T = 2$  не аналоговите преходи между  $^{46}\text{V}$  и  $^{46}\text{Ti}$  (Фигура 13.4). Ясно е, че такова сравнение е приблизително в сравнение с високата точност на ефектите на изоспиново смесване. Все пак резултатите показват съвместимост с другите теоретични пресмятания и се оказва, че не противоречат на разумните граници, които се определят от експерименталните стойности.

Не е изненадващо, че най-голямите стойности за  $\delta_{IAS}$  поправката са наблюдавани за  $\Delta T = 2$   $\beta^\pm$ -разпади към енергетично достъпни  $0^+$  основни състояния в четно-четните ядра с  $N = Z$  (Таблица 13.4 и Фигура 13.4). Въпреки че, за за тези разпади  $\delta_{IAS}$  е изключително малко ( $< 0.14\%$ ), както се очаква от приносите от по-високо лежащите  $0^+$  състояния [259], то е сравнимо с порядъка на поправките от нарушаването на изоспиновата симетрия за  $1f_{7/2}$  орбитата, които обикновено се отчитат [259]. Причината за това е може би, че за четно-четните ядра с  $N = Z$  лежащите на второ място изобарно аналогови  $0^+$  състояния са разположени относително ниско, поради значителните  $pn$  взаимодействия (Фигура 13.4).

Преди всичко,  $\delta_{IAS}$  резултатите дадени в Таблица 13.3 ясно показват осредненото поведение и порядъка на значимост на разглежданото изоспиново смесване. Това е очевидно и при приближението от първи порядък в термини на параметъра  $F$  ( $F \ll 1$ ) от  $\delta_{IAS}$ , който за  $1f_{7/2}$  се отклонява средно с 2% от точното му пресмятане в Таблица 13.3. Корекцията на изоспиновото смесване  $\delta_{IAS}$  тогава е пропорционална на  $F^2$  и се получава, че порядъка на стойността му остава същия при вариации на параметъра  $F$  по-големи от 60%. Допълнително, по-големи стойности на  $F$  не са много вероятни, защото оценките на  $\delta_{IAS}$  (Таблица 13.3) попадат близо до горната граница, което не противоречи на експерименталните и теоретични резултати за другите видове изоспиново смесване.

Ограниченото смесване на  $0^+$  собствените стойности на изоспина от различни

изоспинови мултиплетни дава много малки, но ненулеви матрични елементи  $|M_F^{NA}|^2$  за неаналоговите преходи на  $\beta^\pm$  разпада, както се вижда от  $\delta_{IAS}$  от Таблица 13.3. За ядрата от  $1f_{7/2}$  слоя, такива неаналогови преходи към енергетично достъпни състояния са показани на Фигура 13.2 заедно с  $ft$  стойностите (като сме използвали  $K/G_V^2 = 6200s$  [267]). В рамките на  $Sp(4)$  модела, тези стойности са симетрични по отношение на знака на  $T_0$  (възможните  $\beta^-$  разпади не са показани на Фигура 13.2) и по отношение на  $n - 2\Omega$  ( $A = 50$  и  $A = 52$  мултиплетите са аналогични на тези с  $A = 46$  и  $A = 44$ , съответно). Резултатите дават че, десет от преходите се класифицират като забранени ( $\log_{10} ft \geq 7$ ), други четири са подтиснати ( $\log_{10} ft \approx 7$ ) и четирите разпада към основното състояние на четно-четно ядро с  $N = Z$  изглежда, че имат сравнително по-интензивни разпади ( $\log_{10} ft \approx 6$ ). На Фигура 13.2 теоретично пресметнатите енергии на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния са показани заедно с наличните експериментални данни за тях. Струва си да се спомене, че докато енергиите на най-ниските изобарно аналогови  $0^+$  състояния определят пряко параметрите на моделното взаимодействие, експериментално намерените по-високо лежащи енергии на изобарно аналоговите  $0^+$  състояния се получават без допълнително подгонване на параметри [A14]. Този резултат е важен, защото енергетичната разлика между две изобарно аналогови  $0^+$  състояния в дадено ядро пряко влияе на степента на тяхното смесване. В резултат, теоретичния  $Sp(4)$  модел подсказва възможност за съществуване на макар и силно подтиснати  $\Delta T = 2$  неаналогови преходи на  $\beta$  разпад.

Нещо повече, при това приближение от първи порядък, отношението на всеки две изоспинови поправки вътре в слоя, където силите на ефективното взаимодействие са фиксирани, е независимо от параметрите на моделното взаимодействие. Това означава, че такова отношение изобщо не отразява неопределеностите в параметрите на силите на взаимодействието, а по скоро то е характеристика на относителната сила на двата разпада. Ние избираме да сравняваме  $\delta_{IAS}^{(1)}$  за различни  $\Delta T = 2$   $\beta$ -разпади с корекциите за изоспиново смесване, означени с  $\delta_{IAS}^{(1)*}$ , на разпада между ядрените изобари с  $n = 4$  валентни частици [такива като  ${}^{44}_{23}\text{V}^{(2)} \rightarrow {}^{44}_{22}\text{Ti}^{(0)}$  разпада за  $1f_{7/2}$  орбитата (Table 13.3)] поради относителната простота на тези ядрени системи. Отношението  $\delta_{IAS}^{(1)}/\delta_{IAS}^{(1)*}$  тогава определя разпада, за който се очаква поправката за изоспиново смесване да е максимална за  $1f_{7/2}$  нивото, а именно  ${}^{48}_{25}\text{Mn}^{(2)} \rightarrow {}^{48}_{24}\text{Cr}^{(0)}$ , а също така и относителната стойност, с която  $\delta_{IAS}$  на другите възможни неаналогови разпади е подтисната. На пример, поправката  $\delta_{IAS}$  за разпада  ${}^{44}_{23}\text{V}^{(2)} \rightarrow {}^{44}_{22}\text{Ti}^{(0)}$  е около  $2/3$  от максималната и е около  $1/8$  от  ${}^{46}_{25}\text{Mn}^{(3)} \rightarrow {}^{46}_{24}\text{Cr}^{(1)}$  разпада (Таблица 13.3). Такива отношения показват обща тенденция за нарастване с  $Z$  на  $\delta_{IAS}$  изоспиновото смесване в един и същ изоспинов мултиплет и също така демонстрират усилване на  $\Delta T = 2$  разпадите към основното състояние на четно-четните ядра с  $N = Z$  при

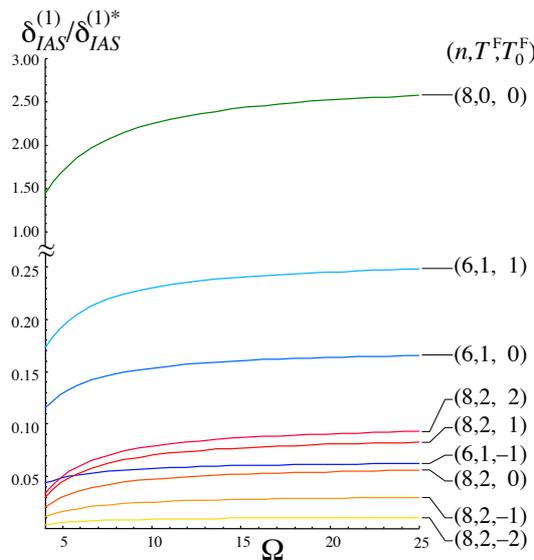
Таблица 13.5: Неаналогови преходи на  $\beta$ -разпад към изследваните, енергетично достъпни  $0^+$  състояния за ядрата с  $A = 60 - 64$  в горния  $fp$  слой заедно с независещото от параметри отношение на изоспиново смесване от първи порядък  $\delta_{IAS}^{(1)}$  спрямо  $\delta_{IAS}^{(1)}$  на  ${}_{31}^{60}\text{Ga}^{(2)} \rightarrow {}_{30}^{60}\text{Zn}^{(0)}$  разпада (означен като  $\delta_{IAS}^{(1*)}$ ) в рамките на  $Sp(4)$  модела. (Няма налични експериментални данни за сравнение.)

$\beta$ -decay		$\frac{\delta_{IAS}}{\delta_{IAS}^{(1)}}$	
${}_Z^AX^{(\tilde{T}_X)}$	$\rightarrow$	${}_{Z-1}^AY^{(\tilde{T}_Y)}$	
${}_{31}^{60}\text{Ga}^{(2)}$	$\rightarrow$	${}_{30}^{60}\text{Zn}^{(0)}$	1.000
${}_{33}^{62}\text{As}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}_{32}^{62}\text{Ge}^{(1)}$	0.233
${}_{32}^{62}\text{Ge}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}_{31}^{62}\text{Ga}^{(1)}$	0.156
${}_{31}^{62}\text{Ga}^{(3)}$	$\rightarrow$	${}_{30}^{62}\text{Zn}^{(1)}$	0.058
${}_{35}^{64}\text{Br}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}_{34}^{64}\text{Se}^{(2)}$	0.081
${}_{34}^{64}\text{Se}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}_{33}^{64}\text{As}^{(2)}$	0.072
${}_{33}^{64}\text{As}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}_{32}^{64}\text{Ge}^{(2)}$	0.049
${}_{32}^{64}\text{Ge}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}_{31}^{64}\text{Ga}^{(2)}$	0.026
${}_{31}^{64}\text{Ga}^{(4)}$	$\rightarrow$	${}_{30}^{64}\text{Zn}^{(2)}$	0.009
${}_{33}^{64}\text{As}^{(2)}$	$\rightarrow$	${}_{32}^{64}\text{Ge}^{(0)}$	2.301
		$\vdots$	

нарастването на  $\delta_{IAS}$  към средата на слоя.

Понататък, това поведение продължава за неаналоговите  $\beta$  разпади между ядрата с брой на валентните протони и неутрони еднакъв на тези от Таблица 13.3, но запълващи главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$ . Следователно, измежду неаналоговите  $\beta$  разпади между изобарите с  $A = 60 - 64$  и с валентни протони и неутрони в  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоя  $\delta_{IAS}$  изоспиновото смесване за разпада  ${}_{33}^{64}\text{As}^{(2)} \rightarrow {}_{32}^{64}\text{Ge}^{(0)}$  се очаква да е най-голямо, като посоката на нарастване е към средата на слоя. Докато, гореспоменатите разпади проявяват два пъти по силно изоспиново смесване от това при  ${}_{31}^{60}\text{Ga}^{(2)} \rightarrow {}_{30}^{60}\text{Zn}^{(0)}$  разпада, другите  $\beta$ -разпади в  $A = 60 - 64$  са до 110 пъти по-бавни (Таблица 13.5). В допълнение, е необходимо само да се пресметне изоспиновото смесване за най-простия случай на четири валентни нуклона, и тогава порядъка стойността на  $\delta_{IAS}$  за другите  $A = 62 - 64$  разпади следва пряко от оценките дадени в Таблица 13.5.

Въпреки че, силата на смесващото изоспина взаимодействие може да се разли-



Фигура 13.5:  $Sp(4)$  моделна оценка за корекциите на смесване от първи порядък за  $\Delta T = 2$  неаналоговите  $\beta$ -разпади между разглежданите  $0^+$  състояния за  $n$  валентни нуклони заемащи моделно пространство с размер  $\Omega$  (например,  $\Omega = 4$  за  $1f_{7/2}$  и  $\Omega = 11$  за  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$ ) спрямо най-простия  $n = 4$   $\Delta T = 2$  разпад към основните състояния на  $N = Z$  ядрото.

чава в различните моделни пространства големината на отношението се оказва от един и същи порядък и за  $1f_{7/2}$  нивото (Таблица 13.4) и горния  $fp$  слой (Таблица 13.5). Освен това, отношенията са силно свързани и в двата слоя, запазвайки еднакво поведение, при преминаването от едно моделно пространство към друго (Таблица 13.5).

Наистина, относителната сила на корекциите на смесване от първи порядък за разглежданите неаналогови Fermi  $\beta$ -разпади се мени плавно с размера на моделното пространство (Фигура 13.4). За всичките  $\Delta T = 2$  разпади по отношение на този с четири валентни нуклона е нужна корекция на изоспиновото смесване към матричните елементи на прехода, която се увеличава с нарастването на заеманото пространство. Такова нарастване обаче запазва всички разглеждани преходи подтиснати спрямо  $n = 4$  прехода (с най-голям  $\delta_{IAS}^{(1)}$  но все пак около четири пъти по малък от  $\delta_{IAS}^{(1)*}$ ). Изключение прави  $\Delta T = 2$  разпада към основното състояние на на  $N = Z$   $n = 8$  ядрото, който е значително по-бърз за всяко пространство с размер  $\Omega$ . Този разпад става 2.5 пъти по-бързо в границата двойка-бозон при много големи  $\Omega$ , което дава едно нарастване от 77.6% в сравнение с  $\Omega = 4$ . Докато ядрената система с  $n = 6$  показва нарастване от само 43.8%, корекцията на изоспиново смесване нараства 1.8 пъти за всички  $n = 8$  разпади към дъщерното ядро с почти добър изоспин  $\tilde{T} = 2$ , което е отново на порядък по-малко от  $\delta_{IAS}^{(1)*}$ .

На кратко,  $Sp(4)$  моделът позволява да се оцени лесно относителната сила на различните разпади в даден слой и следователно да се идентифицират най-бързите разпади както и тези които могат лесно да се пренебрегнат при прецизните пресмятания на изоспиновото смесване.

В резултат, отчитането на зависимостта на ядрените сили от товара, макар и много сложен проблем, води до резултати, основаващи се на прост групово теоретичен подход, които са в качествено съгласие с експерименталните наблюдения.

## 14. Физически смисъл на $q$ -деформацията и многочастични взаимодействия в ядрото

Най-ранните приложения на квантовите алгебри в ядрената структура са свързани с  $SU_q(2)$  описание на ротационни ивици в аксиално деформирани ядра [33] и на сдвояването на еднакви частици [67, 163]. Въпреки че, с оптималните стойности на  $q$ -параметъра се постига подобро описание на експерименталните енергии, въпросът за физическата същност на  $q$ -деформацията, когато се прилага към многочастичния проблем в ядрото, остава все още отворен.

Добре известно е, че в ефективните двучастични взаимодействия в ядрата преобладават сдвояващите и квадруполните сили. Първите отчитат образуването на двойки от частици и пораждаат сдвояващия процес в ядрените спектри, а вторите са причината за усилените електрични квадруполни преходи в колективните ротационни ивици. Наистина в рамките на слоестия модел на хармоничния осцилатор, двата гранични случая имат ясна алгебрична структура, в смисъл че спектрите показват наличието на динамична симетрия. В границата на сдвояването “квазиспиновата” симплектична  $Sp(4)$  ( $\sim SO(5)$ ) група [48, 57–59, 62, 140] заедно с нейната дуална  $Sp(2\Omega)$ , за  $2\Omega$  изражадне на слоя, използват квантовото число на старшинството (seniority) [51, 131] за класификация на спектрите. От друга страна, в квадруполната граница симплектичната  $Sp(6, R)$  [4, 26] дава динамиката на ядрената форма.

Сдвояването въведено във физиката за да се опише свръхпроводимостта е основно за явленията в кондензираната материя, ядрото и астрофизиката, които са обект на съвременен интерес. В ядрената физика, микроскопичния двучастичен модел с  $Sp(4)$  динамична симетрия дава възможност да се опишат както сдвояващите корелации на еднакви частици ( $pp$  и  $nn$ ) така и протон-неутронните  $pn$  изовекторни (с изоспин  $T = 1$ ) такива, и допълнително да се включи  $pn$  изоскаларно ( $T = 0$ ) взаимодействие. Изобщо казано ядрените характеристики се описват добре в рамките на този подход [A12, A13], с означения от  $Sp(4)$  схемата, даващи по същество смисъл на общата систематика.

Новият аспект, който представяме сега е едно разширение на теорията, което включва локални нелинейни отклонения от сдвояващите решения, които се осъществяват чрез  $q$ -деформация на  $sp(4)$  алгебрата<sup>1</sup>. Важно свойство на  $q$ -деформирания

---

<sup>1</sup> използвани са малки (главни) букви при означаването на алгебри (групи).

модел е, че той не нарушава физически закони, фундаментални за квантово механичните ядрени системи и запазва ъгловия момент, общия брой на частиците и проекцията на изоспина.

Квантовото разширение на  $sp(4)$  прави възможно аналитичното моделиране на набор от многочастични взаимодействия. В общия случай, е много сложно да се работи с последните, но въпреки това тяхното въвеждане води осреднено до подобрене на теорията [268]. Ние целим да покажем, че резултатите при  $q \neq 1$  във всички случаи превъзхождат тези от недеформираната граница и че  $q$ -параметъра се мени гладко с ядрените характеристики. Резултатите от това изследване подсказват, че  $q$ -деформацията има физически смисъл надхвърлящ простото описание на сдвояващия процеп и засягащ самата същност на ядреното взаимодействие. Ролята на  $q$ -деформацията не е моделно ограничена, тя може да се обобщи при разглеждането на различни многочастични ефекти.

### 14.1 Нови свойства произхождащи от $q$ -деформацията

В изследването на  $q$ -деформираната версия на модела направено в Глава 11, параметъра на деформация беше разгледан като глобален, независещ от конкретното ядро, със стойност непревишаваща 1.240. Тази стойност се очаква да е по-голяма, ако влиянието на  $q$  не се осреднява върху всички ядра в разглежданите главни слоеве. Изследването на локалните свойства на  $q$ -деформацията, свързани със всяко конкретно ядро е свързано с интерпретацията на нейната значимост при описанието на ядрената структура [B19, B20, B21, B22].

От гледна точка на недеформираната граница, деформацията въвежда многочастични членове от по-висок порядък във оригиналната теория, която включва само едно- и двучастични взаимодействия. Начинът по който тези ефекти от по-висок порядък се въвеждат в теорията се диктува от формата на  $[X]$ . В термини на  $\varkappa$ , всичко се свързва с деформацията чрез дефиницията

$$[X] = \frac{\sinh(\varkappa X)}{\sinh(\varkappa)} = X \left( 1 + \varkappa^2 \frac{X^2 - 1}{6} + \varkappa^4 \frac{3X^4 - 10X^2 + 7}{360} + \dots \right) \xrightarrow{\varkappa \rightarrow 0} X.$$

Илюстративен пример за това представлява развитието по  $\varkappa$  на предпоследния член с коефициент  $C_q$  от  $H_q$  (11.10),

$$\begin{aligned} & - C_q 2\Omega \left[ \frac{1}{\Omega} \right] \left[ \frac{N}{2} \right]_{\frac{1}{2\Omega}} \left[ \frac{N}{2} - 2\Omega \right]_{\frac{1}{2\Omega}} = -2C_q \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} - 2\Omega \right) \\ & - \frac{C_q \varkappa^2 \{ (16\Omega^2 - 24\Omega + 5)(V^{(1)} + V^{(2)}) + 6V^{(2)} + (6 - 8\Omega)V^{(3)} + V^{(4)} \}}{96\Omega^2} - \dots, \end{aligned}$$

където сме означили с

$$V^{(1)} = \sum_{\nu_1} c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_1},$$

$$V^{(2)} = \sum_{\nu_1 \nu_2} c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_2} c_{\nu_1},$$

$$V^{(3)} = \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3}^\dagger c_{\nu_3} c_{\nu_2} c_{\nu_1}$$

и

$$V^{(4)} = \sum_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} c_{\nu_1}^\dagger c_{\nu_2}^\dagger c_{\nu_3}^\dagger c_{\nu_4}^\dagger c_{\nu_4} c_{\nu_3} c_{\nu_2} c_{\nu_1}.$$

Очевидно приближението от нулев порядък отговаря на недеформираната двучастична сила и съвпада с нея при равенство на параметъра  $C_q$  с  $C$ , а членовете от по-висок порядък въвеждат многочастични взаимодействия. Последните може да не са пренебрежими, например, нашите резултати показват, че приносът към енергията от четиричастичното взаимодействие в горното развитие, може да достигне големина от няколко MeV за ядрата от  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоя.

Аналогично, членът от нулев порядък на  $H_q$  (11.10) съвпада с недеформираното  $H$  взаимодействие само ако параметрите на силите в двата хамилтониана съвпадат  $\gamma_q \equiv \{\epsilon^q, G_q, F_q, E_q, C_q, D_q\} = \gamma \equiv \{\epsilon, G, F, E, C, D\}$ . Това условие трябва да остане непроменено, тъй като беше показано, че  $H$  възпроизвежда добре осредненото общо поведение на всички ядра в слоя. По тази причина ние фиксираме стойностите на параметрите  $\gamma_q = \gamma$  и оставяме да се мени само  $q$ . Отделянето на деформацията от параметрите  $\gamma$ , които се използват за да характеризират самото двучастично взаимодействие означава че на последните може да се припишат глобалните стойности получени от най-доброто фитиране за разглежданото моделно пространство, без да се разваля осредненото качество на теорията. Това от своя страна, подчертава факта, че деформацията представлява нещо съществено различно, характеристика, която не може да се подправи, като се оставят силите на недеформираните взаимодействия да погълнат ефекта от нея.

На кратко,  $q$ -деформацията добавя към теорията, която описва твърде добре осредненото ядрено поведение, корекция към средното поле, както и дву- три- и многочастични взаимодействия от локален тип, които могат да са причина за остатъчни едночастични и многочастични ефекти.

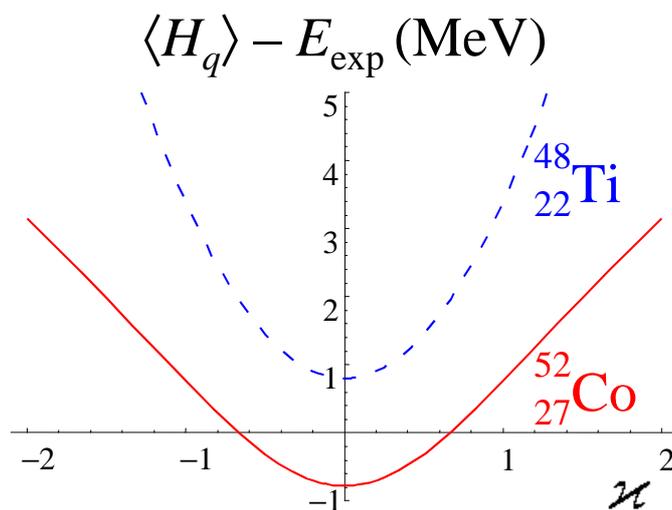
## 14.2 Анализ на ролята на $q$ -деформацията

Тъй като  $q$ -параметъра се асоциира с локални явления, се очаква той да се мени от ядро към ядро.

В настоящото изследване ние се насочваме към две групи ядра, по-конкретно единичния  $1f_{7/2}$   $j$  слой (II) и главния  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слой (III), където беше доказано, че "класическия" модел е в много добро съгласие с експеримента по енергиите на разглежданите  $0^+$  състояния. Ограниченията появяващи се от израждането

в по-широката област (III) изискват анализите на резултатите да се правят съгласувано с тези от слоя (II). Но все пак, ограничения размер на областта (II), която замъглява улавянето на ясно изразени закономерности е преодолян при изследванията в по-голямата област (III), където наблюдаваните ефекти са обикновено напълно изявиени. Тъй като  $q$ -деформирания модел се прилага в същите области от ядра, където "класическия" модел вече е доказал качествата си,  $q$ -деформацията не се използва за поправка на неговите недостатъци, а представлява едно допълнение към недеформираната теория, което може да я подобри.

Възможното съществуване на локални ефекти надградени над глобалните свойства на разглежданите  $0^+$  състояния може да се разпознае при индивидуалните ядра по отклонението на предсказаната недеформирана енергия  $\langle H \rangle$  от експерименталните стойности  $E_{\text{exp}}$ , а именно решението на уравнението  $\langle H_q \rangle = E_{\text{exp}}$  дава груба оценка за  $\varkappa$  (виж Фигура 14.1).



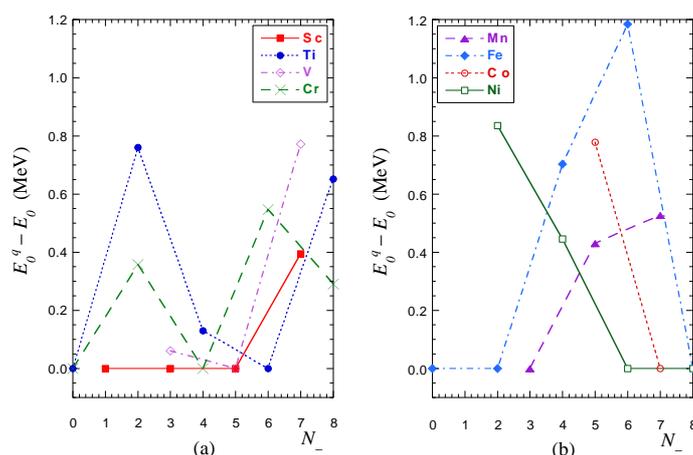
Фигура 14.1: Разлика между теоретичните и експерименталните енергии спрямо параметъра  $\varkappa$  за типично ядро близо до затворения слой (плътна линия) и за ядро от средата на слоя (пунктирна линия).

Тази процедура води до стойности на  $\varkappa$ , които попадат в два различни случая (Figure 14.1).

1. Първия случай, когато  $E_0(= E_0^q|_{\varkappa=0}) < E_{0,\text{exp}}$  води до две симетрични решения за  $\varkappa$ , т.е. до единствено физическо решение  $|\varkappa|$ . те отговарят на корените на уравнението  $E_0^q = E_{0,\text{exp}}$ , което определя условието,  $q$ -деформираните теоретични енергии да възпроизвеждат точно експерименталните енергии при получената стойност на  $|\varkappa|$ . Този случай е типичен за ядрата близо до затворените слоеве.

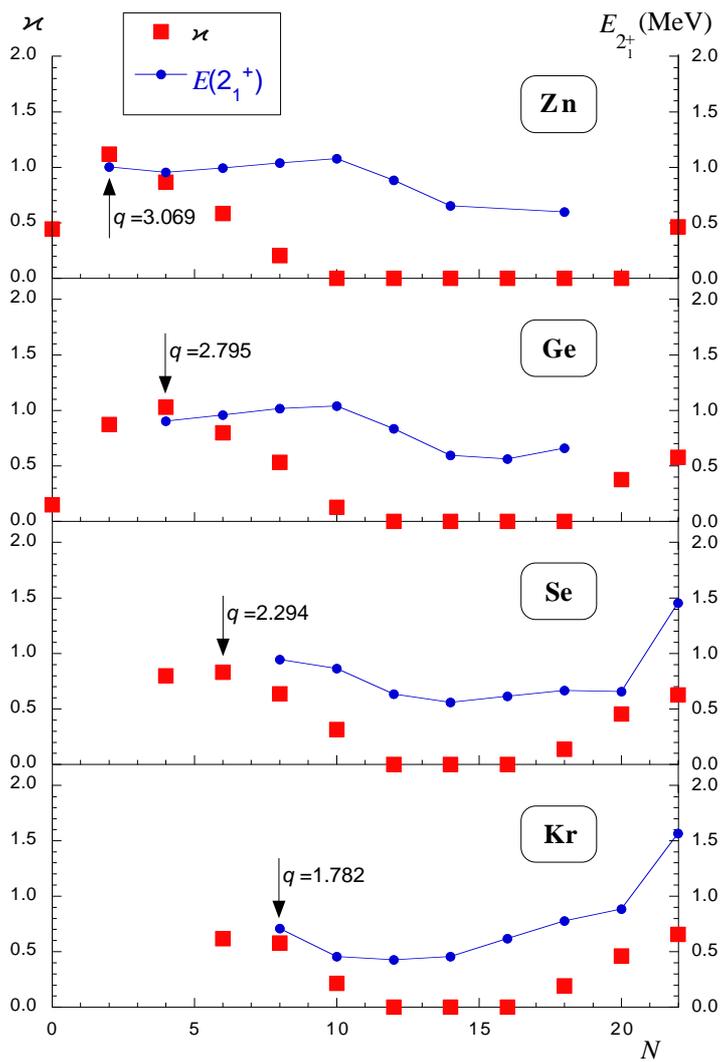
2. Вторият случай на  $E_0 > E_{0,\text{exp}}$  определя стойността на  $\varkappa$  минимума на  $q$ -деформираната енергия  $E_0^q$ . Минимума се получава при “класическата” енергия,  $E_0$ , с  $\varkappa \cong 0$  и неговата разлика от експерименталната ѝ стойност може да се припише на наличието на други типове взаимодействия, които не са явно включени, а са неявно отчетени в модела.

Във физическите приложения към ядрената структура, стойностите на параметъра на деформация  $\varkappa$ , получени в описаната процедура представляват мярка за значимостта на многочастичните взаимодействия от по-висок от втори порядък, в дадено ядро. Приносът на членовете от по висок порядък над двучастичното взаимодействие се определя чрез енергетичната разлика между  $q$ -деформираните и недеформираните собствени стойности на моделните хамилтониани,  $E_0^q - E_0$  (Фигура 14.2). За ядра с ненулева енергетична разлика, деформирания модел с локален  $q$ -параметър подобрява предсказанията на енергиите в сравнение с “класическия” глобален модел и точно възпроизвежда експерименталните им стойности.



Фигура 14.2: Енергетична разлика между  $q$ -деформираните и недеформираните (“класически”) пълни енергии за изотопите от  $1f_{7/2}$  нивото със сърцевина  $^{40}\text{Ca}$ . Глобалните параметри  $\gamma$ , имат стойности дадени в Таблица 11.4, (II).

Оказва се, че решенията за параметъра на деформацията  $|\varkappa|$  лежат на гладка крива, която следва кривата на енергиите на най-ниските възбудени  $2_1^+$  състояния (Фигура 14.3). Този резултат е много важен в два аспекта. Първо гладкото поведение на деформационния параметър по отношение на промяната на броя на протоните и неутроните предполага, че същността на  $q$ -деформацията в ядрените системи лежи дълбоко в основните междунуклонните взаимодействия. Вторият аспект е във връзката с най-ниските  $2_1^+$  състояния. Практически без изключение, първото възбудено състояние в четно-четните ядра е  $2^+$  състояние, което потвърждава предположението, че това състояние е възбудено състояние на конфигурацията на основното състояние (нуклоните заемат същото едночастично  $j$ -състояние като основното,



Фигура 14.3: Параметъра на деформация  $\kappa$  (символ ■) като функция на броя на валентните неутрони ( $N_-$ ) за различни изотопи от главния слой  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  над сърцевината  $^{56}\text{Ni}$ . Плътната линия се определя от енергиите на възбуждане на  $2_1^+$  нивата измерени в MeV. Стрелките показват ядрата с  $N = Z$  със съответната стойност на  $q = e^\kappa$ . Глобалните параметри,  $\gamma$ , имат стойности дадени в Таблица 11.4, (III).

но относителната ориентация на  $j$ -тата на различните нуклони е променена). Най-голям брой възможности за възникване на  $2_1^+$  състояние се появява в средата на слоя, между затворените обвивки, със съответстващ минимум на отделянето на  $0^+$  от  $2^+$  [A8]. Съществуването на голямо смесване от конфигурации около средата на слоя (възможна причина за загубването на повечето от ефектите на подслоевите) има осредняващ ефект, еквивалентен на предположението за деформируема сърцевина, което е изходното положение в колективния модел [269]. Енергиите на  $2_1^+$  са най-голями близо до затварянето на слоевете, където ефектите на сдвояването са

съществени за определянето на носколежащия спектър и намаляват с нарастването на колективността и деформацията на формата. Подобно поведение се наблюдава и при параметъра на  $q$ -деформацията (вж. Фигура 14.3) в смисъл, доминиращите сдвояващи корелации се придружават от непренебрежими многочастични взаимодействия, както е предписано от  $H_q$  (11.10), докато дългодействащата колективност подтиска тяхните осреднени приноси. На кратко, наблюдаваното гладко поведение на параметъра на деформация, въпреки че е само качествен резултат, дава представа за същността на  $q$ -деформацията като показва глака функционална зависимост от моделните квантови числа.

### 14.3 Аналитично моделиране на ядрените многочастични взаимодействия

Анализът на получените стойности за деформационния параметър  $|\varkappa|$  на всяко ядро, показва, че те лежат на гладка крива (вж. Фигура 14.4(a)). Наблюдаваното гладко поведение на  $\varkappa$  разкрива и неговата зависимост от моделните квантови числа. Този резултат изтъква факта, че  $q$ -деформацията, както се предписва от  $sp_q(4)$  модела не е случайна по характер, а по-скоро е фундаментално свързана с ядреното взаимодействие.

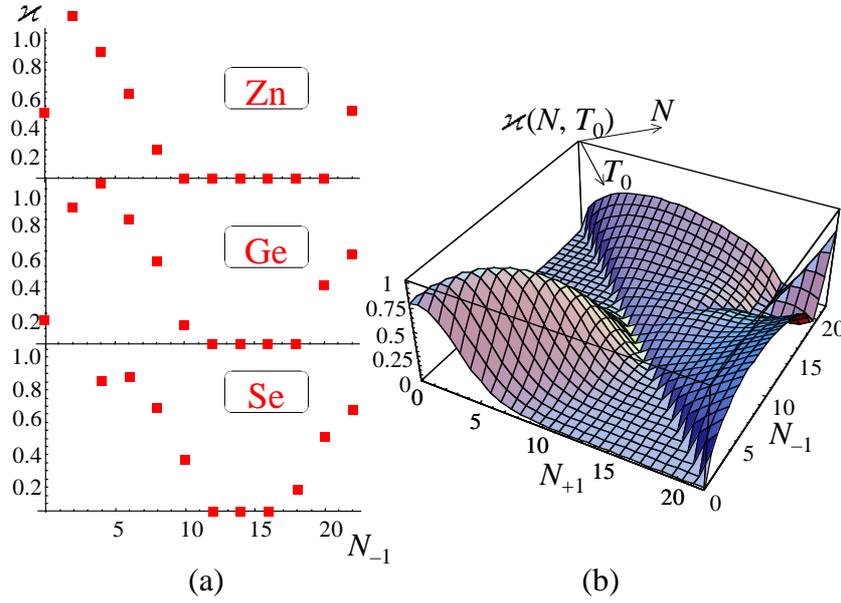
Както се вижда от Фигура 14.3  $q$ -деформацията и следователно развитието на нелинейните ефекти, е свързано по нетривиален начин с лежащата в основата им ядрена структура. Изобщо, многочастичните взаимодействия имат много сложни матрични елементи и аналитичното им моделиране става възможно благодарение на квантовото обобщение на  $sp(4)$ . Това ни позволява, да определим параметризирана функционална зависимост на деформационния параметър от общия брой на частиците  $N$  и от проекцията на изоспина  $T_0$  в яетно-четните ядра,

$$\varkappa(N, T_0) = \xi_1 \left( \frac{N}{2\Omega} - 1 \right) \left( \frac{N}{2\Omega} + \xi_2 - 2\theta(N - 2\Omega) \right) e^{-0.5 \left( \frac{2T_0}{\xi_3} \right)^2} + \xi_4 \theta(N - 2\Omega) |T_0| \sqrt{\frac{N}{2\Omega} - 1},$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad (14.1)$$

която отразява сложното развитие на нелинейните ефекти, наблюдавано на Фигура 14.4(a). Като следваща стъпка, ние използваме деформационната функция (14.1) за да фитираме минималните собствени стойности на  $H_q$  (11.10) към съответните експериментални енергии на четно-четните ядра от слоевете  $1f_{7/2}$  и  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$ . Правейки това, ние минимизираме всяка ренормализация на параметъра на  $q$ -деформация, дължаща се на възможни влияния на други локални ефекти, които не се отчитат от модела. Във фитиращата процедура се менят само четирите параметъра  $(\xi_{1,2,3,4})$  на  $\varkappa(N, T_0)$  от уравнение (14.1). Определени статистически, те

дават оценка за осредненото значение на  $q$ -деформацията вътре в разглеждания слой. Резултатите от случая  $q \neq 1$  са всичките по-добри от тези в недеформирана-



Фигура 14.4: Оценка на параметъра  $\chi$ : (a) за всяко ядро, и (b)  $\chi(N, T_0)$  в  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоя (при глобални параметри:  $\varepsilon = 13.851$ ,  $G/\Omega = 0.296$ ,  $F/\Omega = 0.056$ ,  $E/(2\Omega) = -0.489$ ,  $D = -0.307$ , и  $C = 0.190$  в MeV).

та граница. В  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  слоя на пример,  $q$ -деформирания модел, за който  $SOS_q = 130.21 \text{ MeV}^2$  ( $\chi_q = 1.28 \text{ MeV}$ )<sup>2</sup>, явно подобрява недеформираната теория с  $SOS = 271.63 \text{ MeV}^2$  ( $\chi = 1.79 \text{ MeV}$ ). Оптималните резултати се получават за:

$$\xi_1 = -2.13, \quad \xi_2 = 0.37, \quad \xi_3 = 3.07, \quad \xi_4 = 0.15. \quad (14.2)$$

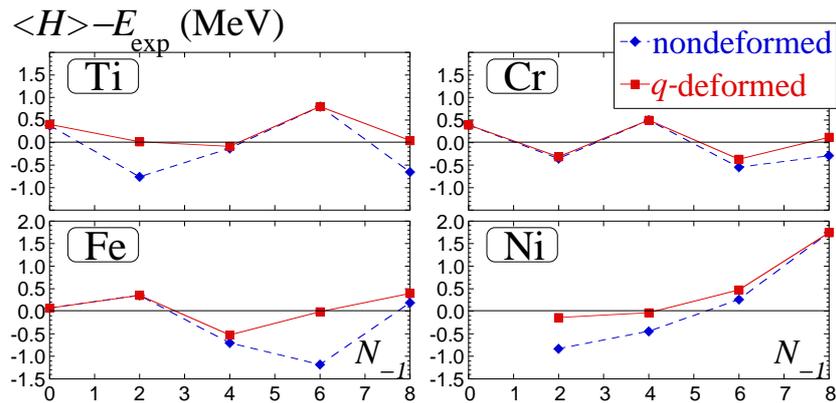
Поведението на  $q$  деформацията (както е предписано от уравнение (14.1)) е съгласувано и в двете области от ядра, които разглеждаме (слоеве  $1f_{7/2}$  и  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$ ), и дава високи стойности над средата на слоя, където нарастването на броя на частиците може да доведе до силни нелинейни ефекти. Като цяло, деформирания модел с локално  $q$  подобрява предсказанията за енергиите в сравнение с недеформирания глобален случай и възпроизвежда по-точно експеримента (виж Фигура 14.5). Една от причините може да е, че  $q$ -деформираните фермиони, за разлика от обикновенните квазичастици, наистина се подчиняват на фундаменталните закони.

Многочастичната природа на взаимодействието е най-важна далече от средата на слоя и за много четно-четни ядра проявява тенденция да да е максимална (със

<sup>2</sup>  $SOS$  е дефинирано като сума от квадратичните разлики на теоретичните и експерименталните енергии, и  $\chi^2$  е осредненото на степен на свобода  $SOS$  в статистиката.

значителни стойности на  $q$ ), когато  $N_{+1} = N_{-1}$  и където се очакват силни сдвояващи корелации (виж Фигура 14.4). Стойности на деформационния параметър  $q \approx 1$  могат да се видят в ядра със само една или две частично/дупчести двойки над затворения слой. За тези ядра броя на частиците е недостатъчен за да се почувства ефекта от членовете от по-висок порядък в деформираното взаимодействие и недеформирания случай дава добро описание.

Около средата на слоя ( $N \approx 2\Omega$ ) деформацията дава малко подобрение на  $\varkappa = 0$  теорията. Това подсказва, че за тези ядра, многочастичните взаимодействия, както се определят от  $\varkappa(N, T_0)$  в уравнение (14.1) са пренебрежими и модела не е достатъчен да опише други типове локални ефекти, които могат да съществуват. Резултатите показват, че  $q$ -параметъра, макар че дава допълнителна степен на свобода за всички ядра, подобрява модела само в областите, където доминират сдвояващите корелации. На кратко, образуването на двойки, предпочита непренебрежими взаимодействия от по-висок порядък между съставките на двойките, които се улавят от  $sp_q(4)$  модела.



Фигура 14.5:  $q$ -деформирани и недеформирани енергии сравнени с експерименталните стойности за четно-четните изотопи от  $1f_{7/2}$  слоя (глобалните параметри:  $\varepsilon = 13.149$ ,  $G/\Omega = 0.453$ ,  $F/\Omega = 0.072$ ,  $E/(2\Omega) = -1.120$ ,  $D = 0.149$ , и  $C = 0.473$  in MeV).

Изследваното тук  $q$ -деформирано нелинейно разширение на  $Sp(4)$  модела, в сравнение с експерименталните данни, показва гладка функционална зависимост на параметъра на деформацията  $q$  от броя на протоните и неутроните. Освен това, резултатите при  $q \neq 1$  са равномерно по-добри от тези в недеформираната граница. Получените резултати предполагат, че деформацията има физически смисъл, свързан със самата природа на ядреното взаимодействие и извън това, което може да се постигне само с натъкмяване на параметрите на двучастичното взаимодействие. Специфичните характеристики на ядрената структура могат да се изследват чрез използването на локално  $q$ , което улавя съществуването и важноста на многочастичните взаи-

модействия, придружаващи доминиращите сдвояващи корелации в ядрата. Това е в допълнение на доброто описание на глобалните свойства на ядрената динамика, получено от недеформираното двучастично взаимодействие. Въпреки че, към физическата значимост на  $q$ -деформацията, тук е подходено в рамките на алгебричния  $Sp(4)$  модел, ясно е, че тя е моделно независима и може да се отнесе към различни многочастични явления. Резултатите, също подсказват необходимостта от допълнителни изследвания за получаването на по-ясно разбиране на  $q$ -деформацията в ядрената физика.

Като обобщение, може да считаме, че понятието за квантова деформация, беше свързано с гладкото поведение на физическите явления в атомните ядра.

## Част IV

# Симплектичното разширение на Модела на взаимодействиящите векторни бозони

Посветена на

ст.н.с. I ст. дфн Петър Райчев и

ст.н.с. II ст. д-р Руси Русев



## 15. Модел на взаимодействиящите векторни бозони за описание на колективните движения в ядрата

Добре известно е, че ядрените колективни движения могат да се опишат качествено с помощта на взаимодействащи бозони [270]. Типичен пример за това е модела на хармоничния квадруполен осцилатор. Неговият хамилтониан е

$$H = \sum_M (-1)^M b_{2M}^\dagger b_{2-M} + V(b_{2M}^\dagger, b_{2M}),$$

където  $b_{2M}^\dagger$  и  $b_{2M}$  са оператори на раждане и унищожение на квадруполни фонони с проекция на ъгловия момент  $M$  и  $V(b_{2M}^\dagger, b_{2M})$  е скаларна функция (обикновено полином), описваща фононното анхармонично взаимодействие.

Аналитичната диагонализация на  $H$  и точното (непертурбативно) решение на уравнението на Schrödinger могат значително да се упростят, в случай че пространството на собствените състояния на системата образува базис на едно унитарно неприводимо представяне (УНП) на някаква група  $G$ , която е група на динамична симетрия в смисъл на Dashen и Gell-Man [271]. Хамилтонианът  $H$  нарушава симетрията  $G$  и я редуцира до симетрията на ротационната група  $O(3)$ , определена от операторите на ъгловия момент. По този начин се сваля израждането на състоянията и се генерира наблюдавания енергетичен спектър.

На тази база са построени доста алгебрични модели описващи колективните свойства на ядрата. На пример, модела на двата векторни бозона [272–274] за описание на колективните свойства на тежките, деформирани четно-четни ядра в рамките на нарушената  $SU(3)$  симетрия. Друг пример е феноменологичния модел на взаимодействиящите бозони (МВБ) [72, 73, 275, 276], който въвежда  $s$  и  $d$  бозони считани за фермионни двойки, куплирани до общ ъглов момент  $L = 0$  и  $L = 2$  съответно; това включва групата  $U(6)$  като група на динамична симетрия на колективните движения в ядрата. Даже преди това беше показано [277], че в рамките на микроскопичното описание на колективните моди, е съвсем естествено да се въведат шест колективни променливи свързани с монополната и квадруполната степени на свобода. Тези променливи генерират некомпактната симплектична група  $Sp(12, R)$ , така че групата  $U(6)$  предложена от А. Arima и F. Iachello [72, 73, 275] и М. Moshinsky [276] се съдържа в  $Sp(12, R)$  като подгрупа.

Моделът, който предлагаме ние е естествено обобщение на  $SU(3)$  модела, развит

от групата на професор Райчев [272–274]. В него се предполага, че ядрената динамика може да се опише чрез два типа векторни квазичастици, които се характеризират също от едно допълнително квантово число наречено “псевдоспин” (по аналогия с  $F$ -спина в МВБ-2, който е свързан с изоспина във валентния слой [41]). Тези векторни бозони образуват “псевдоспинов” дублет и се различават по проекцията на “псевдоспина”  $\alpha = \pm 1/2$ . Въвеждането на допълнителната степен на свобода води до разширение на  $SU(3)$  динамичната симетрия до  $U(6)$ . Не е необходимо да разглеждаме бозоните като фермионни двойки, куплирани до ъглов момент  $L = 1$ , за да оправдаем това предположение; ние предпочитаме да ги третираме като един вид “осцилаторни кварки” или “Elliott-ови кварки”, както в добре известния модел на Elliott [38] (виж също и [278]).

Изобщо вместо да разглеждаме векторните бозони като реални ядрени възбуждания, може да подходим по по-различен начин към проблема. Добре известно е, че само тензорните характеристики на операторите построени от генераторите на някаква група  $G$  и принадлежащи на нейната универсална обвиваща алгебра играят роля при диагонализацията на хамилтониана в базиса на УНП на динамичната група  $G$ , както и при определянето на матричните елементи на операторите на преход. Построяването на представяннията на  $G$  и реализацията на нейните генератори може да се постигне с помощта на бозонните оператори, които в този случай няма да имат определен непосредствено физически смисъл, а само ще играят ролята на формален, помощен математически апарат. От друга страна обаче, идеята, че използваните бозони представляват истински възбуждания е по-привлекателна, и по-тази причина ние ще се придържаме към нея в нашите бъдещи разглеждания.

Както е предложено от V. Bargmann и M. Moshinsky [279], два типа бозони са необходими за описанието на ядрената динамика. В [279] е доказано, че разглеждането само на двучастична система, състояща се от две различни взаимодействащи си частици е достатъчна, за да се получи пълно описание на спектъра на  $N$  тримерни осцилатора с квадрупол-квадруполно взаимодействие.

Една от целите на настоящото изследване е да покажем, че некомпактната симплектична група  $Sp(12, R)$  е групата на динамична симетрия в проблема на два взаимодействащи векторни бозона. В този смисъл модела на двата векторни бозона, представлява едно разширение на  $Sp(6, R)$  модела на G. Rosensteel and D. J. Rowe [4, 26, 280]. Трябва да се отбележи, че  $Sp(6, R)$  моделът беше първоначално предложен от Райчев [281] за описание на деформирани четно-четни ядра и впоследствие беше изследван микроскопически от групата на професор Ю. Ф. Смирнов [282], където е разгледана по-общата групова редукция  $Sp(6A, R) \supset Sp(6, R) \otimes O(A)$  ( $A$  е броя на нуклоните).

### 15.1 Основни конструктивни елементи на модела

Ако  $x(\alpha), y(\alpha)$  и  $z(\alpha)$  са Декартовите координати на квазичастица с проекция на “псевдоспина”  $\alpha = \pm 1/2$ , съответните циклични координати са

$$x_{\pm 1}(\alpha) = \mp (x(\alpha) \pm iy(\alpha)) / \sqrt{2} \quad x_0(\alpha) = z(\alpha) . \quad (15.1)$$

Моментите съответстващи на тези координати са

$$q_m(\alpha) = -i \partial / \partial x^m(\alpha) \quad (15.2)$$

където

$$x^m = \sum_n g^{mn} x_n \quad g^{mn} = g_{mn} = (-1)^n \delta_{m, -n} .$$

Използвайки (15.1) и (15.2) можем да въведем оператори на раждане и унищожение на бозони с ъглов момент  $l = 1$ , проекция  $m$  и проекция на “псевдоспина”  $\alpha$  по следния начин:

$$\begin{aligned} u_m^\dagger(\alpha) &= (x_m(\alpha) - iq_m(\alpha)) / \sqrt{2} \\ u^m(\alpha) &= (x^m(\alpha) + iq^m(\alpha)) / \sqrt{2} . \end{aligned} \quad (15.3)$$

Тези оператори удовлетворяват комутационните съотношения

$$[u^m(\alpha), u_n^\dagger(\beta)] = \delta(\alpha, \beta) \delta_{m, n}$$

и правилата им за ермитово спрягане са

$$[u_m^\dagger(\alpha)]^\dagger = u^m(\alpha) \quad [u^m(\alpha)]^\dagger = u_m^\dagger(\alpha) .$$

Когато е удобно по нататък ще използваме и означенията

$$u_m^\dagger(\alpha = \frac{1}{2}) = p_m^\dagger \quad u_m^\dagger(\alpha = -\frac{1}{2}) = n_m^\dagger . \quad (15.4)$$

Трябва да се отбележи, че по дефиниция операторите  $\mathbf{p}^\dagger$  и  $\mathbf{n}^\dagger$  са тримерни вектори (по отношение на групата  $O(3)$ , даваща ъгловия момент на бозоните  $l = 1$  с проекция  $m = 0, \pm 1$ ), принадлежащи на две независими представяния  $[1, 0, 0]_3 \equiv [1]_3$  на групата  $SU(3)$  (операторите  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{n}$  принадлежат на представянето  $([0, 0, -1]_3 \equiv [1, 1, 0]_3)$ . Представянето  $[1, 0]_2$  на  $U(2)$  дефинира “псевдоспина” на бозоните  $T = \frac{1}{2}$ , чиято проекция се задава от съответното представяне на  $(U(1) \times U(1))$ , т. е.  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ . Прякото произведение на представянията  $[1]_3 \cdot [1]_2$  на  $U(3) \otimes U(2)$ , принадлежи на представянето  $[1, 0, 0, 0, 0, 0]_6 \equiv [1]_6$  на  $U(6)$ , т. е. се преобразува [A18] по фундаменталните  $U(6)$  представяния  $[1]_6$ . Така че, веднага се определят тензорните свойства на основните “строителни блокове” на МВВВ – операторите на раждане и унищожение на векторните бозони (15.4) по отношение на редица от споменатите по-горе групи, която

играе важна роля в понатъшното развитие на модела. Тяхните основни свойства в термини на тензорни оператори се представят по следния начин [A18]:

$$\begin{aligned} \left( u_{[1]_3[1]_2 m \alpha}^{[1]_6} \right)^\dagger &= u_{[1]_3^* [1]_2^*}^{[1]_6^* m \alpha} = (-1)^{m+\frac{1}{2}-\alpha} u_{[1]_3^* [1]_2^*}^{[1]_6^*} \\ &\left[ u_{[1]_3^* [1]_2^*}^{[1]_6^* m \alpha}, u_{[1]_3 [1]_2 n \beta}^{[1]_6} \right] = \delta_{m,n} \delta_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (15.5)$$

Векторните бозони, дефинирани в (15.4) и (15.5) играят ролята на “квазичастични кварки” и могат да се използват за конструирането на други квазичастични възбуждания с различен ъглов момент. Така например  $s$  и  $d$  бозоните от МВБ, могат да се разглеждат като свързани състояния на бозоните (15.4) [283]. В този смисъл групата  $SU(3)$  е групата описваща фундаменталните колективни възбуждания в ядрата.

Сега въвеждаме следните оператори, представляващи билинейни комбинации на операторите на раждане и унищожение на векторните бозони (15.3):

$$F_M^L(\alpha, \beta) = \sum_{k,m} C_{1k\ 1m}^{LM} u_k^\dagger(\alpha) u_m^\dagger(\beta) \quad (15.6a)$$

$$G_M^L(\alpha, \beta) = \sum_{k,m} C_{1k\ 1m}^{LM} u_k(\alpha) u_m(\beta) \quad (15.6b)$$

които раждат или унищожават двойка бозони с ъглов момент  $L$  и проекция  $M$ . Въвеждаме също и операторите

$$A_M^L(\alpha, \beta) = \sum_{k,m} C_{1k\ 1m}^{LM} u_k^\dagger(\alpha) u_m(\beta) \quad (15.6b)$$

които запазват броя на бозоните. Операторите (15.6a-в) въведени по-горе имат следните свойства:

$$\begin{aligned} F_M^L(\alpha, \beta) &= (-1)^L F_M^L(\beta, \alpha) & G_M^L(\alpha, \beta) &= (-1)^L G_M^L(\beta, \alpha) \\ [F_M^L(\alpha, \beta)]^\dagger &= (-1)^M G_{-M}^L(\beta, \alpha) & [G_M^L(\alpha, \beta)]^\dagger &= (-1)^M F_{-M}^L(\beta, \alpha) \\ [A_M^L(\alpha, \beta)]^\dagger &= (-1)^M A_{-M}^L(\beta, \alpha) \end{aligned} \quad (15.7)$$

Операторите (15.6a-в) могат да се реализират и като двойни тензори с ранг  $L$  по отношение на алгебрата на ъгловия момент  $so_L(3)$  и с ранг  $T$  относно алгебрата на псевдоспина  $su_T(2)$

$$\begin{aligned} F_{Tt}^{LM} &= (G_{Tt}^{LM})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_1\ m_2\ \tau_1\ \tau_2} C_{lm_1, lm_2}^{LM} C_{f\tau_1, f\tau_2}^{Tt} u_{f\tau_1}^{\dagger lm_1} u_{f\tau_2}^{\dagger lm_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( u_f^{\dagger l} \otimes u_f^{\dagger l} \right)_{Tt}^{LM} \end{aligned} \quad (15.8a)$$

$$\begin{aligned} A_{Tt}^{LM} &= \sum_{m_1\ m_2\ \tau_1\ \tau_2} C_{lm_1, lm_2}^{LM} C_{f\tau_1, f\tau_2}^{Tt} u_{f\tau_1}^{\dagger lm_1} u_{f\tau_2}^{lm_2} (-1)^{l-m_2} (-1)^{f-\tau_2} \\ &= \left( u_f^{\dagger l} \otimes \tilde{u}_f^l \right)_{Tt}^{LM} \end{aligned} \quad (15.8b)$$

където

$$\tilde{u}_{f\tau}^{lm} = (-1)^{l+m}(-1)^{f+\tau}u_{f-\tau}^{l-m}. \quad (15.9)$$

От свойствата на симетрия на коефициентите на Clebsch-Gordan  $C_{lm,ln}^{LM}$  следват определени ограничения (вж.(15.7))

$$(-1)^{2l-L}(-1)^{2f-T} = 1 \quad (15.10)$$

върху възможните стойности на ъгловия момент  $L$  и псевдоспина  $T$ , определящи тензорите  $F_{Ti}^{LM}$  и  $G_{Ti}^{LM}$  (15.8а).

## 15.2 Алгебрична структура породена от тях

За да изследваме алгебричната структура на модела, първо трябва да определим комутационните съотношения на операторите  $F_M^L(\alpha, \beta)$ ,  $G_M^L(\alpha, \beta)$  и  $A_M^L(\alpha, \beta)$  (15.6а-в), които са 78 на брой:

$$\begin{aligned} [A_{M_1}^{L_1}(\alpha, \beta), F_{M_2}^{L_2}(\alpha', \beta')] &= (-1)^{L_2}[(2L_1+1)(2L_2+1)]^{1/2} \sum_{L,M} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times [F_M^L(\alpha', \alpha)\delta(\beta, \beta') + (-1)^{L_1}F_M^L(\beta', \alpha)\delta(\alpha', \beta)], \quad (15.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_{M_1}^{L_1}(\alpha, \beta), G_{M_2}^{L_2}(\alpha', \beta')] &= (-1)^{L_1}[(2L_1+1)(2L_2+1)]^{1/2} \sum_{L,M} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times [(-1)^{L_2}G_M^L(\alpha', \beta)\delta(\alpha, \beta') + G_M^L(\beta', \beta)\delta(\alpha, \alpha')], \quad (15.11б) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F_{M_1}^{L_1}(\alpha, \beta), G_{M_2}^{L_2}(\alpha', \beta')] &= [(2L_1+1)(2L_2+1)]^{1/2} \sum_{L,M} (-1)^L C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times [(-1)^{L_2}A_M^L(\alpha, \alpha')\delta(\beta, \beta') + A_M^L(\alpha, \beta')\delta(\alpha', \beta) \\ &+ (-1)^{L_1+L_2}A_M^L(\beta, \alpha')\delta(\alpha, \beta') + (-1)^{L_1}A_M^L(\beta, \beta')\delta(\alpha, \alpha')] \\ &+ (-1)^{M_1+1}\delta_{L_1, L_2}\delta_{M_1, -M_2}[\delta(\alpha, \beta')\delta(\alpha', \beta) + (-1)^{L_2}\delta(\alpha, \alpha')\delta(\beta, \beta')], \quad (15.11в) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A_{M_1}^{L_1}(\alpha, \beta), A_{M_2}^{L_2}(\alpha', \beta')] &= [(2L_1+1)(2L_2+1)]^{1/2} \sum_{L,M} C_{L_1 M_1 L_2 M_2}^{LM} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times [(-1)^{L_1+L_2}A_M^L(\alpha', \beta)\delta(\alpha, \beta') - (-1)^L A_M^L(\alpha, \beta')\delta(\alpha', \beta)]. \quad (15.11г) \end{aligned}$$

От (15.11а-г) и дефинициите (15.6а-в) е ясно, че тези оператори определят алгебрата на некомпактната симплектична група  $Sp(12, R)$  и също, че 36-те оператора  $A_M^L(\alpha, \beta)$ , ( $\alpha, \beta = \pm 1/2, L = 0, 1, 2$ ) са образуващи на максималната компактна подгрупа на  $Sp(12, R)$ , а именно групата  $U(6)$ .

По нататък, настоящият модел ще бъде прилаган за описание на четно-четните ядра, така че спина на основните им състояния е нула. Техните ъглови и квадруполни моменти са най-важните физически наблюдаеми в този случай. Използвайки стандартните дефиниции и съотношенията (15.1) и (15.2) операторите на ъгловия и квадруполния моменти се изразяват по следния начин:

$$L_M = -i \sum_{\alpha, k, m} C_{1k 1m}^{1M} x_m(\alpha) q_k(\alpha) = -\sqrt{2} \sum_{\alpha} A_M^1(\alpha, \alpha) \quad (15.12a)$$

и

$$Q_M = \sum_{\alpha, k, m} C_{1k 1m}^{2M} x_k(\alpha) x_m(\alpha) = \sqrt{6} \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{2} F_M^2(\alpha, \alpha) + A_M^2(\alpha, \alpha) + \frac{1}{2} G_M^2(\alpha, \alpha) \right). \quad (15.12b)$$

“Псевдоспинът” и неговата трета проекция играят съществена роля при класификацията на състоянията на многочастичната система. Операторите на “псевдоспина” могат да се въведат чрез

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} A^0(p, n) & T_{-1} &= -\sqrt{\frac{3}{2}} A^0(n, p) \\ T_0 &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} (A^0(p, p) - A^0(n, n)). \end{aligned} \quad (15.13)$$

### 15.3 $U(6)$ подгрупа и редуциите ѝ

Като първа стъпка, ние няма да разглеждаме богатата и красива структура на  $Sp(12, R)$  и нейните приложения за описание на колективните движения в ядрата, а ще изследваме само нейната унитарната подструктура, определена от групата  $U(6)$  и нейните подгрупи. Смисълът на това ограничение от физическа гледна точка ще бъде изяснен по нататък в тази част на дисертацията, а в случая се налага за да се уточнят използваните означения.

От комутационните съотношения (15.11a-г) следва, че алгебрата на  $U(6)$  съдържа следните редици от подгрупи:

$$\begin{array}{ccccc} & & U(6) & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ O(6) & & SU(3) \otimes SU(3) & & U(3) \otimes U(2) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ SU(3) \otimes O(2) & & O(3) \otimes O(3) & & U(3) \otimes U(1) \otimes U(1) \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ O(3) \otimes O(2) & \longrightarrow & O(3) & & \end{array} \quad (15.14)$$

Сега на кратко, ще изброим съответните им алгебри и техните образуващи, както и операторите им на Casimir от втори порядък.

(1) Алгебра на  $U(6)$ . Нейните генератори са операторите  $A_M^L(\alpha, \beta)$ , ( $L = 0, 1, 2$ ;  $\alpha, \beta = +\frac{1}{2} \rightarrow (p), -\frac{1}{2} \rightarrow (n)$ ). Те удовлетворяват комутационните съотношения (15.11а-г) и съответният оператор на Casimir от втори порядък е

$$K_6 = \sum_{L,M} \sum_{\alpha,\beta} (-1)^M A_M^L(\alpha, \beta) A_{-M}^L(\beta, \alpha) = N(N+5)$$

където

$$N = -\sqrt{3}(A^0(p, p) + A^0(n, n)) \quad (15.15)$$

е оператора на пълния брой частици в системата.

(2) Алгебрата на ъгловия момент на  $O(3)$ , определена от операторите на ъгловия момент

$$L_M = -\sqrt{2}(A^1(p, p) + A^1(n, n)), \quad (15.16)$$

които удовлетворяват добре известните комутационни съотношения

$$[L_{M_1}, L_{M_2}] = -\sqrt{2} C_{1M_1 1M_2}^{1M_1+M_2} L_{M_1+M_2}. \quad (15.17)$$

Тази група неизбежно се появява на края на всяка редица от подгрупи и има следния оператор на Casimir

$$\pi_3 = \sum_{M,\alpha,\beta} (-1)^M A_M^1(\alpha, \alpha) A_{-M}^1(\beta, \beta) = \frac{1}{2} L^2.$$

(3) Алгебрата на  $SU(3) \otimes U(2)$ . Нейни образуващи са два набора от комутиращи оператори.

(а) Алгебрата на  $U(2)$  е определена чрез оператора на броя на частиците  $N$  (15.15) и компонентите на оператора на “псевдоспина”  $T$  (15.13). Компонентите на “псевдоспина”  $T_m^1$ , ( $m = 0, \pm 1$ ) комутират с  $N$  и удовлетворяват стандартни комутационни съотношения от типа (15.17), като по този начин определят подалгебрата  $su(2) \subset u(2)$ . Операторът на Casimir от втори порядък е

$$K_2 = \frac{4}{3} T^2 + \frac{1}{3} N^2$$

(б) Алгебрата на  $U(3)$ . Тя се състои от операторите  $N$  (15.15),  $L_M$  (15.16) и

$$\tilde{Q}_M = \sqrt{6}(A^2(p, p) + A^2(n, n)), \quad (15.18)$$

който се интерпретира, като ограничения оператор на квадруполния момент на Elliott [38]. Операторите  $L_M$  и  $\tilde{Q}_M$  комутират с  $N$  и определят подалгебрата  $su(3) \subset u(3)$ . Стандартните комутационни съотношения между тези оператори са

$$\begin{aligned} [L_{M_1}, \tilde{Q}_{M_2}] &= \sqrt{30} C_{1M_1 2M_2}^{2M_1+M_2} \tilde{Q}_{M_1+M_2} \\ [\tilde{Q}_{M_1}, \tilde{Q}_{M_2}] &= 3\sqrt{10} C_{2M_1 2M_2}^{1M_1+M_2} L_{M_1+M_2}. \end{aligned}$$

Операторът на Casimir от втори порядък на  $U(3)$  е

$$K_3 = \frac{1}{6}\tilde{Q}^2 + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}N^2 ,$$

където

$$\tilde{Q}^2 = 6 \sum_{M,\alpha,\beta} (-1)^M A_M^2(\alpha, \alpha) A_M^2(\beta, \beta) .$$

Трябва да се отбележи, че групите  $U(2)$  и  $U(3)$  са взаимно допълнителни в смисъл, че собствените стойности на  $K_2$  се определят напълно от собствените стойности на  $K_3$ . Това се дължи на съотношението

$$K_3 = \frac{3}{2}K_2 + N . \quad (15.19)$$

Това значи още, че представянията на  $U(2)$  и  $U(3)$  могат да се определят чрез едни и същи квантови числа (например броя на квазичастиците  $N$  и “псевдоспина”  $T$ ).

(4) Алгебрата на  $U(1) \otimes U(1)$ . Тя се определя от операторите

$$A^0(p, p) + A^0(n, n) \quad A^0(p, p) - A^0(n, n)$$

пропорционални на  $N$  (15.15) и  $T_0$  (15.13) и нейния оператор на Casimir от втори порядък е

$$K_1 = \frac{1}{3}N^2 + \frac{4}{3}T_0^2 .$$

(5) Алгебрата на  $SU(3) \otimes SU(3)$ . Тя съдържа два набора от взаимно комутиращи оператори

$$P_M^L = (A_M^L(p, p) + A_M^L(n, n) + A_M^L(p, n) + A_M^L(n, p)) / \sqrt{2} \quad (15.20a)$$

и

$$S_M^L = (A_M^L(p, p) + A_M^L(n, n) - A_M^L(p, n) - A_M^L(n, p)) / \sqrt{2} . \quad (15.20b)$$

Тази група има два оператора на Casimir от втори порядък

$$\begin{aligned} G_3 &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (P_M^L P_{-M}^L + S_M^L S_{-M}^L) \\ &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (A_M^L(p, n) A_{-M}^L(p, n) + A_M^L(n, p) A_{-M}^L(n, p)) \\ &= K_3 - \frac{2}{3}T^2 - \frac{4}{3}T_0^2 + \frac{1}{6}N^2 + 3N \end{aligned} \quad (15.21)$$

и

$$\begin{aligned} G'_3 &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (P_M^L P_{-M}^L - S_M^L S_{-M}^L) \\ &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (A_M^L(p, p) A_{-M}^L(n, p) + A_M^L(p, n) A_{-M}^L(p, p) \\ &\quad + A_M^L(n, n) A_{-M}^L(p, n) + A_M^L(n, p) A_{-M}^L(n, n)) - \frac{16}{3}\sqrt{3}(A^0(p, n) + A^0(n, p)) . \end{aligned}$$

(6) Алгебрата на  $O(3) \otimes O(3)$ . Нейните генератори се определят от операторите (15.20а,б) при  $L = 1$ . Тази група също има два оператора на Casimir

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (P_M^1 P_{-M}^1 + S_M^1 S_{-M}^1) \\ &= \sum_M (-1)^M (2A_M^1(p, p)A_{-M}^1(n, n) + A_M^1(p, n)A_{-M}^1(p, n) + A_M^1(n, p)A_{-M}^1(n, p)) \\ &= \pi_3 - T^2 + \frac{1}{4}N(N+6)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}'_3 &= \sum_{L=1,2} \sum_M (-1)^M (P_M^1 P_{-M}^1 - S_M^1 S_{-M}^1) \\ &= 2 \sum_M (-1)^M (A_M^1(p, p)A_{-M}^1(n, p) + A_M^1(p, n)A_{-M}^1(p, p) \\ &\quad + A_M^1(n, n)A_{-M}^1(p, n) + A_M^1(n, p)A_{-M}^1(n, n)) - 2\sqrt{3}(A^0(p, n) + A^0(n, p)).\end{aligned}$$

(7) Алгебрата на  $O(6)$ . Нейният набор от генератори е

$$\begin{array}{ll} A_M^1(p, n) + A_M^1(n, p) & i(A_M^2(p, n) + A_M^2(n, p)) \\ i(A^0(p, n) - A^0(n, p)) & A_M^1(p, p) \quad A_M^1(n, n) \end{array} \quad (15.22)$$

и вторият оператор на Casimir е

$$\pi_6 = \sum_{L=0,1,2} \sum_M (-1)^{L+M+1} (A_M^L(p, n)A_{-M}^L(p, n) + A_M^L(n, p)A_{-M}^L(n, p)) + \frac{1}{2}N^2 - 2T_0 + 3N.$$

(8) Алгебрата на  $\overline{SU(3)}$ . Тя се състои от 8 генератора, които са част от генераторите на  $O(6)$ , а именно

$$X_M = i(A_M^2(p, n) - A_M^2(n, p)) \quad Y_M = A_M^1(p, p) + A_M^1(n, n). \quad (15.23)$$

Нейният оператор на Casimir от втори ред е

$$\bar{G}_3 = \sum_M (-1)^M (X_M X_{-M} + Y_M Y_{-M}). \quad (15.24)$$

(9) Алгебрата на  $O(2)$ . Тя се задава от оператора

$$i(A^0(p, n) - A^0(n, p)) \quad (15.25)$$

и оператора и на Casimir от втори порядък е

$$\pi_2 = \frac{2}{3}T^2 - \frac{2}{3}T_0^2 - A^0(p, n)A^0(p, n) - A^0(n, p)A^0(n, p).$$

## 15.4 Формулировка на МВВБ

### 15.4.1 Моделен хамилтониан

Най-общият едно- и двучастичен хамилтониан, който е инвариантен по отношение на ермитово спрягане и по отношение на групата  $O(3)$ , може да се представи във вида:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (15.26a)$$

където

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\alpha} (\varepsilon_{\alpha} A^0(\alpha, \alpha) + \varepsilon_{\alpha}^{+} F^0(\alpha, \alpha) + \varepsilon_{\alpha}^{-} G^0(\alpha, \alpha))$$

и  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  е линейна комбинация на всички възможни скаларни произведения на операторите (15.6a-в).

Като първо приближение в модела, ние приемаме допълнителното условие, хамилтонианът да запазва броя на бозоните. Това условие ограничава областта на приложимост на модела, но прави възможно конструирането по сравнително лесен начин на базисите, които по нататък ще се ползват при диагонализацията на пълния хамилтониан (15.26a). Ограниченият хамилтониан, който запазва броя на бозоните има вида

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}} \\ &= \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} A^0(\alpha, \alpha) + \sum_L \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V^L(\alpha\beta; \gamma\delta) F^L(\alpha, \beta) G^L(\gamma, \delta) \end{aligned} \quad (15.26b)$$

и неговата структура е обект на настоящето изследване.

Коефициентите  $V^L(\alpha\beta; \gamma\delta)$  в (15.26b) са реални феноменологични константи, свързани с двубозонното взаимодействие. От (15.7) следва, че те имат следните свойства:

$$\begin{aligned} V^L(\alpha\beta; \gamma\delta) &= V^L(\gamma\delta; \alpha\beta) \\ V^L(\alpha\beta; \gamma\delta) &= (-1)^L V^L(\beta\alpha; \gamma\delta) = (-1)^L V^L(\alpha\beta; \delta\gamma) . \end{aligned} \quad (15.27)$$

В частност

$$V^L(\alpha\alpha; \gamma\delta) = V^L(\alpha\beta; \gamma\gamma) = 0 \quad \text{ако } L = 1 .$$

От (15.27) е очевидно, че броят на независимите константи  $V^L(\alpha\beta; \gamma\delta)$  е 13. Този брой може да се намали, при положение, че  $H$  от (15.26b) е обект на някои допълнителни ограничения.

Използвайки (15.13) не е трудно да се покаже, че тройката оператори  $-F^L(p, p)/\sqrt{2}$ ,  $F^L(p, n)$  и  $F^L(n, n)/\sqrt{2}$ , както и  $-G^L(n, n)/\sqrt{2}$ ,  $G^L(n, p)$  и  $G^L(p, p)/\sqrt{2}$  образуват тензори от първи ранг по отношение на групата на “псевдоспина”, определена от операторите  $T_k$ , ( $k = 0, \pm 1$ ). Следователно е очевидно, хамилтонианът

определен от (15.26а,б) изобщо не комутира с операторите на “псевдоспиновата” група. От друга страна разликата между  $p$  и  $n$  бозоните е несъществена в този случай и ще е разумно да считаме  $H_{\text{int}}$  от (15.26б) инвариантен при взаимната замяна на  $p$  и  $n$  (“псевдоспинова” симетрия). За това въвеждаме оператора

$$R_x = \exp(i\pi T_x) \quad T_x = (-T_1 + T_{-1})/\sqrt{2},$$

който има свойството

$$R_x^{-1} u_k^\dagger(\alpha) R_x = -i u_k^\dagger(-\alpha) \quad R_x^{-1} u_k(\alpha) R_x = i u_k(-\alpha)$$

и осъществява замяната  $p \rightleftharpoons n$ . Очевидно е, че

$$\begin{aligned} R_x^{-1} F_M^L(\alpha, \beta) R_x &= -F_M^L(-\alpha, -\beta) & R_x^{-1} G_M^L(\alpha, \beta) R_x &= -G_M^L(-\alpha, -\beta) \\ R_x^{-1} A_M^L(\alpha, \beta) R_x &= A_M^L(-\alpha, -\beta) \end{aligned}$$

и че  $H_{\text{int}}$  е инвариантен по отношение на “псевдоспина” при условие, че

$$R_x^{-1} H_{\text{int}} R_x = H_{\text{int}}. \quad (15.28a)$$

Последното означава, че

$$V^L(\alpha\beta; \gamma\delta) = V^L(-\alpha - \beta; -\gamma - \delta) \quad (15.28б)$$

и броят на независимите константи се редуцира от 13 на 9.

Хамилтонианите (15.26а,б) имат алгебрична структура, с която се улеснява проблема за тяхната диагонализация. Те са изразени чрез генераторите на  $Sp(12, R)$ . Собствените вектори на  $H$  или  $H_{\text{int}}$  могат да се развият по базисните вектори на някъкво неприводимо представяне на групата  $Sp(12, R)$ . От друга страна (15.26а,б) са инвариантни само по отношение на групата  $O(3)$ , определена чрез операторите на ъгловия момент (15.12а). Следователно всеки от хамилтонианите разцепва неприводимия мултиплет на  $Sp(12, R)$  и генерира енергетичния спектър на системата, т.е.  $Sp(12, R)$  е динамическа група за взаимодействията (15.26а,б). Нещо повече, операторите на преход  $Q_M^2$  от (15.12б) също се изразяват чрез генераторите на  $Sp(12, R)$ . Това значи, че ако се знаят представянията на алгебрата на  $Sp(12, R)$ , то могат да се пресметнат не само енергетичните нива на системата, но и вероятностите за преход между тях.

Трябва да се отбележи, че ако  $x_m(\mu)$ , ( $\mu = 1, 2, \dots, A$ ) са цикличните координати на система от  $A$  частици, тогава използвайки формулите от §15.1 могат да се построят операторите  $F_M^L(\mu, \nu)$ ,  $A_M^L(\mu, \nu)$  и  $G_M^L(\mu, \nu)$ , ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots, A$ ). Тези оператори удовлетворяват комутиационните съотношения (15.11а-г) и пораждат алгебрата на групата  $Sp(6A, R)$  – некомпактната група на канонични трансформации на система

от  $A$  частици [284]. При сумиране по частичните индекси се получават генераторите на  $Sp(6, R)$  (21 на брой) [4, 26, 281]:

$$F_M^L = \sum_{\mu=1}^A F_M^L(\mu, \mu) \quad A_M^L = \sum_{\mu=1}^A A_M^L(\mu, \mu) \quad G_M^L = \sum_{\mu=1}^A G_M^L(\mu, \mu) .$$

Последните комутират с набора от оператори

$$I_{\mu\nu} = \sum_{m=0, \pm 1} (u_m^\dagger(\mu) u^m(\nu) - u_m^\dagger(\nu) u^m(\mu))$$

които генерират групата  $O(A)$  на ротациите в  $A$ -мерното пространство на частиците [282].

Ако системата съдържа два типа частици, различаващи се например по тяхната проекция на “псевдоспина”, тогава броя на цикличните координати се удвоява и могат да се построят генераторите на групите  $Sp(12A, R)$  и  $Sp(12, R)$  съответно. Тези генератори също комутират с генераторите на  $O(A)$ .

Това обяснява до някаква степен основните допускания на нашия модел – ние приемаме, че колективните свойства на система от  $A$  частици от два различни типа, се определят от алгебричната структура, генерирана от групата  $Sp(12, R)$ .

Тук напомняме, че групата  $Sp(12, R)$  е некомпактна и нейните представяния са безкрайномерни, което прави диагонализацията на хамилтонианите (15.26а,б) в базиса на  $Sp(12, R)$  твърде трудно. Обаче в случая на ограничения Хамилтониан (15.26б), това усложнение може да се преодолее, ако се използва стандартна техника за пресвързване на некомутиращи оператори [285]:

$$\begin{aligned} \sum_M (-1)^M F_M^L(\alpha, \beta) G_{-M}^L(\gamma, \delta) = \\ = \frac{2L+1}{\sqrt{3}} A^0(\alpha, \delta) \delta(\gamma, \beta) + \sum_{J, \mathcal{M}} (-1)^{\mathcal{M}} (2L+1) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} A_{\mathcal{M}}^J(\alpha, \gamma) A_{-\mathcal{M}}^J(\beta, \delta) . \end{aligned}$$

По този начин, ограничения хамилтониан може да се пренапише в термини само на генераторите на групата  $U(6)$ :

$$\begin{aligned} H'_0 &= \sum_{\alpha, \beta} h_0(\alpha, \beta) A^0(\alpha, \beta) \\ H'_{\text{int}} &= \sum_{L, J, \mathcal{M}} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} (2L+1) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} V^L(\alpha\beta; \gamma\delta) (-1)^{\mathcal{M}} A_{\mathcal{M}}^J(\alpha, \gamma) A_{-\mathcal{M}}^J(\beta, \delta) , \end{aligned} \tag{15.29}$$

където

$$h_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{L, \lambda} (2L+1) V^L(\alpha\lambda; \lambda\beta) + \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \delta(\alpha, \beta) .$$

Горното представяне на хамилтониана разкрива ролята на групата  $Sp(12, R)$  в проблема. Преди всичко, собствените стойности на хамилтониана принадлежат на дадено УНП на  $Sp(12, R)$ . Освен това има само два типа УНП на  $Sp(12, R)$  – четни и нечетни, които могат да се построят чрез шестте оператора на раждане [284], както в нашия случай. Важно е да се отбележи, че при разлагането  $Sp(12, R) \supset U(6)$  УНП на  $Sp(12, R)$  се разцепват на безкраен брой от симетрични УНП на  $U(6)$  от вида  $[N, 0, 0, 0, 0, 0]$ , където  $N = 0, 2, 4, \dots$ , за четните УНП на  $Sp(12, R)$  и  $N = 1, 3, 5, \dots$  за нечетните УНП на  $Sp(12, R)$ . Това значи, че матричните елементи на ограничения (15.266) хамилтониан в базиса на  $Sp(12, R)$  изчезват между състоянията принадлежащи на различни УНП на  $U(6)$ , зададени чрез различни квантови числа  $N$ , т.е. в базиса на  $Sp(12, R)$  матрицата на  $H$  (15.266) е блок-диагонална. По този начин, проблемът се свежда до диагонализацията на  $H$  в крайните подпространства на различните УНП на  $U(6)$ , което винаги може да се осъществи, поне числено.

### 15.4.2 Динамични симетрии в $U(6)$

Диагонализацията на  $H$  (15.266) или (15.29) може лесно да се осъществи, ако е възможно да изразим членовете в сумата на (15.29) чрез операторите на Casimir на групата  $U(6)$  и нейните подгрупи (15.14). Отчитайки свойствата на симетрия на хамилтониана (15.28а,б) и съотношенията за пресвързване в случая  $\alpha \neq \beta$  получаваме равенството

$$\begin{aligned} \sum_{L,M} \sum_{\alpha \neq \beta} (-1)^M A_M^L(\alpha, \beta) A_{-M}^L(\beta, \alpha) &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\alpha} A^0(\alpha, \alpha) \sum_L (2L+1) + \sum_{L,J,\mathcal{M}} \sum_{\alpha \neq \beta} (-1)^{L+J} (2L+1) \\ &\quad \times \begin{Bmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} A_{\mathcal{M}}^J(\alpha, \alpha) A_{\mathcal{M}}^J(\beta, \beta). \end{aligned}$$

С негова помощ ограничения хамилтониан може да се запише в явен вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= (\varepsilon_p + \frac{1}{3}\sqrt{3}V^0(pp; pp) + \frac{5}{3}\sqrt{3}V^2(pp; pp))(A^0(p, p) + A^0(n, n)) \\ \tilde{H}_{\text{int}} &= \sum_{L,J,\mathcal{M}} (2L+1) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & L \\ 1 & 1 & J \end{Bmatrix} (-1)^{\mathcal{M}} \left[ V^L(pp; pp)(A_{\mathcal{M}}^J(p, p)A_{-\mathcal{M}}^J(p, p) \right. \\ &\quad + A_{\mathcal{M}}^J(n, n)A_{-\mathcal{M}}^J(n, n)) + 4V^L(pn; pn)A_{\mathcal{M}}^J(p, p)A_{-\mathcal{M}}^J(n, n) \\ &\quad + V^L(pp; nn)(A_{\mathcal{M}}^J(p, n)A_{-\mathcal{M}}^J(p, n) + A_{\mathcal{M}}^J(n, p)A_{-\mathcal{M}}^J(n, p)) \\ &\quad + 2V^L(pp; nn)(A_{\mathcal{M}}^J(p, p)A_{-\mathcal{M}}^J(n, p) + A_{\mathcal{M}}^J(p, n)A_{-\mathcal{M}}^J(p, p) \\ &\quad \left. + A_{\mathcal{M}}^J(n, n)A_{-\mathcal{M}}^J(p, n) + A_{\mathcal{M}}^J(n, p)A_{-\mathcal{M}}^J(n, n)) \right]. \quad (15.30) \end{aligned}$$

От  $U(6)$  структурата на ограничения хамилтониан (резултатите от предишния параграф) става ясно, че двубозонното взаимодействие  $\tilde{H}_{\text{int}}$  може също да се запише в термини на операторите на алгебрите на Casimir от втори порядък, принадлежащи на групите от редуционната схема (15.14):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{int}} = & \alpha_6 K_6 + \alpha_3 K_3 + \alpha_2 K_2 + \alpha_1 K_1 + \bar{\alpha}'_3 G'_3 + \beta_6 \pi_6 + \bar{\beta}_3 \bar{\pi}_3 \\ & + \bar{\beta}'_3 \bar{\pi}'_3 + \beta_3 \pi_3 + \beta_2 \pi_2 + \gamma (A^0(p, n) + A^0(n, p)) . \end{aligned} \quad (15.31)$$

Операторите на Casimir  $G_3$  (15.21) и  $\bar{G}_3$  (15.24) не са отчетени в (15.31), поради съществуващите за тях съотношения

$$G_3 = \frac{2}{3} K_6 + \frac{2}{3} K_3 + K_2 - 2K_1 - 2\pi_2$$

и

$$\bar{G}_3 = -\frac{2}{3} \pi_6 + \frac{1}{3} \bar{\pi}_3 + \frac{4}{3} \pi_3 .$$

Сега е лесно да се изразят реалните независими константи от (15.30) чрез коефициентите в развитието (15.31):

$$\begin{aligned} V^0(pp; pp) &= \alpha_6 + \alpha + \frac{2}{3} \alpha_1 - \beta_6 - \bar{\beta}_3 - \beta_3 \\ V^2(pp; pp) &= \alpha_6 + \alpha + \frac{2}{3} \alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_6 + \frac{1}{2} \bar{\beta}_3 + \frac{1}{2} \beta_3 \\ V^0(pn; pn) &= \frac{1}{2} \alpha_6 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta_6 - \bar{\beta}_3 - \frac{1}{2} \beta_3 + \frac{1}{6} \beta_2 \\ V^1(pn; pn) &= -\frac{1}{2} \alpha_6 + \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta_6 + \frac{1}{4} \beta_3 + \frac{1}{6} \beta_2 \\ V^2(pn; pn) &= \frac{1}{2} \alpha_6 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta_6 + \frac{1}{2} \bar{\beta}_3 + \frac{1}{4} \beta_3 + \frac{1}{6} \beta_2 \\ V^0(pp; nn) &= -3\beta_6 - \bar{\beta}_3 - \frac{1}{3} \beta_2 \\ V^2(pp; nn) &= \frac{1}{2} \bar{\beta}_3 - \frac{1}{2} \beta_2 \\ V^0(pp; pn) &= \frac{2}{3} \bar{\alpha}'_3 - \bar{\beta}'_3 \\ V^2(pp; pn) &= \frac{2}{3} \bar{\alpha}'_3 + \frac{1}{2} \bar{\beta}'_3 \\ \gamma &= \frac{16}{3} \sqrt{3} \bar{\alpha}'_3 + 2\sqrt{3} \bar{\beta}'_3 , \end{aligned}$$

където

$$\alpha = \alpha_3 + \frac{2}{3} \alpha_2 ,$$

което се дължи на факта, че  $U(3)$  и  $U(2)$  са взаимно допълнителни групи (15.19).

Ако е възможно да се намерят ядра, за които параметрите в (15.31) са такива, че да се реализира само една от редиците от редуционната схема (15.14), тогава запазващият броя на частиците хамилтониан може да се диагонализира веднага в базиса на състоянията, означени със собствените стойности на съответните оператори на Casimir. Реализираните по този начин гранични случаи са от интерес за определяне на границите на приложимост на модела на двата векторни бозона.

От всичко това, може да се направи заключението, че ролята на  $Sp(12, R)$  в този проблем е по-някакъв начин ограничена и несъществена и че ние можем да се ограничим до динамичната група  $U(6)$ . Това обаче, не е така, защото пълния спектър на системата може да се пресметне само чрез диагонализацията на ограничения хамилтониан (15.26б) в подпространствата на всички УНП на  $U(6)$ , принадлежащи на дадено УНП на  $Sp(12, R)$ . Освен това и операторите описващи преходите между състояния от различни УНП на  $U(6)$  принадлежат на обвиващата алгебра на  $Sp(12, R)$ . И на края ще отбележим, че в случая на пълния хамилтониан (15.26а) членовете, които не запазват броя на частиците смесват различните УНП на  $U(6)$  и в този смисъл  $Sp(12, R)$  е група на динамична симетрия на системата.

## 16. Описание на ивици с положителна и отрицателна четност в симплектичното разширение на $U(6)$ границата на МВВБ

Въведеният в началото на 80-те Модел на взаимодействащите векторни бозони (МВВБ), чиито основни предположения бяха изложени в предишната глава и [A18], и който се явява обобщение на модела на нарушена  $SU(3)$  симетрия [286], описва добре нисколежащите основна и  $\gamma$ -ивици [287] на добре деформираните ядра. Неговите преимущества са представени в така наречената ротационна граница на МВВБ [288], описваща добре всички ивици с положителна четност (поне в нискоспиновата област) на ядра от областта на редките земи и актинидите. Нещо повече,  $U(6)$  разширението на модела съдържа някои поредици от  $SU(3)$  мултиплети, които се оказват подходящи за описанието на нисколежащите ивици с отрицателна четност [289].

С напредъка на съвременната експериментална техника стана възможно изследването на колективните ивици до много високи ъглови моменти [92]. Това мотивира използването на нов подход в рамките на МВВБ, с помощта на който да могат да се опишат първите ивици с положителна и отрицателна четност до много високи спинове. В настоящото ново приложение на модела ние използваме неговото симплектично разширение [A19, B23]. Това позволява тези ивици да бъдат разглеждани като “ираст” ивици, в смисъл, че разглеждаме от състоянията с дадено  $L$  тези, които минимизират стойностите на енергиите по отношение на  $N$  (15.15). Когато разглеждаме динамичната симетрия на симплектичното разширение на модела през максималната компактна подгрупа  $U(6) \subset Sp(12, R)$ , в смисъла изложен в Глава 15 ние получаваме точно решима граница на МВВБ. Найното приложение за описание на ивици с положителна и отрицателна четност и най-вече на енергиите на основната и октуполната ивици на четно-четните ядра от областта на редките земи и актинидите е изложено в тази глава. Анализът на получените резултати показва, че тяхното твърде добро възпроизвеждане се дължи на появата на член от вибрационен тип, който оказва влияние на “ираст” енергиите.

### 16.1 Алгебрична реализация на базиса в симплектичното разширение на $U(6)$

Както вече отбелязахме, въведените в Глава 15 бозонни оператори на раждане и унищожение (15.3), (15.4) нямат микроскопична структура, както например  $s$  и  $d$  бозоните на МВБ [41], разглеждани като фермионни двойки свързани в общ ъглов момент  $L = 0$  и  $L = 2$  съответно. Строителните блокове на МВВБ могат да бъдат разглеждани като “осцилаторни кварки” и са дефинирани [A18, 278] с помощта на цикличните координати (15.1) на “квазичастицата” и съответните канонични импулси (15.2). Швингеровото представяне на алгебрата на ъгловия момент  $so(3)$  се задава чрез стандартната дефиниция на нейния генериращ оператор (15.12а), което прави въведените векторни бозони удобно математическо средство в алгебричния модел на теоретичната ядрена физика.

Билинейните форми (15.6а, б и в) на операторите на раждане и унищожение на двата вида векторни бозона генерират некомпактната симплектична група  $Sp(12, R)$  [A18], която разглеждаме като група на динамична симетрия на модела. Следователно, както беше показано в Глава 15, най-общият едно- и двучастичен хамилтониан може да бъде представен чрез нейните генератори. Използвайки комутационните съотношения [A18] между операторите  $F_M^L(\alpha, \beta)$  и  $G_M^L(\alpha, \beta)$ , пълният хамилтониан, запазващ броя на бозоните, може да бъде представен само чрез операторите  $A_M^L(\alpha, \beta)$  (вж. формули (15.29)).

Тъй като е некомпактна група, представянията на  $Sp(12, R)$  са безкрайномерни, което прави диагонализацията на най-общия хамилтониан невъзможна. Операторите  $A_M^L(\alpha, \beta)$  генерират максималната компактна подгрупа на  $Sp(12, R)$ , а именно групата  $U(6)$  [ $Sp(12, R) \supset U(6)$ ].

Ние ще използваме хамилтониана на ротационната граница [288] на модела, която се дефинира от редицата:

$$\begin{array}{ccccccc} U(6) & \supset & SU(3) & \otimes & U(2) & \supset & SO(3) \otimes U(1) \\ [N] & & (\lambda, \mu) & & (N, T) & K & L & T_0 \end{array} \quad (16.1)$$

където под различните подгрупи са дадени квантовите числа, съответстващи на техните неприводими представяния. В тази граница, операторите на физичните наблюдаеми са операторът на ъгловия момент  $L_M = -\sqrt{2} \sum_{M, \alpha} A_M^1(\alpha, \alpha)$  (15.29), и квадруполният оператор на Elliott [38],  $Q_M = \sqrt{6} \sum_{M, \alpha} A_M^2(\alpha, \alpha)$  (15.29), които дефинират алгебрата на  $SU(3)$ . Операторите на компонентите на “псевдоспина”  $T_m$ ,  $m = 0, \pm 1$  (15.13) и броя на бозоните  $N$  (15.15), дефинират алгебрата на  $U(2)$  и също играят важна роля в разглежданата граница. Стойности на тяхните квантови числа се получават чрез стандартните правила [41] на редукция и за пълнота ще ги изложим тук. Според тях напълно симетричните  $U(6)$  неприводими представяния [290]

се разлагат по следния начин:

$$[N]_6 = \sum_{i=0}^{\langle N/2 \rangle} [N-i, i, 0]_3 \cdot [N-2i, 0]_2, \quad (16.2)$$

където  $\langle N/2 \rangle = N/2$  ако  $N$  е четно и  $(N-1)/2$  ако  $N$  е нечетно. От (16.2) получаваме за  $SU(3)$  мултиплетите  $(\lambda, \mu)$  в означенията на Elliott [38]  $\lambda = N - 2i$  и  $\mu = i$ , ( $i = 0, 1, \dots, \langle N/2 \rangle$ ). Тъй като редукцията от  $U(6)$  до  $SO(3)$  е осъществена чрез взаимно допълнителните групи  $SU(3)$  и  $U(2)$ , от (16.2) се вижда, че тяхните квантови числа са свързани по следния начин:

$$T = \frac{\lambda}{2}, \quad N = 2\mu + \lambda. \quad (16.3)$$

Допълнителността на групите  $SU(3)$  и  $U(2)$  [291] прави по-лесно конструирането на базис за  $U(6)$  представянията и редукцията им до  $SO(3)$  представянията [291] на ъгловия момент. Това ни осигурява елегантно решение на проблема за намиране на състоянията от базиса, който записваме като:

$$|[N]_6; (\lambda, \mu); K, L, M; T_0\rangle = |(N, T); K, L, M; T_0\rangle. \quad (16.4)$$

Основното състояние на системата е  $|0\rangle = |(0, 0); 0, 0, 0; 0\rangle$ .

Добре известно е, че бозонните оператори (15.3) действат в Хилбертово пространство  $\mathcal{H}$  с вакуумно състояние  $u_m(\alpha)|0\rangle = 0$ . Използвайки означенията (15.4)  $u_i^\dagger(\frac{1}{2}) = p_i^\dagger$  и  $u_i^\dagger(-\frac{1}{2}) = n_i^\dagger$ , ортонормалният базис може да се запише по следния начин [6]

$$|\pi, \nu\rangle = \prod_{i,k=0,\pm 1} \frac{(p_i^\dagger)^{\pi_i} (n_k^\dagger)^{\nu_k}}{\sqrt{\pi_i!} \sqrt{\nu_k!}} |0\rangle, \quad (16.5)$$

където  $\pi \equiv \{\pi_1, \pi_0, \pi_{-1}\}$  пробягва съвкупността от три неотрицателни числа, за които  $N_p = \sum_i \pi_i$  и същото за  $\nu \equiv \{\nu_1, \nu_0, \nu_{-1}\}$  с  $N_n = \sum_i \nu_i$ .  $N_p$  и  $N_n$  задават броя на бозоните от всеки вид, а броят на всички бозони е  $N = N_p + N_n$ . Тези числа са собствени стойности на съответните оператори  $\hat{N}_p = \sum p_m^\dagger p_m$ ,  $\hat{N}_n = \sum n_m^\dagger n_m$  и  $\hat{N} = \hat{N}_p + \hat{N}_n$  (17.6):

$$\hat{N}_p |\pi, \nu\rangle = N_p |\pi, \nu\rangle, \quad \hat{N}_n |\pi, \nu\rangle = N_n |\pi, \nu\rangle \quad (16.6)$$

$$\hat{N} |\pi, \nu\rangle = N |\pi, \nu\rangle \quad (16.7)$$

В резултат на горните връзки, базисните състояния  $|\pi, \nu\rangle$  могат да бъдат маркирани чрез квантовите числа  $N$ ,  $N_p$  и  $N_n$ . В разглежданата редукционна верига (16.1) символите  $(\lambda, \mu)$  на  $SU(3)$  НП са свързани с броя на въведените  $n$  и  $p$  векторни бозони посредством следните връзки:  $\lambda = N_p - N_n$ ,  $\mu = N_n$ ,  $N = \lambda + 2\mu$  [A19]. Също така, собствени стойности  $N$  в (16.6) съответстват на напълно симетричните  $U(6)$  НП  $[N]_6$ .

Следователно, базисът (16.5) може да бъде еквивалентно означен като  $|[N]; (\lambda, \mu)\rangle$ , където размерността на  $SU(3)$  НП  $\dim(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + 2)(\lambda + 1)(\mu + 1)$  е включена в нормировката на състоянията. Действието на произволна компонента на бозонните оператори на раждане и унищожение върху тези състояния се определя стандартно чрез [A22]:

$$\begin{aligned} p_i^\dagger |[N]; (\lambda, \mu)\rangle &= \sqrt{\frac{(N+1) \dim(\lambda, \mu)}{\dim(\lambda', \mu')}} |[N+1]; (\lambda', \mu')\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda + 1)(\lambda + \mu + 2)(\lambda + 1)}{(\lambda + \mu + 3)(\lambda + 2)}} |[N+1]; (\lambda + 1, \mu)\rangle, \end{aligned} \quad (16.8)$$

$$n_i^\dagger |[N]; (\lambda, \mu)\rangle = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda + 1)(\lambda + 1)(\mu + 1)}{\lambda(\mu + 2)}} |[N+1]; (\lambda - 1, \mu + 1)\rangle, \quad (16.9)$$

$$p_i |[N]; (\lambda, \mu)\rangle = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)(\lambda + \mu + 2)(\lambda + 1)}{\lambda(\lambda + \mu + 1)}} |[N-1]; (\lambda - 1, \mu)\rangle, \quad (16.10)$$

$$n_i |[N]; (\lambda, \mu)\rangle = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)(\lambda + 1)(\mu + 1)}{(\lambda + 2)\mu}} |[N-1]; (\lambda + 1, \mu - 1)\rangle, \quad (16.11)$$

и с тяхна помощ могат да бъдат пресметнати съответните матрични елементи на “строителните блокове” на МВВБ.

Базисните състояния на четното неприводимо представяне на  $Sp(12, R)$  могат да бъдат конструирани и чрез действието на повишаващите оператори  $F_M^L(\alpha, \beta)$  на същата група. Всеки оператор  $F_M^L(\alpha, \beta)$  увеличава броя на бозоните  $N$  с два. В резултат получаваме реализация на  $Sp(12, R)$  класификационната схема за  $SU(3)$  бозонните представяния за четните стойности на броя на бозоните  $N$  представена в Таблица 16.1. Всеки ред (фиксирано  $N$ ) на таблицата съответства на дадено неприводимо представяне на  $U(6)$ . За всяко  $N$  възможните стойности за “псевдоспина” са  $T = N/2, N/21, \dots, 0$  и също са дадени в колона до съответната стойност на  $N$ . Така, когато  $N$  и  $T$  са фиксирани, възникват  $2T + 1$  еквивалентни представяния  $(\lambda, \mu)$  на групата  $SU(3)$ . Всяко от тях се различава чрез собствената стойност на оператора  $T_0 = -T, -T + 1, \dots, T$ , задаващи колоните на Таблица 16.1.

Следователно, в рамките на разгледаното бозонно представяне на алгебрата на  $Sp(12, R)$ , всички възможни неприводими представяния на групата  $SU(3)$  се определят еднозначно чрез всички възможни съвкупности от собствени стойности на ермитовите оператори  $N$  и  $T^2$ . На края се използват стандартните правила за редукцията  $SU(3) \supset SO(3)$  [38]:

$$\begin{aligned} K &= \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0(1) \\ L &= \max(\lambda, \mu), \max(\lambda, \mu) - 2, \dots, 0(1); \quad K = 0 \\ L &= K, K + 1, \dots, K + \max(\lambda, \mu); \quad K \neq 0. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Таблица 16.1: Класификационна схема на базисните състояния на четното неприводимо представяне на  $Sr(12, R)$  спрямо редуционната редица (16.1).

$N T$	$T_0 \setminus \dots \pm 4$	$\pm 3$	$\pm 2$	$\pm 1$	0
0 0				$\swarrow F_{[2]_3[2]_2}^{[2]_6}$	(0, 0)
2 1				$\implies$ (2, 0)	(2, 0)
2 0			$F_{[1,1]_3[0]_2}^{[2]_6} \downarrow$	$A_{[2,1]_3[0]_2}^{[1-1]_6}$ –	(0, 1)
4 2			(4, 0)	(4, 0)	(4, 0)
4 1			–	$A_{[2,1]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \downarrow$ (2, 1)	(2, 1)
4 0			–	–	(0, 2)
6 3		(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)	(6, 0)
6 2	$A_{[0]_3[2]_2}^{[1-1]_6}$	–	(4, 1)	(4, 1)	(4, 1)
6 1	$\rightarrow$	–	–	(2, 2)	(2, 2)
6 0		–	–	–	(0, 3)
8 4	(8, 0)	(8, 0)	(8, 0)	(8, 0)	(8, 0)
8 3	–	(6, 1)	(6, 1)	(6, 1)	(6, 1)
8 2	–	–	(4, 2)	(4, 2)	(4, 2)
8 1	–	–	–	(2, 3)	(2, 3)
8 0	–	–	–	–	(0, 4)
...	...	...	...	...	...

Използването на еквивалентните квантови числа  $(\lambda, \mu)$ , които са свързани с  $N$  и  $T$  чрез (16.3), облекчава последната редукция до  $SO(3)$  представянията, които дефинират ъгловия момент  $L$  и неговата трета проекция  $M$ . Индексът на повторение  $K$  (показващ еквивалентните  $SO(3)$  НП, съдържащи се в дадено  $SU(3)$  НП), появяващ се в редукцията е свързан с проекцията на ъгловия момент  $L$  в системата, свързана с тялото и заедно с четността ( $\pi$ ) се използва за означаване на различните ивици ( $K^\pi$ ) в ротационните спектри на ядрата. Ние дефинираме четността на състоянията като  $\pi = (-1)^T$  [A19, B23]. Това ни позволява да описваме както положителни, така и отрицателни ивици.

### Енергетичен спектър

Съществуването на ядра със стабилни деформации беше осъзнато рано в историята на ядрената физика. Наблюдаването на големи квадруполни моменти доведе

до предположението, че някои ядра могат да имат елипсоидални форми, които бяха потвърдени от наблюдаването на ротационни ивици и измерването на техните свойства. За повечето деформирани ядра, разглеждането им като елипсоиди, които са симетрични по отношение на аксиалната ос и на отражение е адекватно за възпроизвеждането на спектроскопията на ивиците. Тъй като аксиално и рефлекторно симетричните форми на ядрата са инвариантни спрямо пространствена инверсия, то всички членове на дадена ротационна ивица имат една и съща положителна четност. Обаче, още при първото наблюдаване на състояния с отрицателна четност близо до основната ивица, възниква и идеята, че някои деформирани ядра могат да имат асиметрични, спрямо пространствена инверсия, форми на своята повърхност.

От друга страна, когато се появи нарушение на някаква симетрия, се очаква и ново поведение на многочастичната система. Така нарушаването на пространствената симетрия се свързва традиционно, със статична октуполна деформация, която се очаква да определя нови колективни свойства на ядрената система.

Интензивното изследване на структурата на ядра с нисколежащи състояния с отрицателна четност води до заключението, че докато рефлекторно асиметричните форми могат да играят роля в структурата на ивиците, те не са толкова стабилни както познатите квадруполни деформации. В ротационните спектри на някои четно-четни ядра от областта на редките земи и леките актиниди до основната ивица се наблюдава ивица с отрицателна четност, която се състои от състояния с  $J^\pi = 1^-, 3^-, 5^- \dots$ . Тази и основната ивици са отместени една спрямо друга, което означава че флукуациите на ядрената повърхност към пространствено симетрични форми трябва да са значителни. Присъствието на “октуполни” ивици за някои изотопи от областта на леките актиниди и редките земи е категорично, експериментално установено [292].

Съществуват много модели, които се опитват да опишат това поведение на нисколежащите състояния на деформираните ядра. В частност, голям успех имат алгебричните модели в основата на които лежат принципите на симетрия. Но за всички тези модели е характерно въвеждането на допълнителни октуполни степени на свобода.

Възможността за описание на състоянията с отрицателна четност чрез въвеждането на  $f$  бозон към стандартните  $s$  и  $d$  бозони на Модела на взаимодействащи бозони (МВБ) е за първи път спомената от Арима и Якело [41]. Предполагано е също [293], че включването на  $p$  бозон към  $s$ ,  $d$  и  $f$  бозоните може да играе важна роля при описанието на тези колективни състояния.

Метод на кохерентните състояния (МКС) беше приложен от Алонсо и сътрудници към  $spdf SU(3)$  хамилтониан с квадруполни и октуполни взаимодействия [294]. Неотдавна Радута и Йонеску [295] използват обобщение на МКС, в което се предполага,

че основната и октуполната ивици могат да бъдат разглеждани, като проектирани от едно и също деформирано вътрешно състояние, което притежава квадруполни и октуполни деформации.

Друг колективен модел, основан на точкови симетрии [197] също беше използван много успешно при описанието на енергетичните нива на основната и октуполната ивици. Той достатъчно точно възпроизвежда и нечетно-четния стагеринг между тези нива [296]. В този модел, октуполното поле е параметризирано чрез неприводимите представяния на октаедронната точкова група. Наскоро, слоест модел [297], асиметричен по отношение на отражение, интерпретира и възпроизведе много от основните характеристики на ротационните октуполни ивици до много високи ъглови моменти с помощта на вариационна процедура, комбинирана с проекционен метод. За пълнота ще споменем, че за описание на ивици с отрицателна четност от областта на актинидите, са използвани методи на кластеризация [298] или двукластерен модел [299]. Голямото разнообразие на модели и подходи, създадени за изследване на наблюдаваните нисколежащи ивици с отрицателна четност, илюстрира настоящия интерес и стремежа да се разбере причината за появяването на тези ивици.

Въвеждането на октуполни степени на свобода и присъствието на относително голям брой свободни параметри във всички тези модели позволява възпроизвеждането на експерименталните данни за енергиите на състоянията с отрицателна четност поне в областта на ниските спинове.

## 16.2 Приложение на МВВБ за описание на енергиите на основната и първата възбудена ивица с отрицателна четност

Ние ще използваме ротационната граница на МВВБ, в рамките на симплектичното ѝ разширение до  $Sp(12, R)$  за описанието на наблюдаваните основната и октуполна ивица в четно-четните ядра. Това значи, че моделният хамилтониан се изразява чрез операторите на Казимир от първи и втори ред на различните подгрупи във веригата (16.1) по следния начин:

$$H = aN + \alpha_6 K_6 + \alpha_3 K_3 + \beta_3 \pi_3 + \alpha_1 K_1, \quad (16.13)$$

където където  $K_n$  са квадратичните инвариантни оператори на  $U(n)$  групите, а  $\pi_3$  е операторът на Казимир от втори ред на  $SO(3)$ . В резултат на връзките (15.15) и (16.3), операторът на Казимир на  $SU(3)$  със собствена стойност  $(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu)$  може да се изрази чрез операторите  $N$  и  $T^2$ , като приема вида

$$H = aN + bN^2 + \alpha_3 T^2 + \beta_3 \pi_3 + \alpha_1 T_0^2, \quad (16.14)$$

и е очевидно диагонален в базиса (16.4) маркиран чрез квантовите числа на подгрупите от веригата (16.1). Неговите собствени стойности са енергиите на базисните

състояния на бозонните представяния на  $Sp(12, R)$ :

$$E((N, T), L, T_0) = aN + bN^2 + \alpha_3 T(T + 1) + \beta_3 L(L + 1) + \alpha_1 T_0^2. \quad (16.15)$$

Енергията на основното състояние  $|0\rangle$  на системата е очевидно 0.

Тук ще представим приложението на изложената по-горе теория, за описание на най-ниските ивици с положителна и отрицателна четност [289]. Целта ни е да достигнем състоянията с по-високи ъглови моменти и за двата типа ивици. Приложението на модела е направено за четно-четни деформирани ядра, в спектъра, на които до основната ивица се наблюдава нисколежаща ивица с отрицателна четност, традиционно разглеждана като октуполна [292]. За да можем да направим това, първо трябва да идентифицираме състоянията от тези експериментално наблюдавани ивици с поредици от базисни състояния от четното представяне на  $Sp(12, R)$  дадени в Таблица 16.1.

### 16.2.1 Алгебрична дефиниция за ираст ивици

В рамките на симплектичното разширение на бозонните представяния на запазващата броя на бозоните  $U(6)$  симетрия, ние сме в състояние да разглеждаме състоянията с всички четни стойности на броя на бозоните  $N$  и съответната им съвкупност от възможни “псевдоспинове”  $T = N/2, N/2 - 1, \dots, 0$ . По този начин се получава безкрайна съвкупност от състояния като е особено важно да се въведе критерий за подбирането на тези от тях, които имат подобаваща физически смислена интерпретация. По тази причина ние въвеждаме понятието “ираст” състояния, като го дефинираме от алгебрична гледна точка, в съответствие с използвания алгебричен подход.

Този подход се базира на факта, че енергиите (16.15) растат с увеличаването на  $N$ . Ние дефинираме енергията на всяко състояние с дадено  $L$  като “ираст” енергия по отношение на  $N$  в двете разглеждани ивици. Избираме мултиплетите  $(0, \mu)$  на  $SU(3)$  за описание на основната ивица, докато за октуполната ивица са използвани мултиплетите  $(2, \mu - 1)$ . В термини на  $(N, T)$  този избор съответства на  $(N = 2\mu, T = 0)$  за положителната ( $K^\pi = 0^+$ ) и  $(N = 2\mu + 2, T = 1)$  за отрицателната ( $K^\pi = 0^-$ ) ивици, съответно. От правилата за редукция и от ираст условието следва, че техните минимални стойности се получават при  $N = 2L$  за основната ивица, и при  $N = 2L + 2$  за октуполната ивица. По този начин, за описанието на основната ивица нашият избор съответства на последователността от състояния с различен брой на бозоните  $N = 0, 4, 8, \dots$  и “псевдоспин”  $T = 0$ , лежащи в колоната  $T_0 = 0$  на Таблица 16.1. Аналогично, за описанието на ивицата с отрицателна четност, ние избираме съвкупността от състояния с квантови числа  $N = 8, 12, 16, \dots$  и  $T = 1$  от същата колона  $T_0 = 0$ . В така дефинираните  $SU(3)$  представяния за всяко  $N$  максималната стойност на  $L$  се появява за първи път (вж. Таблица 16.1).

Таблица 16.2: Стойности на параметрите на хамилтониана (16.14) при фитиране на собствените му стойности към съответните им експериментални енергии от основната и октуполна ивица в изброените ядра.

Nucleus	$n_s$	$a$	$b$	$\alpha_3$	$\beta_3$
Ra <sup>224</sup>	13	0.0119	-0.0022	0.0789	0.0155
Ra <sup>226</sup>	18	0.0269	-0.0005	0.0226	0.0060
Th <sup>222</sup>	26	0.0558	0.0000	-0.0557	0.0030
Th <sup>224</sup>	18	0.0242	-0.0011	0.0362	0.0100
Th <sup>226</sup>	20	0.0194	-0.0009	0.0522	0.0094
Th <sup>228</sup>	18	0.0092	-0.0020	0.1470	0.0138
Th <sup>232</sup>	29	0.0155	-0.0021	0.3244	0.0128
U <sup>234</sup>	19	0.0124	-0.0010	0.3608	0.0085
U <sup>236</sup>	25	0.0154	-0.0010	0.2846	0.0086
U <sup>238</sup>	27	0.0142	-0.0016	0.2851	0.0110
Yb <sup>168</sup>	41	0.0235	-0.0056	0.6512	0.0295
Sm <sup>152</sup>	15	0.0194	-0.0045	0.4290	0.0274

Предвид съответствието, направено по-горе между базисните състояния и експерименталните данни на основната и октуполната ивици ( $T_0 = 0$ ), последният член от формулата за енергиите (16.15) изчезва. Моделните феноменологични параметри  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha_3$  и  $\beta_3$  са определени чрез напасване към експерименталните данни [92]. Техните стойности, получени за някои четно-четни деформирани ядра от областта на леките актиниди и редките земи, са дадени в Таблица 16.2. Във втората колона е даден броят на експерименталните състояния, използвани във фитиращата процедура.

Съгласието между теоретичните стойности, получени само с помощта на четирите моделни параметри, и експерименталните данни за някои от разгледаните ядра е илюстрирано на Фигура 16.1 и е много добро.

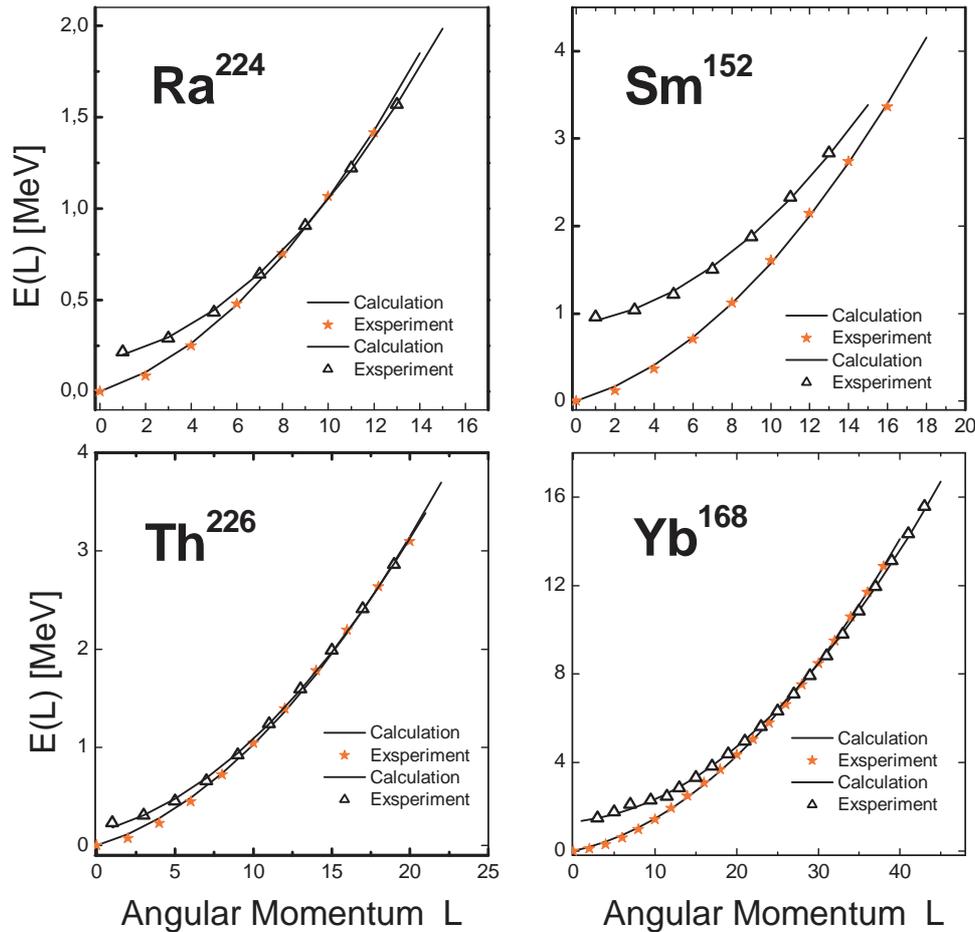
Прилагайки “ираст” условията ( $N = 2L$  и  $N = 2L + 2$  съответно), свързващи  $N$  и  $L$ , енергиите (16.15) за основната ивица могат да се представят чрез

$$E_T(L) = \beta L(L + 1) + \gamma L, \quad (16.16)$$

докато енергиите за ивицата с отрицателна четност съответно чрез

$$E_T(L) = \beta L(L + 1) + (\gamma + \eta)L + \xi. \quad (16.17)$$

Новите параметри  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  и  $\xi$  са свързани със старите, дадени в Таблица 3.2, по



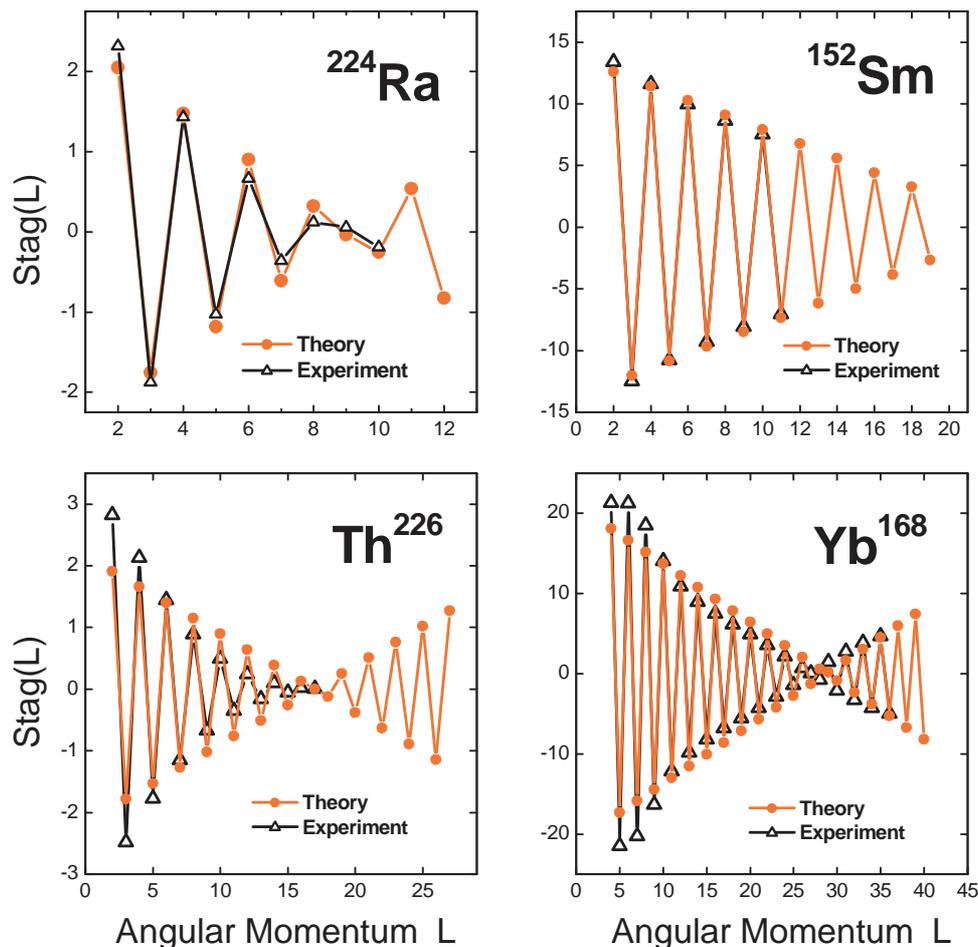
Фигура 16.1: Сравнение между експерименталните енергии (*Experiment*) и нашите пресмятания (*Theory*), използвайки стойностите на моделните параметри дадени в Таблица 16.2 за основната и октуполната ивици на ядрата  $Ra^{224}$ ,  $Sm^{152}$ ,  $Th^{226}$ ,  $Yb^{168}$ .

следния начин

$$\beta = 4b + \beta_3, \quad \gamma = 2a - 4b, \quad \eta = 8b, \quad \xi = 4b + 2\alpha_3. \quad (16.18)$$

Както може да се види от уравнения (16.16) и (16.17), стойностите на параметрите  $\beta$  и  $\gamma$  могат се определят само чрез фитиране на енергиите на положителната ивица, докато  $\eta$  и  $\xi$  са определени от енергиите на ивицата с отрицателна четност, съответно. Стойностите на параметрите (16.18) определят поведението на енергиите на двете ивици, както и взаимното положение на едната ивица спрямо другата. В някои случаи ( $^{232}\text{Th}$ ,  $^{234}\text{U}$ ,  $^{236}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ), двете ивици са почти успоредни и разстоянието между тях зависи от параметъра  $\xi$ . Когато двете ивици са много близко, те взаимодействат посредством  $L$ -члена, като силата на взаимодействието се определя от коефициента  $(\gamma + \eta)$ .

В резултат на теоретичните разглеждания, получаваме прости формули за енер-



Фигура 16.2: Сравнение между експерименталните енергии (*Experiment*) и нашите пресмятания (*Theory*) на стагеринг функцията  $Stag(L) = \Delta^5(L)$  (16.19) за енергиите на основната и октуполна ивица  $\Delta L = 1$  на ядрата  $\text{Ra}^{224}$ ,  $\text{Sm}^{152}$ ,  $\text{Th}^{226}$  и  $\text{Yb}^{168}$ .

гии на състоянията. Анализирайки уравнения (16.16) и (16.17), виждаме че в собствените енергии на най-ниските ивици с положителна и отрицателна четност имаме класическите ротационни  $L(L + 1)$  и вибрационни  $L$  приноси (моди). Ротационното взаимодействие в двете ивици е с еднаква сила, зададена от параметъра  $\beta$ . Получените стойности за  $\eta$  са винаги отрицателни, което означава че ивицата с отрицателна четност е по-малко вибрационна в сравнение с основната ивица.

### 16.2.2 Четно-нечетен стагеринг между състоянията от двете ивици

В колективните ротационни спектри на разгледаните деформирани четно-четни ядра в дадената масова област се наблюдават някои фини ефекти като бекбендинг (back-bending) и стагеринг в поведението на енергиите на състоянията и от двете ивици. Четно-нечетен стагеринг между енергиите на състоянията от основната и октуполната ивица беше изследван наскоро [296]. Като по-нататъшна проверка на

приложимостта на МВВБ, ние изследваме получените енергии чрез стагеринг функцията дефинирана като [300]:

$$Stag(L) = 6\Delta E(L) - 4\Delta E(L - 1) - 4\Delta E(L + 1) + \Delta E(L + 2) + \Delta E(L - 2), \quad (16.19)$$

където  $\Delta E(L) = E(L) - E(L - 1)$  задава разликата в енергиите на съседните четни и нечетни състояния. Функцията (16.19) представлява крайна разлика от четвърти ред по отношение на  $\Delta E(L)$  или от пети ред по отношение на енергиите  $E(L)$  (16.15). Тя характеризира отклонението на реално наблюдаваното ротационното поведение на ивиците от това на твърд ротатор. Теоретичните и експериментални стагеринги за някои от разгледаните ядра са показани на Фигура 16.2. Вижда се доброто съгласие с експеримента, както и наблюдаваните “биения” в поведението на стагерингите. Последните се наблюдават в областта, където взаимодействието между двете ивици е най-силно, или там където двете ивици се пресичат (вж. Фигура 16.1). Замествайки изразите (16.16) и (16.17) в (16.19), може да се види, че стагеринг функцията зависи от  $\eta L$ . Точното възпроизвеждане на експерименталните стагеринги е заради този член, който може да се интерпретира като взаимодействие между основната и октуполната ивици. Следователно, успехът на модела при описанието на “биенията” в  $\Delta L = 1$  стагеринга е резултат от въведеното понятие за “иращ” енергии в рамките на симплектичното разширение на Модела на взаимодействащи векторни бозони.

Симплектичното разширение на Модела на взаимодействащите векторни бозони позволява по-богата класификация на състоянията отколкото неговата унитарна версия и дава възможност за разглеждане и на други колективни ивици. Изобщо моделът демонстрира, че е подходящ за описание на разнообразни характеристики на колективната ядрена структура.

## 17. Матрични елементи на операторите на преход в симплектичното разширение на МВВБ

В алгебричните модели използването на динамични симетрии, дефинирани чрез определена редица от подгрупи на групата на динамична симетрия, дава възможност за получаване на точни аналитични решения на проблема за собствените стойности и собствените функции на моделния хамилтониан, който е построен от инвариантните оператори на подгрупите от редицата.

Нещо повече, има много проста и директна методика за пресмятането на матричните елементи на операторите на преход между базисните състояния на хамилтониана, тъй като и базисните състояния и операторите могат да се дефинират като тензорни оператори по отношение на разглежданата динамична симетрия. Тогава пресмятането на матричните елементи се опростява чрез използването на подходящо обобщена версия на теоремата на Wigner-Eckart. По дефиниция тези матрични елементи дават вероятностите за преход между базисните състояния на хамилтониана. Сравнението на експерименталните данни с пресметнатите вероятности за преход е една от най-добрите проверки на валидността на разглеждания алгебричен модел. Отличните резултати получени за енергетичния спектър, при разширяването на групата на динамична симетрия  $U(6)$  до некомпактната  $Sp(12, R)$ , изискват по-нататъшно потвърждение от възпроизвеждането на вероятностите за преход в рамките на симплектичното разширение на МВВБ. С тази цел ние изследваме тензорните свойства на генераторите на алгебрата на  $Sp(12, R)$  по отношение на редукционната редица (16.1), спрямо която са класифицирани и базисните състояния (вж. Таблица 16.1). Така ние получаваме възможност да определим операторите на преход между базисните състояния и после да получим техните матрични елементи аналитично.

### 17.1 Тензорни свойства на генераторите на групата $Sp(12, R)$ и на базиса $\mathfrak{h}$

В Глава 15 [A18], вече бяха формулирани тензорните свойства на основните “строителни блокове” на МВВБ [A18] на операторите на раждане и унищожение на векторните бозони (15.5) които се разглеждат като компоненти на 6–мерни вектори, преобразуващи се по фундаменталните  $U(6)$  представяния  $[1]_6$  и  $[1]_6^*$ , съответно. Те-

зи неприводими представяния стават приводими във веригата от подгрупи (16.1), дефинираща динамичната симетрия. Това означава, че заедно с квантовото число, характеризиращо представянията на  $U(6)$ , операторите се характеризират също с квантовите числа на подгрупите в (16.1). Единственото възможно представяне на прякото произведение  $U(3) \otimes U(2)$ , принадлежащо на представянето  $[1]_6$  на  $U(6)$  е  $[1]_3 \times [1]_2$  (16.2), т. е.  $[1]_6 = [1]_3 \cdot [1]_2$ . Според правилата за редукция за  $U(3) \supset O(3)$  (16.12), представянето  $[1]_3$  на  $U(3)$  съдържа представянето  $(1)_3$  на групата  $O(3)$ , даващо ъгловия момент на бозоните  $l = 1$  (с проекция  $m = 0, \pm 1$ ). Представянето  $[1]_2$  на  $U(2)$  дефинира “псевдоспина” на бозоните  $T = \frac{1}{2}$ , чиято проекция се задава от съответното представяне на  $(U(1) \times U(1))$ , т. е.  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ . Генераторите на симплектичната група  $Sp(12, R)$  бяха изразени като двойни тензорни оператори [A23], отчитайки и  $U(2) \supset U(1)$  редукцията (15.8a) и (15.8б). По-нататък те могат да бъдат дефинирани като неприводими тензорни оператори относно цялата верига от подгрупи (16.1) и изразени чрез (15.8a) и (15.8б)

$$A_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 LM} = C_{[1]_3[1]_2}^{[1]_6} \frac{[\chi]_6}{[1]_3^* [1]_2^*} C_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[1]_3 [1]_3^* [\lambda]_3} A_{TT_0}^{LM}, \quad (17.1)$$

$$F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 LM} = C_{[1]_3[1]_2}^{[1]_6} \frac{[\chi]_6}{[1]_3 [1]_2} C_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[1]_3 [1]_3 [\lambda]_3} F_{TT_0}^{LM}, \quad (17.2)$$

$$G_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 LM} = C_{[1]_3^* [1]_2^*}^{[1]_6} \frac{[\chi]_6}{[1]_3^* [1]_2^*} C_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[1]_3^* [1]_3^* [\lambda]_3} G_{TT_0}^{LM}, \quad (17.3)$$

където според лемата на Рака [301], коефициентите на Клебш-Гордон относно веригата се факторизират чрез изоскаларните фактори (ИФ), дефинирани за всяка стъпка на разложението (16.1). Ще посочим [302], че  $U(6) - C_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6}$  и  $U(3) - C_{(l_1)_3 (l_2)_3 (L)_3}^{[\lambda]_3}$  ИФ, влизащи в (17.1), (17.2) и (17.3) са равни на  $\pm 1$ .

Тензорите (17.1) се преобразуват по прякото произведение  $[\chi]_6$  на съответните  $U(6)$  представяния  $[1]_6$  и  $[1]_6^*$ , а именно [302]

$$[1]_6 \times [1]_6^* = [1, -1]_6 + [0]_6, \quad (17.4)$$

където  $[1, -1]_6 = [2, 1, 1, 1, 1, 0]_6$  и  $[0]_6 = [1, 1, 1, 1, 1, 1]_6$  е скаларното  $U(6)$  представяне. По-нататък умножаваме двете спрегнати фундаментални представяния на  $U(3) \times U(2)$

$$\begin{aligned} [1]_3 [1]_2 \times [1]_3^* [1]_2^* &= ([1]_3 \times [1]_3^*) ([1]_2 \times [1]_2^*) \\ &= ([210]_3 \oplus [1, 1, 1]_3) \times ([2, 0]_2 \oplus [1, 1]_2) \\ &= [210]_3 [2]_2 \oplus [210]_3 [0]_2 \oplus [0]_3 [2]_2 \oplus [0]_3 [0]_2. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Очевидно първите три  $U(3) \times U(2)$  НП, получени от умножението (17.5) принадлежат на  $[1, -1]_6$  на  $U(6)$ , а последното към  $[0]_6$ . Използвайки въведените по-горе означения  $u_i^+(\frac{1}{2}) = p_i^\dagger$  и  $u_i^+(-\frac{1}{2}) = n_i^+$ , скаларният оператор

$$A_{[0]_3[0]_2}^{[0]_6} \begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix} = \widehat{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m C_{1m1-m}^{00} (p_m^\dagger p_{-m} + n_m^\dagger n_{-m}) \quad (17.6)$$

има физическият смисъл на оператора на пълния брой на бозоните  $\hat{N} = \hat{N}_p + \hat{N}_n$ , където  $\hat{N}_p = \sum p_m^\dagger p_m$ ,  $\hat{N}_n = \sum n_m^\dagger n_m$  и очевидно е първият инвариант на всички унитарни групи  $U(6), U(3)$  и  $U(2)$ . Следователно, той ги редуцира до унимодуларните подгрупи  $SU(6), SU(3)$  и  $SU(2)$ . Нещо повече, както беше споменато инвариантният оператор  $(-1)^N$  разбива пространството  $\mathcal{H}$ , в което действат генераторите на алгебрата  $sp(12, R)$ , на четно  $\mathcal{H}_+$  с  $N = 0, 2, 4, \dots$  и нечетно  $\mathcal{H}_-$  с  $N = 1, 3, 5, \dots$  подпространства на бозонните представяния на  $Sp(12, R)$  [6].

В означения на Elliott [38]  $[\lambda]_3 \equiv (\lambda, \mu)$ , където  $\lambda = n_1 - n_2$  и  $\mu = n_2 - n_3$ , имаме  $[210]_3 = (1, 1)$  и  $[0]_3 = (0, 0)$ . Съответните стойности на  $L$  според правилата на редукция за  $SU(3) \supset O(3)$  са  $L = 1, 2$  в неприводимото представяне  $(1, 1)$  и  $L = 0$  в  $(0, 0)$ . Стойностите на  $T$  са 1 и 0 за  $U(2)$  НП  $[2]_2$  и  $[0]_2$  съответно. Оттук следва, че  $U(2)$  НП в прякото произведение различават еквивалентните  $U(3)$  НП, които се появяват в редукцията  $U(6) \subset U(3) \otimes U(2)$  и няма израждане. Тензорите с  $T = 0$  съответстват на  $SU(3)$  генераторите

$$A_{[210]_3[0]_2}^{[1-1]_6} \quad 1M \quad 00 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,k} C_{1m1k}^{1M} (p_m^\dagger p_k + n_m^\dagger n_k) \quad (17.7)$$

$$A_{[210]_3[0]_2}^{[1-1]_6} \quad 2M \quad 00 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,k} C_{1m1k}^{2M} (p_m^\dagger p_k + n_m^\dagger n_k) \quad (17.8)$$

представляващи компонентите на операторите на ъгловия  $L_M$  (17.7) и Elliott-овия квадруполен  $Q_M$  (17.8) моменти.

Тензорите

$$\begin{aligned} A_{[0]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad 00 \quad 11 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_m p_m^\dagger n_{-m} \sim T_1, \\ A_{[0]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad 00 \quad 1-1 &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_m n_m^\dagger p_{-m} \sim T_{-1} \end{aligned} \quad (17.9)$$

$$A_{[0]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad 00 \quad 10 = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \sum_m (p_m^\dagger p_{-m} - n_m^\dagger n_{-m}) \sim T_0,$$

съответстват на  $SU(2)$  генераторите, които са пропорционални на компонентите на оператора на псевдоспина  $\hat{T}$ . И накрая, тензорите

$$A_{[210]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad LM \quad 11 = \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} p_m^\dagger n_k, \quad (17.10)$$

$$A_{[210]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad LM \quad 1-1 = \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} n_m^\dagger p_k \quad (17.11)$$

и

$$A_{[210]_3[2]_2}^{[1-1]_6} \quad LM \quad 10 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} (p_m^\dagger p_k - n_m^\dagger n_k), \quad (17.12)$$

с  $L = 1, 2$  и  $M = -L, -L + 1, \dots, L$  разширяват алгебрата на  $U(3) \times U(2)$  до тази на  $U(6)$ .

Аналогично, тензорите (17.2) и (17.3) се преобразуват по [302]

$$[1]_6 \times [1]_6 = [2]_6 + [1, 1]_6, \quad (17.13)$$

и

$$[1]_6^* \times [1]_6^* = [-2]_6 + [-1, -1]_6,$$

съответно. Но тъй като базисните състояния на МВВБ са напълно симетрични, разглеждаме само напълно симетричните  $U(6)$  представяния  $[2]_6$  и  $[-2]_6$  на операторите (17.2) и (17.3). Тъй като двата оператора  $F$  и  $G$  са взаимно спрегнати, т. е.  $(F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6}{}_{TT_0}^{LM})^+ = (-1)^{\lambda+\mu+L-M+T-T_0} G_{[\lambda]_3^*[2T]_2^*}^{[\chi]_6^*}{}_{T-T_0}^{L-M}$ , ще разгледаме само разложения на тензорите  $F$ . Според правилата на редукция за напълно симетричните  $U(6)$  неприводими представяния (16.2) [290], за водещото представяне  $[2]_6$  имаме

$$[2]_6 = [2]_3[2]_2 + [1, 1]_3[0]_2 = (2, 0)[2]_2 + (0, 1)[0]_2 \quad (17.14)$$

които съдържат по-нататък в  $(2, 0)$   $L = 0, 2$  с  $T = 1$  и в  $(0, 1)$  -  $L = 1$  с  $T = 0$ . Техните експлицитни изрази чрез операторите на раждане  $p_i^\dagger, n_i^\dagger$  и унищожение  $p_i, n_i$  ( $i = 0, \pm 1$ ) са:

$$\begin{aligned} F_{[2]_3[2]_2}^{[2]_6}{}_{11}^{LM} &= \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} p_m^\dagger p_k^\dagger, \\ F_{[2]_3[2]_2}^{[2]_6}{}_{1-1}^{LM} &= \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} n_m^\dagger n_k^\dagger \end{aligned} \quad (17.15)$$

$$F_{[2]_3[2]_2}^{[2]_6}{}_{10}^{LM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} (p_m^\dagger n_k^\dagger - n_m^\dagger p_k^\dagger), \quad (17.16)$$

$$F_{[1,1]_3[0]_2}^{[2]_6}{}_{00}^{LM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,k} C_{1m1k}^{LM} (p_m^\dagger n_k^\dagger + n_m^\dagger p_k^\dagger) \quad (17.17)$$

Тези оператори и техните спрегнати променят броят на бозоните с две и реализират симплектичното разширение на алгебрата на  $U(6)$ . По този начин изчерпахме всички неприводими тензорни оператори относно (16.1), които съответстват на инфинитезималните оператори на алгебрата на  $Sp(12, R)$ .

По-нататък могат да се въведат тензорните произведения [A22]

$$\begin{aligned} T_{[\lambda]_3[2T]_2}^{([\chi]_6[\chi_2]_6)}{}_{TT_0}^{\omega[\chi]_6}{}_{LM} &= \sum T_{[\lambda_1]_3[2T_1]_2}^{[\chi_1]_6}{}_{T_1(T_0)_1}^{L_1M_1} T_{[\lambda_2]_3[2T_2]_2}^{[\chi_2]_6}{}_{T_2(T_0)_2}^{L_2M_2} \times \\ &C_{[\lambda_1]_3[T_1]_2}^{[\chi_1]_6}{}_{[\lambda_2]_3[T_2]_2}^{[\chi_2]_6}{}_{[\lambda]_3[2T]_2}^{\omega[\chi]_6} C_{(L_1)_3}^{[\lambda_1]_3}{}_{(L_2)_3}^{[\lambda_2]_3}{}_{(L)_3}^{[\lambda]_3} C_{M_1}^{L_1}{}_{M_2}^{L_2}{}_{M}^L C_{(T_0)_1}^{T_1}{}_{(T_0)_2}^{T_2}{}_{T_0}^T \end{aligned} \quad (17.18)$$

на два тензорни оператора  $T_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6}{}_{TT_0}^{LM}$ , които са също тензори относно разглежданата верига (16.1). Ще използваме (17.18), за да получим тензорните свойства на

операторите в обвиващата алгебра на  $Sp(12, R)$ , съдържащи произведения на генераторите на симплектичната алгебра. Произведенията от втора степен влизат в двучастичното взаимодействие на феноменологичния хамилтониан на тази граница [302]. В частност, нас ще ни интересуват операторите на преход между състояния, различаващи се с четири бозона  $T_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[4]_6 \quad LM}$ , изразени като произведения на два оператора от вида  $F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[2]_6 \quad LM}$ . Използвайки разлагането (16.2) и правилата на редукция във веригата (16.1) в Таблица 17.1 сме дали всички представяния на подгрупите на веригата, които задават трансформационните свойства на резултантните тензори [A22].

Таблица 17.1: Тензорни произведения на два повишаващи оператори.

$[2]_6$ $[\lambda_1]_3[2T_1]_2$	$[2]_6$ $[\lambda_2]_3[2T_1]_2$	$[4]_6$ $[\lambda]_3[2T]_2$	$O(3)$ K; L	$U(2)$ T	$U(1)$ $T_0$
$(2, 0)[2]_2$	$(2, 0)[2]_2$	$(4, 0)[4]_2$	0; 0, 2, 4	2	$0, \pm 1, \pm 2$
$(2, 0)[2]_2$	$(0, 1)[0]_2$	$(2, 1)[2]_2$	1; 1, 2, 3	1	$0, \pm 1$
$(0, 1)[0]_2$	$(0, 1)[0]_2$	$(0, 2)[0]_2$	0; 0, 2	0	0

Базисните състояния в  $\mathcal{H}_+$  се получават също като симетризиращи тензорни произведения от различна степен на тензорните оператори  $F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[2]_6 \quad LM}$ .

За да се изясни ролята на тензорните оператори, въведени в предния параграф, като оператори на преход и за да се опрости пресмятането на техните матрични елементи, трябва да бъде отчетена и симетрията на базиса в Хилбертовото пространство относно веригата от подгрупи (16.1). От (17.15) - (17.17) се вижда, че базисните състояния на МВВБ в подпространството  $\mathcal{H}_+$  ( $N$ -четно) на бозонните представяния на  $Sp(12, R)$  могат да бъдат получени чрез последователното действие на повишаващите оператори  $F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[2]_6 \quad LM}$  върху бозонното вакуумно (основно) състояние  $|0\rangle$ , за което са изпълнени  $G_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 \quad LM} |0\rangle = 0$  и  $A_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 \quad LM} |0\rangle = 0$ .

Така, по принцип базисът за разглежданата динамична симетрия на МВВБ може да се построи чрез действието на симетрично свързаните тензорни произведения (17.18) на повишаващите тензори  $F_{[\lambda_i]_3[2T_i]_2}^{[2]_6 \quad L_i M_i}$ , т. е.  $[F \times \dots \times F]_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[\chi]_6 \quad LM}$ . Ще отбележим, че само напълно симетричните тензорни произведения  $[\chi]_6 \equiv [N]_6$  са различни от нула, тъй като повишаващите оператори комутират помежду си. Възможните  $U(3)$  свързвания се номерират чрез съвкупността  $[\lambda]_3 = \{[n_1, n_2, 0] \equiv (n_1 - n_2, n_2); n_1 \geq n_2 \geq 0\}$ . В термини на  $(\lambda, \mu)$ ,  $SU(3)$  съдържащието на  $U(6)$  симетричния тензор  $[N]_6$  се определя чрез  $\lambda = n_1 - n_2, \mu = n_2$ . Броят на копията на оператора  $F$  в симетричното тензорно произведение  $[N]_6$  е  $N/2$ , където  $N = n_1 + n_2 = \lambda + 2\mu$  [A19]. Всеки повишаващ оператор ще увеличава броя на бозоните  $N$  с два. Означаваме резултантния безкраен базис с  $[[N](\lambda, \mu); KLM; TT_0]$

(16.4), където  $KLM$  са квантовите числа на неортонормирания базис на НП  $(\lambda, \mu)$ .

На Таблица 16.1 е дадена  $Sp(12, R)$  класификационната схема за бозонните  $SU(3)$  представяния, получени чрез прилагането на правилата на редукция [A19] за НП на веригата (16.1) за четните стойности на броя на бозоните  $N$ . Допълнително сме илюстрирали действието на различните тензорни оператори, като вече става ясно кои от тях са оператори на преход между  $SU(3)$  векторите на базиса, подредени в класификационната схема, представена на Таблица 16.1. Операторите  $F_{[\lambda]_3[2T]_2}^{[2]_6 LM}$  с  $T_0 = 0$  (17.17) дават преходите между две съседни клетки от една и съща колона ( $\downarrow$ ), докато операторите с  $T_0 = \pm 1$  променят също и колоната ( $\swarrow$ ). Тензорите  $A_{[2,1]_3[0]_2}^{[1-1]_6}$  (17.7) и (17.8), които съответстват на  $SU(3)$  генераторите не променят  $SU(3)$  представянията  $(\lambda, \mu)$ , но могат да променят ъгловия момент  $L$  ( $\implies$ ) вътре в тях.  $SU(2)$  генериращите тензори  $A_{[0]_3[2]_2}^{[1-1]_6}$  (17.9) променят проекцията  $T_0$  на “псевдоспина”  $T$  и по този начин различават еквивалентните  $SU(3)$  НП, принадлежащи на различните колони на един и същ ред на Таблица 16.1. Вътре в дадена клетка, преходът между различните  $SU(3)$  НП ( $\Downarrow$ ) се реализира чрез операторите  $A_{[2,1]_3[2]_2}^{[1-1]_6}$  (17.10), (17.11) и (17.12), които представляват  $U(6)$  генераторите. Във физическите приложения, където на последователност от колективни състояния, принадлежащи на различни ивици в ядрените спектри се приписва дадена последователност от  $SU(3)$  вектори, могат да се дефинират подходящи оператори на преход, изразени като подходяща комбинация от разгледаните тензорните оператори.

## 17.2 Матрични елементи на операторите на преход

Матричните елементи на операторите от обвиващата алгебра на  $Sp(12, R)$  могат да бъдат пресметнати по няколко начина. Пряк начин е да се използват  $Sp(12, R)$  комутационните съотношения [A18] за получаването на рекурентни връзки. Друг начин е да се стартира от приближен матричен елемент последователно менейки матричните елементи, докато се получат точните комутационни съотношения [303]. Третият метод е да се използва теорията [A23, 304] на векторните кохерентни състояния (ВКС), за да се изразят матричните елементи чрез известните матрични елементи на по-простата алгебра на Weyl.

В тази глава, обаче ние ще използваме друга техника [A22] за пресмятането на матричните елементи на алгебрата на  $Sp(12, R)$ , базираща се на факта, че представянията на  $SU(3)$  подгрупата на МВВБ са построени с помощта на два вида векторни бозони, което е в известен смисъл по-просто, отколкото построяването на  $SU(3)$  представянията в МВБ [41] и  $Sp(6, R)$  симплектичния модел [305].

В предните параграфи, ние изразихме  $Sp(12, R)$  генераторите  $F_{TT_0}^{LM}$ ,  $G_{TT_0}^{LM}$ ,  $A_{TT_0}^{LM}$  и базисните състояния като компоненти на неприводими тензори относно редукцион-

ната верига (16.1). По такъв начин за пресмятането на техните матрични елементи може да се използва обобщена теорема на Wigner-Eckart в две последователни стъпки. За  $SU(3) \rightarrow SO(3)$  и  $SU(2) \rightarrow U(1) \times U(1)$  редукциите се нуждаем само от стандартните  $SU(2)$  коефициенти на Clebsch-Gordan (ККГ)

$$\begin{aligned} \langle [N'](\lambda', \mu'); K' L' M'; T' T'_0 | T_{[\lambda]_3 [2t]_2}^{[\chi]_6}{}^{lm} | [N](\lambda, \mu); K L M; T T_0 \rangle = \\ = \langle [N'](\lambda', \mu'); K' L' | | T_{[\lambda]_3 [2t]_2}^{[\chi]_6} | | [N](\lambda, \mu); K L \rangle C_{LMlm}^{L'M'} C_{TT_0 t t_0}^{T'T'_0}. \end{aligned} \quad (17.19)$$

За пресмятането на “двойно” приведения матричен елемент в (17.19), означен с две вертикални линии, използваме следното представяне [306]:

$$\begin{aligned} \langle [N'](\lambda', \mu'); K' L' | | T_{[\lambda]_3 [2t]_2}^{[\chi]_6}{}^{lm} | | [N](\lambda, \mu); K L \rangle = \\ = \langle [N'](\lambda', \mu') | | | T_{[\lambda]_3 [2t]_2}^{[\chi]_6} | | | [N](\lambda, \mu) \rangle C_{KL}^{(\lambda, \mu)}{}_{(L)_3}{}_{K'L'}{}^{(\lambda', \mu')} \end{aligned} \quad (17.20)$$

където  $C_{KL}^{(\lambda, \mu)}{}_{(L)_3}{}_{K'L'}{}^{(\lambda', \mu')}$  са приведените  $SU(3)$  ККГ, които са известни в аналитичен вид за някои специални случаи [307–310] и има създадени компютърни кодове за тяхното числено пресмятане [122, 311, 312]. Следователно, за пресмятането на матричните елементи (17.19) на  $Sp(12, R)$  операторите са необходими само техните “тройно” приведени матрични елементи. За да можем да пресметнем последните, използваме полученото в Глава 16 действие на операторите на раждане  $p_m^\dagger, n_m^\dagger$  върху и унищожение  $p_m, n_m$  на векторните бозони върху ортонормалния базис (16.5), който е директно свързан със симетрично адаптирания по разглежданата редукция базис (16.4). Получените [A22] изрази за това действие (16.8), (16.9), (16.10) и (16.11) съответстват на “тройно” приведените матрични елементи в (17.20), тъй като те зависят само от  $U(6) \rightarrow SU(3)$  квантовите числа. Те са много прости и полезни, тъй като се получава само едно единствено крайно състояние. Експлицитно представените в §17.1  $Sp(12, R)$  генератори, изразени като тензорни оператори чрез билинейните произведения на  $p_i^\dagger, n_i^\dagger, p_i$  и  $n_i$ , могат да бъдат разглеждани като куплирани  $U(6) \rightarrow SU(3)$  тензори (17.18) и техните матрични елементи могат да бъдат пресметнати, използвайки (16.8), (16.9), (16.10) и (16.11), където състоянието получено от действието на бозонните операторите е междинно [306].

Така е придобито полезно математическо средство, което дава възможност за бъдещи по-широки приложения на МВВБ при описание на колективните характеристики на ядрените системи. Нещо повече, ние се надяваме, че това изследване ще допринесе и за по-задълбоченото разбиране на физическия смисъл на математическите структури в основата на модела и за по-точното определяне на неговите граници на приложимост.

### 17.3 В(E2)вероятности за преход в основната и октуполната ивици

След успешното описание на енергиите на основната и октуполната ивица до много високи спинове, както и доброто възпроизвеждане на финните ефекти на четно-нечетния стагеринг между тях в рамките на всички представянията на определената от компактната  $U(6)$  [A19] динамична симетрия на МВВБ, естествено развитие на теорията е да се проверят нейните възможности за описание на вероятностите за преход между състоянията от тези колективни ивици. Вероятностите за преход се дават по дефиниция от матричните елементи на операторите на преход  $T^{E2}$  между  $|i\rangle$ -началното (initial) и  $|f\rangle$ -крайно (final) колективни състояния

$$B(E2; L_i \rightarrow L_f) = \frac{1}{2L_i + 1} |\langle f || T^{E2} || i \rangle|^2. \quad (17.21)$$

При определянето на енергиите на основната и октуполната [A19, B23] ивица в Глава 16, за първата използвахме базисни състояния, определени чрез  $SU(3)$  мултиплетите  $(0, \mu)$ , докато на ивицата с отрицателна четност бяха приписани състоянията от  $SU(3)$  мултиплетите  $(2, \mu - 1)$ . В термини на  $(N, T)$  този избор отговаря на  $(N = 2\mu, T = 0)$ ,  $N = 2L = 0, 4, 8, \dots$  за ивицата с  $K^\pi = 0^+$  и  $(N = 2\mu + 2, T = 1)$  за тази с  $K^\pi = 0^-$ ,  $N = 8, 12, \dots$  съответно.

Използвайки тензорните свойства на генераторите на  $Sp(12, R)$ , получени в [A22] е лесно да се определи оператора на  $E2$  преходи между състоянията на двете разглеждани ивици:

$$T^{E2} = e \left[ A_{[210]_3[0]_2}^{[1-1]_6} \begin{matrix} 2M \\ 00 \end{matrix} + \theta \left( [F \times F]_{(0,2)[0]_2}^{[4]_6} \begin{matrix} 20 \\ 00 \end{matrix} + [G \times G]_{(2,0)[0]_2}^{[-4]_6} \begin{matrix} 20 \\ 00 \end{matrix} \right) \right], \quad (17.22)$$

където тензорните оператори  $A_{[210]_3[0]_2}^{[1-1]_6} \begin{matrix} 2M \\ 00 \end{matrix} = Q_M$ , изразени в термини на бозонните оператори на раждане  $p_m^\dagger, n_m^\dagger$  и унищожение  $p_m, n_m$ ,  $m = 0, \pm 1$  (17.8) съответстват на компонентите на Elliott-овия квадруполен оператор (15.18) [38], които са част от  $SU(3)$  генераторите и в същност променят само ъгловия момент с  $\Delta L = 2$ . Тензорното произведение

$$[F \times F]_{(0,2)[0]_2}^{[4]_6} \begin{matrix} 20 \\ 00 \end{matrix} = \sum C_{(0,1)[0]_2}^{[2]_6} \begin{matrix} [2]_6 \\ (0,1)[0]_2 \end{matrix} C_{(0,2)[0]_2}^{[4]_6} \begin{matrix} (0,1)(0,2) \\ (1)_3 (1)_3 (2)_3 \end{matrix} C_{M_1 - M_1 0}^1 \begin{matrix} 1 2 \\ 00 \end{matrix} \\ \times F_{(0,1)[0]_2}^{[2]_6} \begin{matrix} 1M_1 \\ 00 \end{matrix} F_{(0,1)[0]_2}^{[2]_6} \begin{matrix} 1-M_1 \\ 00 \end{matrix}$$

на операторите  $F_{[1,1]_3[0]_2}^{[2]_6} \begin{matrix} 1M \\ 00 \end{matrix}$  (17.17), които са повишаващите с двойка бозони  $Sp(12, R)$  генератори, сменя броя на бозоните  $\Delta N = 4$  и ъгловия момент  $\Delta L = 2$ . Тензорното представяне за произведението  $[G \times G]_{(2,0)[0]_2}^{[-4]_6} \begin{matrix} 20 \\ 00 \end{matrix}$  няма да дадем, защото операторите  $F$  и  $G$  са спрегнати и то е включено за да се осигури ермитовостта на оператора на преход (17.22).

Така за пресмятането на матричните елементи на (17.22) между бацичните състояния съответстващи на състоянията на основната и октуполната ивица ние имаме

предимството да използваме теоремата на Wigner-Eckart [A22,306] на две последователни стъпки (17.19) и (17.20), като в резултат получаваме зависимост само от тройно редуцираните матрични елементи. За тяхното изчисляване използваме получените в [A22] матрични елементи на бозонните оператори  $p_m^\dagger, n_m^\dagger$  и  $p_m, n_m$  ( $m = 0, \pm 1$ ), от които са построени операторите на преход (16.8)–(16.11). Тук даваме в Таблица 17.2 тройно редуцираните матрични елементи на операторите участващи в конструкцията на операторите на  $E2$  преходи (17.22).

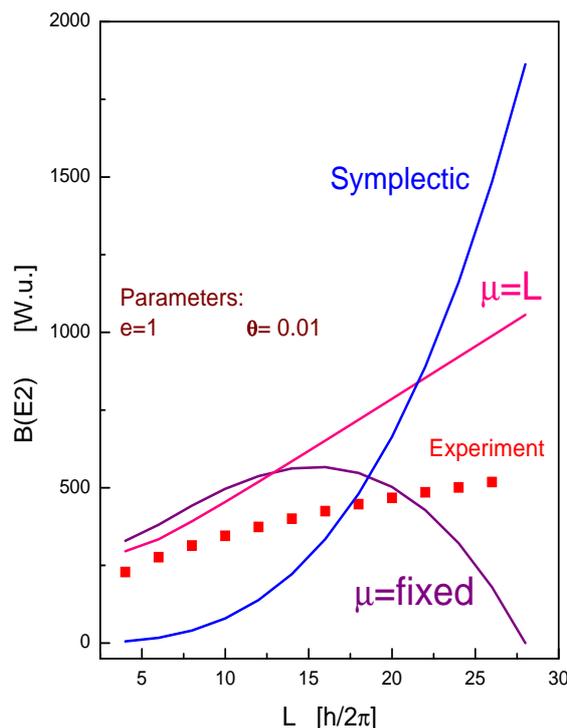
Таблица 17.2: ...

$T_{[\sigma]_3[2t]_2}^{[\chi]_6}$	$(\lambda', \mu')$	$\langle [N'](\lambda', \mu')     T_{[\sigma]_3[2t]_2}^{[\chi]_6}     [N](\lambda, \mu) \rangle$
$A_{[210]_3[0]_2}^{[1-1]_6}$	$\lambda' = \lambda$ $\mu' = \mu$	$(\lambda + 2\mu)$
$F_{[1,1]_3[0]_2}^{[2]_6}$	$\lambda' = \lambda$ $\mu' = \mu + 1$	$2 \left[ \frac{(\lambda + 2\mu + 1)(\lambda + 2\mu + 2)(\lambda + \mu + 2)^2(\mu + 1)}{(\lambda + \mu + 1)(\lambda + \mu + 3)(\mu + 2)} \right]^{\frac{1}{2}}$

С помощта на изразите от горната таблица можем да изчислим матричните елементи на операторите на преход. Очевидно е, че вторият член, участващ в оператора  $T^{E2}$  (17.22) се явява в резултат на симплектичното разширение на модела. Въпреки че коефициантът пред него е с около два порядъка по-малък от приноса на  $SU(3)$  инвариантния оператор на преход, неговата роля за коректното възпроизвеждане вероятностите за преход между състоянията от двете ивици е много важна. Това е илюстрирано на Фигура 17.1, където е начертано поведението на всеки от членовете на оператора на преход за сравнение с типичното поведение на експерименталните данни. Може също да се види, че поради ираст условието ( $\mu = L$ ), добре известното параболично поведение на матричните елементи на квадруполния оператор на Elliott се модифицира. Съвсем ясно е, че експерименталните точки се явяват като осреднени стойности на теоретичните предсказания на двата гранични случая – симплектичния и този с чисто  $SU(3)$  (фиксирано  $\mu$ ). Въпреки това, преходите между нисколежащите състояния при подходящо фиксиране на параметрите все още могат да се възпроизведат, но за по-високите състояния особено над пресечната точка на двете теоретични криви, наблюдаваното поведение не може да бъде възпроизведено от нито една от тях поотделно.

#### 17.4 Приложение към реални ядра

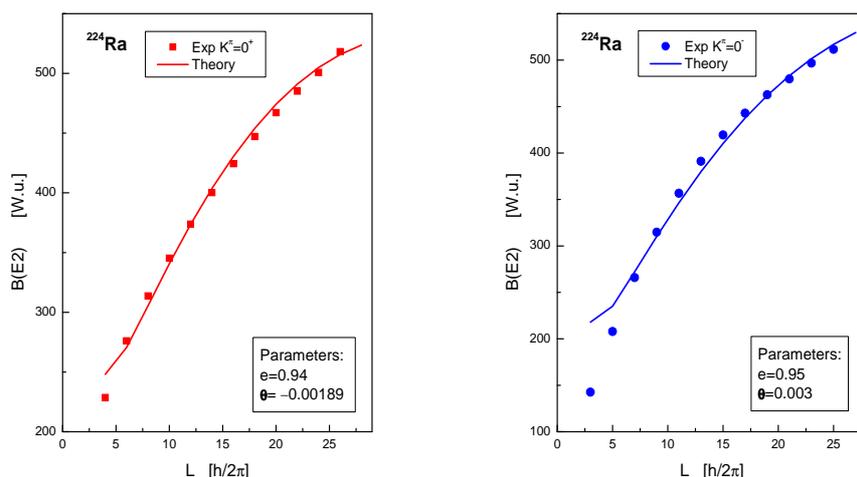
За да покажем коректното възпроизвеждане на експеримента от нашите теоретични резултати, ние прилагаме разработената методика към налични експериментални



Фигура 17.1: Поведение на запазващия брой и симплектичните членове в матричния елемент на оператора на преход  $T^{E2}$  (17.22).

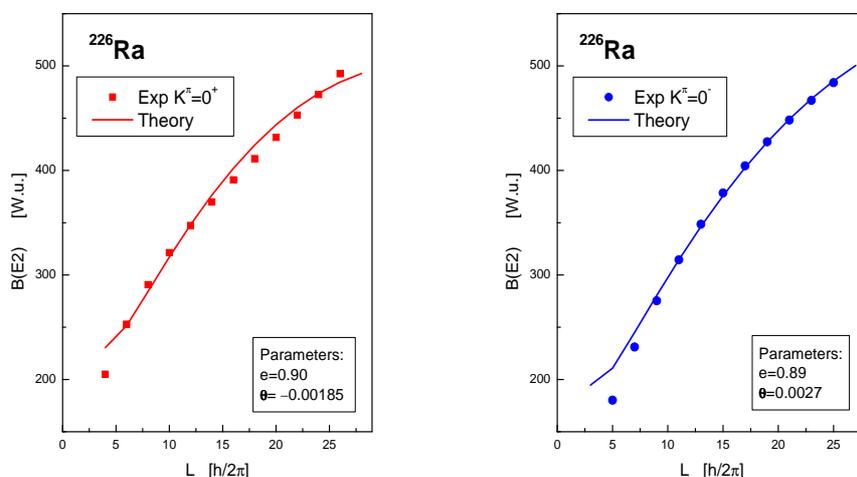
данни [313] за вероятностите за преход в разглежданите колективни ивици на изследваните ядра. Приложението се състои всъщност във фитирането на двата параметъра в оператора на преход  $T^{E2}$  (17.22) към експеримента за всяка от разглежданите ивици.

Операторът на  $E2$  преход вътре в първата ивица с отрицателна четност, зададена от  $SU(3)$  мултиплетите  $(2, \mu - 1)$ ,  $T = 1$ , съвпада с този за основната ивица зададена от  $(0, \mu)$ ,  $T = 0$ . Както беше показано, поведението на енергиите в двете ивици за всички изследвани ядра е много подобно и близко до ротационното. Различават се и то закономерно, само квантовите числа на състоянията между които се извършва прехода. Различни са и началните състояния, които определят главата на всяка от ивиците. По тази причина, при тяхното числено определяне, е необходима само формална смяна на стойностите  $0 \rightarrow 2$ ,  $\mu \rightarrow \mu - 1$  и  $T = 1$  в използваните тройно приведени матрични елементи, дадени в Таблица 17.2 както и в участващите в тях  $SU(3) \rightarrow SO(3)$  и  $SO(3) \rightarrow O(2)$  ККГ. Резултатите от сравнението с експеримента [313] в основната и първата възбудена ивица с отрицателна четност в ядрата  $^{224}\text{Ra}$  и  $^{226}\text{Ra}$ , както и получените стойности на параметрите  $\epsilon$  и  $\theta$  са показани на Фигури 17.2 и 17.3. Експерименталните точки, с изключение на първите една-две лежат много близо до теоретичните криви. Поведението на вероятностите за преход във всяка от двете ивици е много подобно, както можеше да се очаква от теоретичните предпо-



Фигура 17.2: Сравнение на теоретично пресметнатите с експерименталните данни за  $B(E2)$  преходите в основната (ляво) и октуполната (дясно) колективни ивици в спектъра на  $^{224}\text{Ra}$ .

ложения. Това се вижда и от близките стойности на параметрите  $\epsilon$  и  $\theta$  във всяка от ивиците. Отрицателния знак на  $\theta$  в основната ивица дава различния наклон на двете криви и още веднъж потвърждава чувствителността на теорията към симплектичния принос в оператора на преход. Параметъра  $\epsilon$ , който има смисъла на ефективен заряд е близък до 1, а параметърът  $\theta$ , който определя относителната сила на симплектичната компонента в операторите на преход е сравнително малък, но без тази компонента е невъзможно да се опише такава дълга последователност от преходи и то с такава добра точност, каквато е получена в примерите на Фигури 17.2 и 17.3. Получените резултати в допълнение към доброто описание на енергиите, потвърждават успешното приложение на симплектичното разширение на  $U(6)$  границата на МВВБ за описание на спектрите на добре деформирани ядра до високи ъгливи



Фигура 17.3: Същото като на Фигура 17.2 за  $^{226}\text{Ra}$ .

моменти на ивиците с положителна и отрицателна четност.

Теорията дава перспектива и за по-нататъшно приложение за други видове преходи в други типове колективни ивици, както вътре в ивиците, така и между тях, а така също и за изследване на даден тип преходи в набори от ядра с цел да се изследва развитието на колективността в дадената област, за което обаче е нужно по-голямо количество експериментални данни, особено при високоспиновите състояния.

## 18. Енергетична систематика на нисколежащите колективни състояния в Модела на двата взаимодействащи векторни бозона

Теоретичното описание на експерименталните данни за нисколежащите колективни състояния на четно-четните ядра от областта на редките земи и актинидите е все още проблем от специален интерес във физиката на ядрената структура. Обикновено, данните се класифицират за дадена последователност от ядра [314] и Част II, като ядрените характеристики се изследват като функция на броя на валентните нуклеони. Подобни резултати показват еволюцията на ядрената структура като функция на масовото число, стартирайки обикновено с “ираст” състоянията на ядрата в даден слой [A8]. Развитието на модерната експериментална техника достигна такова състояние, че за дадено ядро вече има богата информация [92] за дълги последователности както на “ираст”, така и на “неираст” състояния с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+ \dots$ . Например, тринайсет  $0^+$  състояния са идентифицирани в ядрото  $^{174}\text{Hf}$  [315], докато за  $^{168}\text{Er}$  са известни пет  $0^+$ , дванадесет  $2^+$ , седем  $4^+$  и седем  $6^+$ . Много подобни примери могат да бъдат намерени. Като цяло, теорията на атомното ядро се оказва неспособна да възпроизведе и интерпретира този богат масив от експериментални резултати в отделните ядра, както и да проследи еволюцията на тази структура в серия ядра.

В някои случаи, данните са достатъчни за използването на статистически методи за изучаване разпределението на такива състояния, както например изучаването на разпределението на енергетичните процепи на състоянията на слоестия модел за случая на взаимодействия с фиксиран брой частици [316].

В по-традиционния Квазичастичен фононен модел [317], природата на възбудените ивици зависи от броя на фононите и квазичастичните двойки включени в теорията. Алгебричните подходи, такива като Модела на взаимодействащи бозони (МВБ) [41], се оказаха също доста успешни в изучаването на поведението на колективните състояния, като и при тях важен елемент при анализа е броят на колективните бозони, изграждащи състоянията. В тази връзка, симплектичните модели осигуряват общ подход [305], в рамките на който могат да се изследват колективните възбуждания в многочастичните системи, тъй като те позволяват промяната на броя на “елементарните” възбуждания на колективните състояния. Фактът, че симплек-

тичната група се явява група на динамична симетрия на хармоничния осцилатор, на който се базира слоестият модел, доведе до разработването и развитието на много мощни симплектични слоести модели [305,318], където статистическите мерки могат да бъдат използвани за ограничаване на пространствата на симплектичния модел, така че микроскопичните пресмятания да станат възможни [319].

Съществена стъпка в изследването на разпределението на състоянията с ниски спинове беше направена наскоро при емпиричния анализ на данните за техните енергии в тежки четно-четни ядра, където са наблюдавани достатъчно от тях [320]. Първоначално експерименталните енергии на  $0^+$  възбудените състояния в спектрите на редица деформирани ядра бяха класифицирани относно броя на монополни бозони, използвайки прост хамилтониан за генериране на параболичен тип енергетичен спектър [321]. В настоящата глава, както в емпиричното изследване цитирано по-горе, ние разглеждаме систематиката в поведението на енергиите на последователности от колективни състояния с фиксиран ъглов момент  $L$  в четно-четните ядра. Енергетичното разпределение на тези състояния по отношение на броя на “елементарните възбуждания” (фонони), които влизат в тяхното изграждане може да се възпроизведе и интерпретира в рамките на алгебричните подходи, които използват симплектичните симетрии.

Описанието на енергиите на колективните състояния, имащи дадена стойност на ъгловия момент  $L$ , е свързано с избора на група на динамична симетрия и нейните редукции. Беше показано, че феноменологичния Модел на взаимодействащи векторни бозони [A18] дава точно описание на нисколежащия спектър на добре деформирани четно-четни ядра. Както беше посочено в Глави 15 и 16, най-общата алгебра пораждаща спектъра на модела е алгебрата на групата  $Sp(12, R)$  [A18]. В ротационната граница [288] на модела, редукцията на  $Sp(12, R)$  до групата на ъгловия момент  $SO(3)$  е осъществена през компактната унитарна подгрупа  $U(6)$ , която дефинира запазващата броя на бозоните версия на теорията [A19].

В настоящата глава, ние въвеждаме “симплектичната” редукция на  $Sp(12, R)$  до некомпактното пряко произведение  $Sp(4, R) \otimes SO(3)$ , което изолира различни съвкупности от състояния с дадена стойност на  $L$ . В тази редукция,  $Sp(4, R)$  може да бъде разглеждана като класификационна група на базисните състояния на системата [85]. За пълното означаване на базисните състояния, използваме редукцията на неприводимите представяния на  $Sp(4, R)$  на неприводими представяния на групата на “псевдоспина”  $SU(2)$  [6]. В резултат на съответствието между симплектичната и унитарна редукционни вериги и връзката между квадратичните оператори на Казимир на групите  $SU(3)$  и  $SU(2)$ , ние използваме един и същ хамилтониан и базис, както в ротационната граница на теорията [A19, B23] (Глава 16). Собствените стойности на хамилтониана за състоянията с дадена стойност на  $L$  дават разпределението на

енергиите като функция на броя на възбужданията  $N$ , които са използвани при конструирането на тези състояния. Приложението на тази нова динамична граница на МВВБ за четно-четни ядра от областта на редките земи потвърждава емпиричния анализ, даден в [320], като в допълнение на деформираните са разгледани и някои близки до сферичните ядра. Анализът на резултатите очертава както общите, така и специфичните черти на двата основни типа на колективно движение.

### 18.1 Алгебрична структура на новата динамична симетрия

В настоящото приложение на МВВБ, ние използваме друга възможна редукция [322] на групата  $Sp(12, R)$ , а именно чрез прякото произведение на нейната некомпактна подгрупа  $Sp(4, R)$  и групата на ъгловия момент  $SO(3)$

$$Sp(12, R) \supset Sp(4, R) \otimes SO(3). \quad (18.1)$$

Генераторите на  $Sp(4, R)$  са получени от векторното събиране до  $L = 0$  (скаларните произведения) на различните двойки векторни бозони  $u_m^+(\alpha)$ ,  $(u_m(\alpha))$   $m = 0, \pm 1$  представящи генераторите (15.6а-с) на  $Sp(12, R)$ . По начина си на конструиране, тези оператори са ротационни скалари и като следствие операторите на  $Sp(4, R)$

$$\begin{aligned} F^0(\alpha, \beta) &= \sum_{k,m} C_{1k1m}^{00} u_k^+(\alpha) u_m^+(\beta), \\ G^0(\alpha, \beta) &= \sum_{k,m} C_{1k1m}^{00} u_k(\alpha) u_m(\beta), \\ A^0(\alpha, \beta) &= \sum_{k,m} C_{1k1m}^{00} u_k^+(\alpha) u_m(\beta), \end{aligned} \quad (18.2)$$

комутират с компонентите на ъгловия момент,  $L_M = -\sqrt{2} \sum_{\alpha} A_M^1(\alpha, \alpha)$ , които генерират групата  $SO(3)$ ; т.е. в (18.1) наистина е осъществено прякото произведение на двете групи. От това следва, че квантовото число  $L$  на групата на ъгловия момент  $SO(3)$  може да бъде използвано да характеризира и представянията на  $Sp(4, R)$ .

Общата редукционна схема на бозонните представяния на  $Sp(4k, R)$ , при  $k = 1, 2, \dots$  до нейните максимална компактна  $U(2k)$  и некомпактна  $U(k, k)$  подгрупи е дадена в детайли в [6]. Случаят  $k = 3$ , съответстващ на редукцията на  $Sp(12, R)$  чрез компактната  $U(6)$  подгрупа, беше представен в симплектичното разширение на започващата с  $U(6)$  ротационна граница на МВВБ [A19] и в Глава 16.  $Sp(4, R)$  представлява най-простия нетривиален случай  $k = 1$  от общата редукционна схема. Подгрупата, асоциирана с нейното компактно съдържание е  $U(2)$ . Тя е генерирана от генераторите на Weyl  $A^0(\alpha, \beta)$ :

$$\begin{aligned} A^0(p, n) &= \sqrt{\frac{2}{3}} T_+, & A^0(n, p) &= -\sqrt{\frac{2}{3}} T_-, \\ A^0(p, p) &= \sqrt{\frac{1}{3}} N_+, & A^0(n, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} N_-, \end{aligned} \quad (18.3)$$

където  $N_+(N_-)$  определят броя на частиците от всеки вид. Известно е, че групата  $Sp(4, R)$  е много удобна за класификация [85] на ядрените свойства по отношение на операторите на редукция  $N = N_+ + N_-$  и третата проекция на  $T_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}}[A^0(p, p) - A^0(n, n)]$  на оператора на “псевдоспина”  $T$ . Тук ще използваме това, но за класификация на състоянията с фиксиран ъглов момент, от спектъра на дадено четно-четно ядро по отношение на броя на фононите от които всяко от тях е построено. За целта се използва еквивалентната на (18.3) съвкупност от инфинитезимални оператори, която в допълнение на повишаващата  $T_+$  и понижаваща  $T_-$  компоненти на “псевдоспина” (вж. уравнение (15.13) съдържа операторите на Cartan  $N$  и  $T_0$ . Операторите  $T_0, T_{\pm}$  затварят относно операцията комутиране алгебрата на “псевдоспина”  $su(2)$ . Операторът  $N$  генерира  $U(1)$  и играе ролята на инвариант от първи ред на  $U(2) \supset SU_T(2) \otimes U_N(1)$ . По този начин той редуцира безкрайномерното представяне на  $Sp(4, R)$  на безкрайна сума от крайномерни представяния  $[N]_2 = [N, 0] \equiv [N]$  на  $U(2)$ . Минималният брой бозони, който е необходим за изграждането на състояние с дадено  $L$  в четното представяне  $H_+$  на  $Sp(4, R)$  е  $N_{\min} = L$  за четни  $L$ , и  $N_{\min} = 2L$  за нечетни  $L$ . Стандартното маркиране на  $SU_T(2)$  базисните състояния е чрез собствените стойности  $T(T+1) = \frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)$  на оператора на Казимир от втори ред  $-T^2$  на  $SU(2)$ . Следователно  $T = \frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1, \dots, 1$  или  $0$ , за фиксирано  $N$  в редукцията  $Sp(4, R) \supset U(2)$ . Друго квантово число на  $SU_T(2)$  базисните състояния се задава чрез собствените стойности на оператора  $T_0$ , които са  $T_0 = -T, -T+1, \dots, T-1, T$ .

Във физическите приложения важна роля играе следното съответствие между двете редукционни вериги от подгрупи на  $Sp(12, R)$  - тази през  $U(6)$  (16.1) представена в Глава III и разгледаната тук редукция през  $Sp(4, R)$  [322]:

$$\begin{array}{ccccc} Sp(12, R) & \supset & Sp(4, R) & \otimes & SO(3) \\ \cup & & \cup & & \cap \\ U(6) & \supset & U(2) & \otimes & SU(3). \end{array} \quad (18.4)$$

Това съответствие е следствие от еквивалентността на групата  $U(2)$  на “псевдоспина”  $T$  в двете вериги  $[U(6) \supset SU(2) \subset Sp(4, R)]$  и нейната допълнителност със  $SU(3)$  в редукцията  $SU(3) \subset U(6)$ , както и това че и в двете редукции се съдържа  $SO(3)$  алгебрата на ъгловия момент.

### 18.1.1 Реализация на представянията на $Sp(4, R)$

Както беше споменато по-горе, всяко представяне на  $Sp(4, R)$  е безкрайномерно и се състои от безкраен брой  $U(2)$  представяния. В четното пространство  $H_+$  на  $Sp(12, R)$ , базис за нейните представяния се генерира чрез последователното действие на симетрично свързаните (куплираните) произведения на операторите  $F^0(\alpha, \beta)$  върху състоянието с най-ниско тегло с ъглов момент  $L$ , което маркира разглежданото пред-

ставяне на  $Sp(4, R)$  [4, 322, 323]. Всяка начална  $U(2)$  конфигурация се характеризира чрез напълно симетрично представяне  $[L]$ , формирано от  $N_{min} = L$  векторни бозони. Сега ще опишем процедурата [A20, B24, B27] за получаване на останалите  $SU(2)$  представяния в дадено представяне  $L$  на  $Sp(4, R)$ . За да се направи това, първо разбиваме  $r$  на сума от съвкупности  $(r_1, r_2)$ , където  $r_1$  и  $r_2$  са четни и  $r_1 + r_2 = r$ . Степента на операторите  $F^0(\alpha, \beta)$ , които са приложени върху състоянието с най-ниско тегло е  $r/2$ . На тези двойки цели, неотрицателни числа могат да бъдат еднозначно съпоставени представянията на  $U(2)$  и след преобразуването им до представянията на  $SU(2)$  ( $[r_1, r_2] \rightarrow [r_1 - r_2, 0] \equiv [r_1 - r_2]$ ), разбиването приема вида:

$$[r] = \bigoplus_{i=0}^{\langle r/4 \rangle} [r - 4i] \quad (18.5)$$

където  $\langle r/4 \rangle$  означава цялата част на отношението. След това, действието на различните произведения на операторите  $F^0(\alpha, \beta)$  се задава чрез всички вътрешни произведения на представянията  $[L]$ , т. е. чрез  $[L] \otimes ([r] \oplus [r - 4] \oplus \dots)$  ограничени до двумерни диаграми на Юнг. После те се трансформират до  $SU(2)$  представянията  $[k]$ , съответстващи на  $N = N_{min} + r$ ,  $r = 0, 2, 4, 6, \dots$  и  $T = \frac{k}{2} = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1, \dots, 0$  за четните стойности на  $L$ . За нечетните стойности на  $L = 1, 3, 5, \dots$  в четното  $\mathcal{H}_+$ , разложението на  $Sp(4, R)$  представянията се получава по същия начин, използвайки разбиването на  $r = 2, 4, 6, \dots$  на сума от двойки  $[r_1, r_2]$ , където  $r_1$  и  $r_2$  са нечетни [A1] и произведението е с четните представяния  $[L - 1]$ . В резултат от умножението на всяка дадена стойност на  $L$  със  $SU(2)$  разложенията на безкрайния брой четни числа  $n$ , получаваме всички  $SU(2)$  представяния, съдържащи се в  $Sp(4, R)$  представянето, дефинирано чрез  $L$ . В Таблицы 18.1, 18.2 и 18.3 сме илюстрирали описаната техника за случаите  $L = 0, 2$  и  $4$ . Колоните са дефинирани чрез квантовото число на "псевдоспина"  $T = k/2$ , а редовете чрез собствените стойности  $N = k_{max} = L + r$  за четните  $L$  и  $N = k_{max} + 2 = 2L + r$  за нечетни  $L$  и  $r = 0, 2, 4, 6, \dots$ . Таблица 18.1 за състоянията с  $L = 0$  в същност съвпада с разбиването на четните числа  $r$ .

Съответствието (18.4) между двете редици от подгрупи на  $Sp(12, R)$  заедно с връзките между квантовите числа на  $U(2)$  и  $SU(3)$  позволяват да се идентифицират представянията ( $\lambda = k$ ,  $\mu = (N - k)/2$ ) на  $SU(3)$ , които също са показани на Таблиците 18.1 - 18.3. За дадена стойност на  $N$ , те могат да бъдат сравнени с класификационната схема на  $SU(3)$  представянията, съдържащи се в четните  $U(6)$  представяния на  $Sp(12, R)$ , дадени в Таблица 16.1 на предишната глава и [A19].  $SU(2)$  представянията, които липсват в таблиците не съдържат състояния с разглежданата стойност на  $L$ , която се определя от правилата на редукция за  $SU(3) \supset SO(3)$  [288]. Освен за случая на  $L = 0$  в Таблица 18.1, при разцепването на  $Sp(4, R)$  представянията  $L$  на  $SU(2)$  представяния  $[k]$  има индекс на повторение (израждане) в появяването



## 18.2 Енергетично разпределение на нисколежащите състояния

### 18.2.1 Определяне на моделните параметри в енергиите на състоянията с фиксиран ъглов момент

Заради съответствието (18.4) между симплектичната и унитарната редукционни вериги и връзката между операторите на Казимир от втори ред на  $SU(3)$  и  $SU(2)$ , можем да използваме същия хамилтониан (16.14), както в Глава 16 [A19]. Освен това, както се вижда от представения по горе метод за получаване на базисните състояния съществува също и съответствие между тях и тези от  $U(6)$  базиса (16.4) и следователно хамилтонианът (16.14) е диагонален и в двата базиса, които са означени по един и същи начин  $|[N]_6; (\lambda, \mu); K, L, M; T_0\rangle \equiv |(N, T); K, L, M; T_0\rangle$ . Тогава и собствените стойности за състоянията с дадена стойност на  $L$  са същите като (16.15)  $E((N, T); KLM; T_0) = aN + bN^2 + \alpha_3 T(T + 1) + \alpha_1 T_0^2 + \beta_3 L(L + 1)$ . Очевидно в този израз, зависимостта на енергиите на колективните състояния от броя на фононите (векторните бозони)  $N$  е параболична. Останалите квантови числа  $T$ ,  $T_0$  и  $L$  определящи състоянията са изразени чрез  $N$  по описаната по-горе редукционна процедура. Този резултат потвърждава изводите на емпиричното изследване на поведението на състоянията с фиксиран ъглов момент [320], а именно, че техните енергии се описват добре чрез простата феноменологична формула  $E_L(n) = A_L n - B_L n^2$ , където  $A_L > 0$  и  $B_L > 0$  са свободни параметри и  $n$  е цяло число, съответстващо на всяко от състоянията с дадено  $L$ . Числото  $n$ , маркиращо всяко състояние е свързано с броя на монополните бозони в [320], които са получени чрез трансформация на Holstein – Primakoff [8, 324] на двойки фермиони, намиращи се на орбита  $j$  с проекция  $m$ . В по-нататъшните разглеждания е установена връзката  $N = 4n$  между квантовото число  $N$  и броя на идеалните бозони  $n$ , въведени в [319]. Това съотношение дава емпирична връзка с най-простото микроскопично описание на колективните състояния и  $Sp(12, R)$  феноменологичния колективен модел.

От този анализ става ясно че, МВВБ може да бъде използван за изследване на енергетичните разпределения (16.15) на нисколежащите състояния с даден ъглов момент и четност  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$  като функция на броя на бозоните. Четността на базисните състояния е дефинирана както в предишната граница на модела [A19] като  $\pi = (-1)^T$ , така че, в случая ние използваме колоните на  $Sp(4, R)$  представянията, маркирани чрез  $L$ , където  $T$  е фиксирано. В тях броят на бозоните  $N$  се мени със стъпка четири ( $\Delta N = 4$ ) в случаите  $L = 0, 1$  и със стъпка две ( $\Delta N = 2$ ) за всички останали (вж. примерите дадени в Таблицы 18.1 - 18.3).

Сега ще дадем процедура [A20, B24, B27] за получаване на енергетичното разпределение на нисколежащите колективни състояния в реалните ядра. Започваме с определянето на инерчния параметър,  $\beta_3$ , който стои пред члена  $L(L + 1)$  в уравне-

ние (16.15). Неговата стойност се определя чрез фитиране на енергиите на основната ивица (ОИ) с  $L = 0_1, 2_1, 4_1, 6_1, \dots$  към експерименталните им стойности за всяко разглеждано ядро. Другите колективни състояния, които обикновено се свързват с другите членове на собствените стойности на хамилтониана също зависят от стойността на инерчния параметър. По нататък използваме, удобен и лесен метод за определяне на останалите параметри в израза за енергиите (16.15) [A20, B24, B27]:

- а) За  $0^+$  състоянията фиксираме  $T = 0$  и  $T_0 = 0$  с  $N = 0, 4, 8, \dots$ , което съответства на колоната  $T_0 = 0$  в Таблица 18.1. В резултат, получаваме просто двупараметрично квадратично уравнение

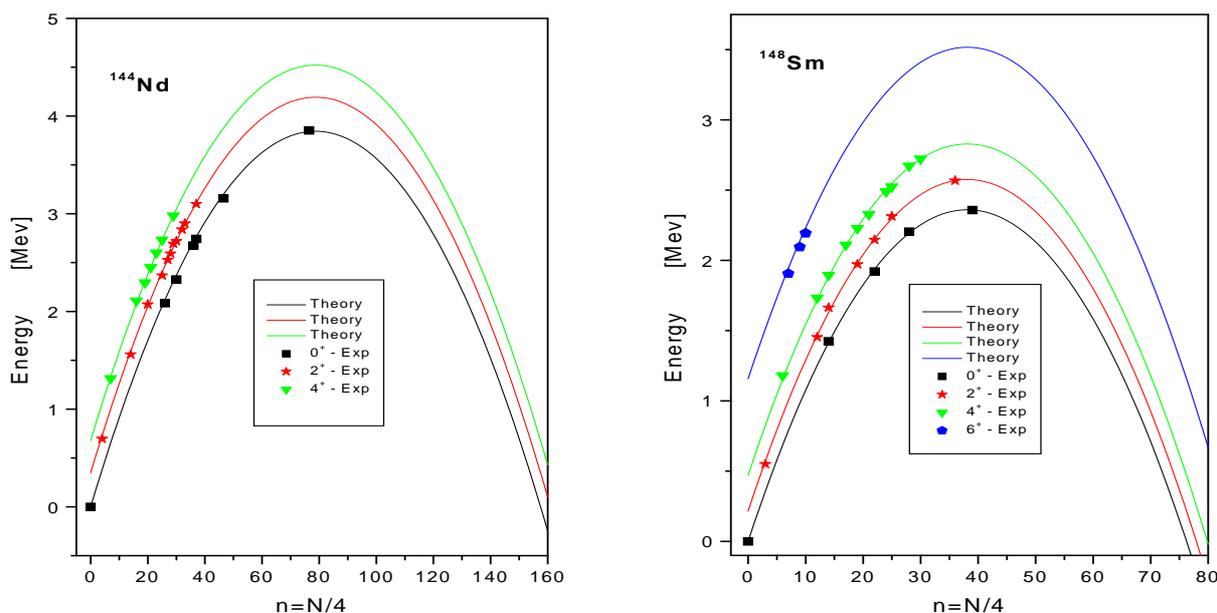
$$E((N_{0_i}, 0); 000; 0) = aN_{0_i} + bN_{0_i}^2 \quad (18.6)$$

за енергетичното разпределение на  $i = 1, 2, 3, \dots$  експериментално наблюдаваните  $0_i^+$  състояния. Индексът  $i$  показва подреждането на състоянията по нарастване на енергията. Уравнението  $E_{0_1^+} = 0$  за основното състояние има две решения, а именно  $N'_{0_1} = 0$  и  $N''_{0_1} = -\frac{a}{b}$ , като параболата е симетрична крива относно нейната максимална стойност при  $N_{0_{\max}} = -\frac{a}{2b}$  за  $b < 0$ . Фитирането за определяне на параметрите  $a$  и  $b$  е извършено, чрез напасване на енергиите при различните възможни подреждания на стойностите на  $N_{0_i}$ , приписани на експерименталните данни за  $0_i^+$  състоянията. Подреждането, за което се получава минимална стойност на  $\chi^2$  определя разпределението на  $0_i^+$  енергетичните състояния (стойностите на параметрите  $a$  и  $b$ ) по отношение на броя на бозоните  $N_{0_i}$ , от които е построено всяко състояние.

- б) За  $2^+$  състоянията оставяме параметрите  $a$  и  $b$  фиксирани, както са определени от разпределението на  $0^+$  състоянията, и въвеждаме зависимост от квантовото число  $T \neq 0$  (четно) и  $T_0 = 0$  с позволените стойности на  $N$  при фиксирано  $T$ ,  $N = 2T, 2T + 2, 2T + 4, \dots$  (третата, петата и т. н. колона в Таблица 18.2). Това включва в разглеждането коефициента  $\alpha_3$  пред  $T(T + 1)$  члена от собствената стойност на хамилтониана. Параметърът  $\alpha_3$  също се определя чрез  $\chi^2$  процедура при различните набори от позволени стойности  $N_{2_i}$ , приписани на експериментално наблюдаваните  $2_i^+$  състояния. Избира се тази стойност на  $\alpha_3$  и такова разпределение на  $N_{2_i}$ , за които  $\chi^2$  е минимално. Този член плюс константата  $6\beta_3$  фиксира разстоянието, с което параболата на  $2^+$  е отделена от тази на  $0^+$  състоянията.
- в) За  $4^+$  състоянията отново използваме фиксирано  $T \neq 0$  (четно) и запазваме стойностите на параметрите  $a$ ,  $b$  и  $\alpha_3$ , както са определени за  $0^+$  и  $2^+$  състоянията съответно, но избираме  $T_0 \neq 0$  от разрешената съвкупност, зададена чрез

$T_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm T$ . Този избор позволява да се определи и последния параметър в хамилтониана,  $\alpha_1$ . Той задава разстоянието, което отделя параболата на  $4_i^+$  състоянията от параболите определени преди това, и е определен чрез същата фитираща процедура с подходящата съвкупност от стойности на  $N_{4_i}$ , които задават енергетичното разпределение на  $4^+$  състоянията по отношение на  $N_{4_i}$ .

Моделните параметри са фиксирани по отношение на  $0^+, 2^+$  и  $4^+$  състоянията, тъй като обикновено има доста от тях и се постига добра статистика при фитиращата процедура. Освен това, те са преобладаващо глави (начални конфигурации) на колективните ивици (всички  $0^+$  и някои от  $2^+$  и  $4^+$  състоянията). Съвкупностите от състояния с други стойности на  $L = 1, 3, 6, \dots$  и/или с отрицателна четност ( $T$ -нечетно) могат да бъдат включени в разглежданията чрез определянето по подходящ начин на стойностите на  $T, T_0$  и намирането на последователностите от  $N_{L_i}$ , съответстващи на наблюдаваните експериментални енергии. Разбира се, квантовите числа  $T, T_0$  и последователностите от  $N_{L_i}$  трябва да бъдат разрешени в редуцията на  $Sp(4, R)$  представянето, дефинирано чрез избраното  $L$ . Ще посочим, че след като веднъж сме определили всички параметри на хамилтониана от разпределенията на състоянията  $0^+, 2^+$  и  $4^+$ , всички други съвкупности от състояния се описват без включването на допълнителни параметри.

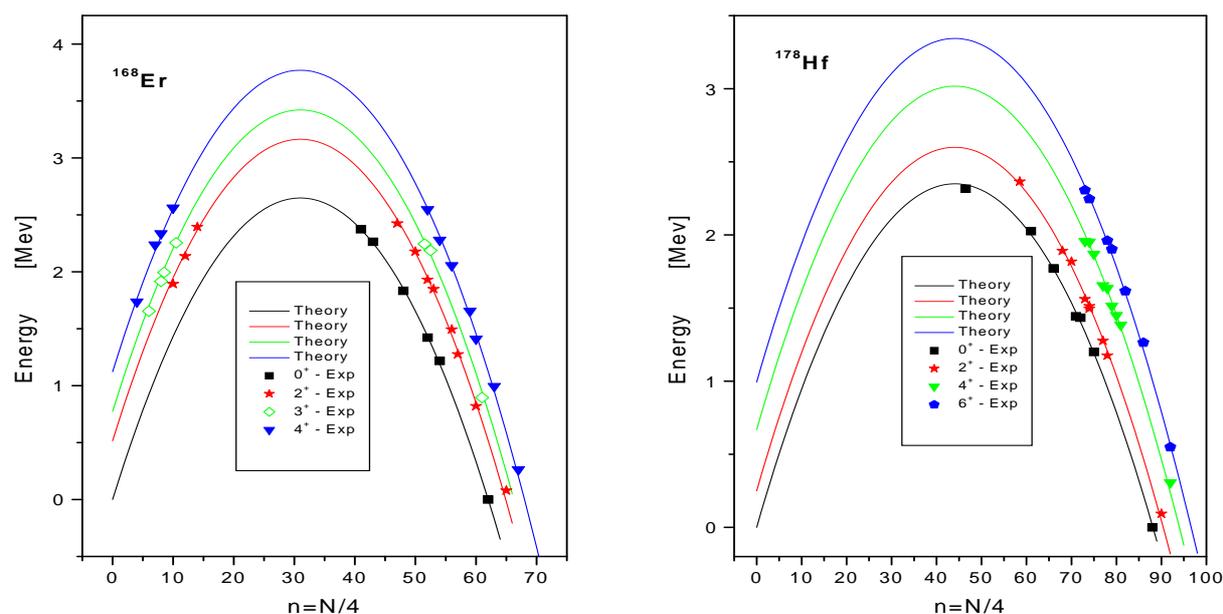


Фигура 18.1: Сравнение на теоретичните (Theory) и експерименталните (Exp) енергетични разпределения на състоянията с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$  за  $^{144}\text{Nd}$  (ляво) и с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$  и  $6^+$  за  $^{148}\text{Sm}$  (дясно).

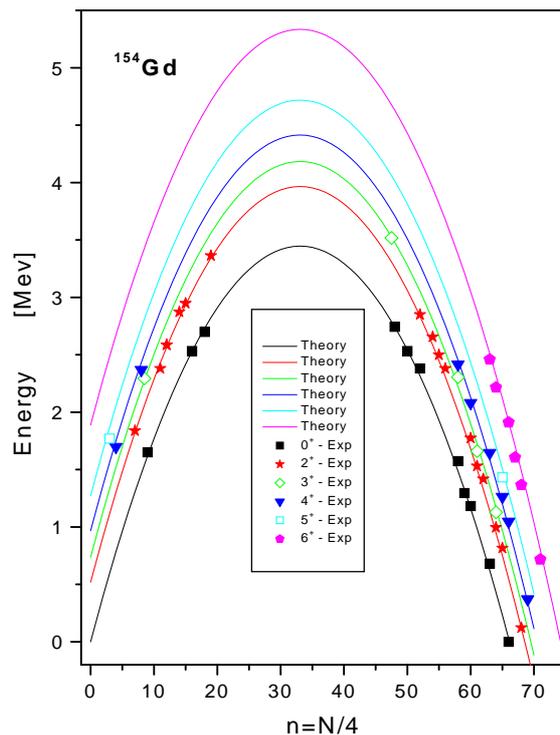
### 18.2.2 Анализ на резултатите

Резултатите от описаното по-горе теоретично разглеждане, приложено за колективните спектри на различни четно-четни ядра от областта на редките земи са показани на Фигури 18.1-18.3. От фигурите може да се види разпределението на енергиите по отношение на стойностите на  $N_{L_i}$  и доброто съгласие между теорията и експеримента. В допълнение, в Таблица 18.4 са дадени  $N_{\min}$ , стойностите на  $T, T_0$ , използвани за състоянията с дадено  $L$  със съответното  $\chi^2$ . Числото  $s$  в първата колона показва броя на експериментално наблюдаваните състояния със съответните ъглов момент и четност  $J^\pi$ . Стойностите, получени за параметрите на хамилтониана  $\beta_3, a, b, \alpha_3, \alpha_1$  и  $c_L$  са дадени в последната колона. В някои случаи ( $^{168}\text{Er}$ ,  $L = 3$  и  $^{154}\text{Gd}$ ,  $L = 3, 5$ ) е въведена свободната адитивна към  $E((N, T); KLM; T_0)$  константа  $c_L$ , която служи за по-доброто разграничаване на параболите една от друга и се определя по-същия начин като останалите параметри [A20]. В следващите ни изследвания на енергетичното разпределение на енергиите на набори от нисколежащи състояния и в други ядра, успяхме да постигнем добро описание [B24, B27] без включването на този допълнителен параметър, а само с подходящ избор на квантовите числа  $T$  и  $T_0$ , които отнемват съответните параболи.

Примерите, които са избрани за настоящото приложение са ядра, за които има експериментални данни за повече от пет състояния с ъглови моменти  $L = 0, 2, 4$  в нисколежащия спектър. От обсъжданите примери две от ядрата имат типичен вибрационен спектър [110],  $^{144}\text{Nd}$  и  $^{146}\text{Sm}$ , докато останалите  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{168}\text{Er}$  и  $^{178}\text{Hf}$  –



Фигура 18.2: Същото като на Фигура 18.1, но за състоянията с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+$  на  $^{168}\text{Er}$  (ляво) и  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$  и  $6^+$  на  $^{178}\text{Hf}$  (дясно).



Фигура 18.3: Същото като на Фигура 18.1, но за състоянията с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 3^+, 4^+, 5^+$  и  $6^+$  на  $^{154}\text{Gd}$ .

притежават типичен ротационен характер. Това се потвърждава и от получените стойности за инерчния параметър  $\beta_3$ , дадени в Таблица 18.4. Едно от главните различия на тези два типа спектри е положението на първото възбудено  $2_1^+$  състояние от основната ивица, която за вибрационните ядра е твърде високо (над 1 MeV), докато за добре деформираните лежи доста по-ниско, около 0.07 MeV. За  $^{144}\text{Nd}$  и  $^{146}\text{Sm}$ , които имат вибрационен спектър, прилагаме процедурата описана по-горе с четни стойности на  $T$ , които се отличават значително ( $\Delta T = 4$ ) за различни съвкупности от стойности на  $L$ , т. е.  $L = 0, 2, 4$ . Това съответства на доста големи промени в стойностите на началните  $N_{min} = 2T$ , което позволява съгласно правилата на редукция на базиса, състоянията с фиксирано  $L$  да бъдат разположени от лявата страна на симетричните параболи. В резултат (вж. Фигура 18.1) стойностите на  $N_{L_i}$  нарастват с увеличаване на енергиите на тези състояния. Стъпката, с която нарастват  $N_{L_i}$  зависи от енергетичните разлики между състоянията върху параболата. Тези разлики са най-големи за  $0^+$  състоянията и обикновено намаляват с увеличаване на  $L$ . Това е защото всички  $0^+$  състояния са глави на ивици, като и някои от  $2^+$  и  $4^+$  състоянията принадлежат на тези ивици. За спектъра на  $^{146}\text{Sm}$ , в допълнение към  $J^\pi = 0^+, 2^+$  и  $4^+$  сме включили и състоянията с  $J^\pi = 3^-, 4^-$  и  $5^-$ .

Гледайки разпределението на състоянията върху параболите може да се види тяхното подреждане в различни ивици. Основната ивица е формирана от най-ниските

Таблица 18.4: Параметрите на хамилтониана, получени в резултат на фитиращата процедура.

Ядра	$s$	$L$	$N_{\min}$	$T$	$T_0$	$\chi^2$	Параметри
$^{148}\text{Sm}$	5	0	0	0	0	0.0005	$a = 0.03096$ $b = -0.00010$
	7	2	8	4	0	0.0002	$\alpha_3 = -0.00187$
	10	4	6	8	8	0.0003	$\alpha_1 = -0.00285$
	3	6	20	10	10	0.0023	$\beta_3 = 0.03929$
$^{144}\text{Nd}$	7	0	0	0	0	0.0001	$a = 0.02389$ $b = -0.00003$
	11	2	12	6	0	0.0008	$\alpha_3 = 0.00309$
	7	4	20	10	10	0.0004	$\alpha_1 = -0.00450$ $\beta_3 = 0.04074$
$^{168}\text{Er}$	6	0	0	0	0	0.0006	$a = 0.04270$ $b = -0.00017$
	11	2	4	2	0	0.0022	$\alpha_3 = 0.07298$
	11	4	4	2	2	0.0015	$\alpha_1 = 0.10910$
	7	3	4	2	0	0.0009	$\beta_3 = 0.01295$ $c_3 = 0.03$
$^{178}\text{Hf}$	7	0	0	0	0	0.0010	$a = 0.02666$ $b = -0.00007$
	9	2	4	2	0	0.0008	$\alpha_3 = 0.02677$
	9	4	4	2	2	0.0016	$\alpha_1 = 0.05274$
	7	6	6	2	2	0.0008	$\beta_3 = 0.01482$
$^{154}\text{Gd}$	11	0	0	0	0	0.0023	$a = 0.05218$ $b = -0.00019$
	17	2	4	2	0	0.0482	$\alpha_3 = 0.0400$
	8	4	4	2	2	0.0027	$\alpha_1 = 0.09574$
	6	6	8	4	2	0.0023	$\beta_3 = 0.01634$
	3	3	4	2	0	0.0033	$c_3 = 0.05$
	2	5	6	2	0	0.00008	$c_5 = 0.09$

състояния с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, \dots$ , които са почти еквиливантни за случая на вибрационни ядра с много близки стойности на  $n$  за състоянията, принадлежащи на дадена ивица. Почти изроденият триплет от състояния  $0^+, 2^+, 4^+$ , който е характерен за хармоничните квадруполни вибрации [110], също може да бъде наблюдаван върху теоретичните енергетични криви и се характеризира с почти еднаква разлика в съ-

ответните стойности на  $N$  между състоянията на този триплет. Добър пример за това е в спектъра на  $^{144}\text{Nd}$  (Фигура 18.1a), в който този триплет е формиран от  $0_2^+, 2_3^+, 4_2^+$  състоянията с  $n = 25, 20$  и  $15$ , съответно. За да се избегнат изражданията на енергиите по отношение на  $N_{L_i}$  и за ясното различаване на параболите е използвана симетрията на кривите от втори род и някои от състоянията са разположени от другата страна на параболата (Фигури 18.2 и 18.3).

Другите три примера,  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{178}\text{Hf}$  и  $^{154}\text{Gd}$  показани на Фигури 18.2 и 18.3 са за типично деформирани ядра. Ротационният характер на спектрите им изисква малки разлики в стойностите на  $N_{L_i}$  за състоянията с  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$ , принадлежащи на основната ивица. Използвайки това и симетрията на кривите от втори род, състоянията с дадено  $L$  в ротационните спектри са разположени от дясната страна на теоретичните криви. Това съответства на второто решение на уравнение (18.6) за основното състояние с  $T = T_0 = 0$ , дефиниращо максимума  $N''_{0_1} = -\frac{b}{a}$ , изграждащ това състояние. Това може да бъде използвано за ограничаване на стойностите на  $N_{L_i}$  и по този начин за ограничаване на базисните състояния [319] от безкрайномерното НП на  $Sp(12, R)$ . Тогава за ротационните ядра, броят на бозоните, които изграждат състоянията върху дадена параболола, зададена от фиксираното  $L$ , ще намалява с нарастване на енергиите. Следователно, ако броят на квантите, които са необходими за изграждането на колективното състояние е взет като мярка за колективността, състоянията от ротационните спектри са по-колективни в сравнение с вибрационните, което е очакван резултат. От примерите също може да се види структурата на колективните ивици, които са формираны от състояния от различните криви. Добри примери са основната ивица и първите възбудени и ивици (Фигури 18.2 и 18.3). На Фигура 18.3 за спектъра на  $^{154}\text{Gd}$ , в допълнение към  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$  състоянията са включени също и състоянията с  $J^\pi = 3^+, 5^+, 6^+$ . Това, показва, че методът работи също и за ивиците  $K^\pi = 2^+$  и  $K^\pi = 4^+$ . При  $^{154}\text{Gd}$ ,  $\beta$ -ивицата лежи по-ниско от  $\gamma$  ивицата за разлика от случаите на  $^{168}\text{Er}$  и  $^{178}\text{Hf}$  [119].

Ще отбележим също, че за разгледаните случаи, основната разлика идва от стойностите на  $N_{min}$ , фиксирани от симетрията на параболичните криви, което е отразено в близките стойности за параметрите  $a$  и  $b$ . В същото време, избраните стойности за  $T$  и  $T_0$  са подобни, но разликата от един порядък в стойностите на  $\alpha_3$  (плюс смяна на знака) и  $\alpha_1$  различават ротационните и вибрационните случаи. От представените резултати се вижда, че развитият метод работи за произволна съвкупност от колективни състояния.

Резултатите представени в тази глава, илюстриращи теорията, показват че МВ-ВБ може да бъде използван за описание на емпирично наблюдаваното енергетично разпределение на нисколежащите колективните състояния. Такова разпределение по отношение на броя на фоните може да се постигне във всеки колективен модел,

включващ едно- и двучастични взаимодействия в моделния хамилтониан. Основно свойство, което позволи параметризацията в нашия случай е симплектичната динамична симетрия на МВВБ, която позволява промяната на броя на “фононите”, необходими за конструирането на състоянията. Настоящото изследване хвърля също светлина върху структурата на колективните състояния, разкриващо еднакъв произход на вибрационните и ротационните спектри, но в същото време даващо информация за колективните свойства, които различават двата случая.

## 19. Шестмерен потенциал на Davidson, като динамична симетрия в теорията на ядрената структура

В теорията на ядрената структура взаимодействията между различните колективни степени на свобода е от голямо значение, тъй като в повечето от реалните ядрени системи те влияят значително върху енергетичните спектри и интензивностите на преход, което ясно се наблюдава в експериментите. Двата основни вида колективни движения, които се разкриват в ядрените спектри [92] са ротационните и вибрационните, и двата характеризирани се със специфични разстояния между нивата и съответни големини на електромагнитните преходи. Има различни модели, които дават точни решения за тези два идеализирани случая, но най-полезни са алгебричните, като МВБ [41], които съдържат тези два типа колективни движения като гранични точно решими приближения. Въпреки това, описанието на системи, в които се наблюдава силно смесване на ротационно-вибрационни взаимодействия не е лесна задача и получаването на точни аналитични решения е невъзможно, дори в подходи от типа на МВБ.

Нуждата от разглеждането на алгебрично решими потенциали, които са способни да описват системи с ротационно-вибрационни взаимодействия насочи ядрените физиците към използването на потенциала на Davidson [325], който има алгебрични решения за диатомните молекули. В рамките на алгебричния подход към многочастичния проблем и към колективния модел (КМ) на Bohr - Mottelson, който съдържа ротации и вибрации на системата, добавянето на потенциал на Davidson към хамилтониана изисква разглеждането на редицата от подгрупи на динамична симетрия, която съдържа прякото произведение  $Sp(2, R) \otimes SO(n) \subset Sp(2n, R)$ , където  $n = 3$  и  $5$  съответно. Анализът на тези два подхода и тяхното успешно приложение в ядрената физика дава възможност да изследваме по-общия случай на 6-мерен потенциал на Davidson в рамките на феноменологичния Модел на взаимодействиящи векторни бозони (МВВБ) [A18] Глава 15, чиято група на динамична симетрия е  $Sp(12, R)$ . Както беше показано в предходните Глава 17 [A22, B26] и Глава 18 [A20, B24, B27], моделът с успех се прилага за описанието на различни колективни явления [A19, 288] в ядрените спектри. В настоящата глава е изследвана нова редукиционна верига на динамичната група  $Sp(12, R)$  през подгрупата на прякото произведение  $Sp(2, R) \otimes SO(6) \subset Sp(12, R)$ , която разширява област-

та на приложение на модела за описанието на ротационно-вибрационен тип ядрени спектри. Приложението на новата динамична симетрия към реалните ядрени системи потвърждава способността на потенциала на Дейвидсон за възпроизвеждане на ротационно-вибрационните взаимодействия в многочастичните системи.

Освен това настоящето изследване допълва физическата интерпретация и дава допълнителна мотивировка на групово-теоретичната реализация на МВВБ, описващ две взаимодействащи системи от много частици в тримерно пространство, които съответстват на протонната и неутронната система в ядрата.

## 19.1 Алгебрични подходи използващи потенциали на Davidson в ядрената структура

### 19.1.1 Тримерен и петмерен потенциали на Davidson

Нуждата от описание на ядрени системи, в които са отчетени ротационно – вибрационните взаимодействия, води до търсене на алгебрично решими потенциали, които пораждат базисни състояния, даващи добро приближение за преходния характер между двете граници (ротационна и вибрационна).

Такъв потенциал беше предложен за диатомните молекули от Davidson [325]:

$$V(r) = \chi(r^2 + \frac{\varepsilon}{r^2}), \quad (19.1)$$

където  $\chi$  и  $\varepsilon$  са подходящо избрани константи. Хамилтонианът на система с ротационно – вибрационно взаимодействие с добавена към (19.1) кинетичната част, в единици на хармоничния осцилатор, има следния вид

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega^2(-\nabla^2 + r^2 + \frac{\varepsilon}{r^2}). \quad (19.2)$$

$\nabla^2$  и  $r^2$  са  $SO(3)$  скалари и от тук  $H_\varepsilon$  също е  $SO(3)$  инвариант. От друга страна,  $H_\varepsilon$  може да бъде изразен и чрез  $SU(1,1)$  генераторите, дефинирани по следния начин [326]:

$$Z_1 = -\nabla^2 + \frac{\varepsilon}{r^2}, \quad Z_2 = r^2, \quad Z_3 = \frac{1}{2}(r \cdot \nabla + \nabla \cdot r). \quad (19.3)$$

Тогаво собствените състояния на системата могат да се класифицират чрез групата на прякото произведение  $SU(1,1) \times SO(3)$ . Използвайки това, се получават точни алгебрични решения за собствените стойности и вълнови функции на разглежданата система. Следователно, както е показано в [326], многочастични системи с взаимодействие на Davidson имат като пораждаща спектъра алгебра, алгебрата на прякото произведение  $SU(1,1) \otimes SO(3)$ .

Както е добре известно, в ядрената физика най-успешното описание на ротации и вибрации е получено в рамките на колективния модел (КМ) на Bohr - Mottelson

[111], който в много отношения е геометричният еквивалент на МВБ [41]. Той е усъвършенстван вариант на капковия модел с въведени 5 колективни координати ( $\nu = 0, \pm 1, \pm 2$ )

$$q_\nu = \beta \cos \gamma \mathcal{D}_{0\nu}^2(\Omega) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (\mathcal{D}_{2\nu}^2(\Omega) + \mathcal{D}_{-2\nu}^2(\Omega)), \quad (19.4)$$

и съответните им канонични импулси  $\{p_\nu = -i\hbar\partial/\partial q_\nu\}$ , изразени чрез вътрешните координати  $(\beta, \gamma)$  и ъглите на въртене  $\Omega \subset SO(3)$ . Моделният хамилтониан

$$H_0 = \frac{1}{2B} p \cdot p + \frac{1}{2} B \omega^2 q \cdot q, \quad (19.5)$$

дава хармоничен вибрационен спектър, но с добавянето на квадруполен Дейвидсонов потенциал

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2B} p \cdot p + \frac{1}{2} B \omega^2 \left( q \cdot q + \frac{\varepsilon}{q \cdot q} \right), \quad (19.6)$$

поражда ротационно-вибрационен спектър, характеристика на така наречения  $\gamma$ -нестабилен ( $\gamma$ -soft) ротор на Wilets и Jean [327]. Тази граница на модела съответства на  $O(6)$ -границата на МВБ [41]. Потенциалите използвани в тези граници са независими от  $\gamma$  (и  $\Omega$ ) и следователно са функции само на променливата  $\beta^2 = q \cdot q$ , където  $p^2$  и  $\beta^2$  са скаларни произведения на 5-мерни вектори и следователно са  $SO(5)$  инварианти. Друго хубаво свойство на хамилтониана  $H_\varepsilon$  (19.6) е, че той също има  $SU(1, 1)$  динамична симетрия. Алгебричните решения за енергетичният спектър на 5-мерния колективен хамилтониан с Дейвидсонов потенциал са дадени от Elliott и др. [328].

Ортонормиран базис за КМ с взаимодействие на Davidson се задава [329] чрез съвкупността от състояния  $\{|n\nu\alpha LM\rangle\}$ , означени чрез квантовите числа на веригата от подгрупи

$$\begin{array}{ccccccc} SU(1, 1) & \otimes & SO(5) & \supset & U(1) \otimes & SO(3) & \supset & SO(2) \\ n & & v & & \alpha & n & L & M \end{array}, \quad (19.7)$$

където  $n$  е най-ниското (младшето) тегло на представянията на  $SU(1, 1)$ ,  $v$  е старшето тегло за  $SO(5)$  неприводимото представяне и  $\alpha$  е индекс на повторение на  $SO(3)$  НП в дадено НП на  $SO(5)$ .

Тъй като има ясно съответствие между описанието в рамките на геометричния колективен модел и това в МВБ за  $\gamma$ -нестабилната преходна област, използвайки подобна безкрайномерна алгебрична техника в МВБ, е получено точно решение [330] за всички ядра в  $O(6) \leftrightarrow U(5)$  преходната област. В [330] е използвана също допълнителността на  $U(5) \supset SO(5)$  и  $SO(6) \supset SO(5)$  базисите относно тези на  $SU^d(1, 1) \supset U(1)$  и  $SU^{sd}(1, 1) \supset U(1)$  с произтичащите от нея връзки между

операторите на Казимир и квантовите числа, означаващи представянията в съответната верига. В резултат се получават аналитични изрази за собствените стойности на енергията и собствените състояния на изотопичите вериги, които са преходни между нестабилните и вибрационните ядра.

### 19.1.2 Колективно поведение на многочастичните системи в симплектичната геометрия

Обаче, за да опишем микроскопичното колективно поведение на ядрената система или на динамиката на много частици в тримерно пространство, очевидно ние се нуждаем от някаква допълнителна симетрия. Такава сложна система е обикновено характеризирана чрез определено неприводимо представяне на групата  $Sp(6n, R)$  и нейната подгрупа  $Sp(6, R) \otimes O(n)$ , където  $n = A - 1$  и  $A$  е броят на нуклеоните. Така е установено [331], че колективните ефекти се появяват когато се наложат ограничения, които за многочастичните системи се свеждат до ограничаване на базисните състояния в рамките на определени неприводими представяния на групата  $O(n)$ , определящи НП и на  $Sp(6, R)$ . Хамилтонианът на такава система принадлежи на обвиващата алгебра на  $Sp(6, R)$ , а не на  $Sp(6n, R)$ .

Координатите  $x_{is}$  и импулсите  $p_{is}$  на  $n$ -частична система  $s = 1, 2, \dots, n$  в 3-мерното пространство  $i = 1, 2, 3$ , дефинирани чрез единствения ненулев комутатор

$$[x_{is}, p_{jt}] = i\delta_{ij}\delta_{st}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad s, t = 1, 2, \dots, n \quad (19.8)$$

са елементи на  $3 \times n = 3n$ -мерна  $W(3n)$  алгебра на Weyl.

Ермитовите квадратични изрази на координатите и импулсите

$$x_{is}x_{jt}, \quad x_{is}p_{jt} + p_{jt}x_{is}, \quad p_{is}p_{jt}, \quad (19.9)$$

които се затварят относно операцията комутация [332], осигуряват  $3n(2 \times 3n + 1)$ -те генератори на симплектичната група  $Sp(6n, R)$ .

Генераторите на подгрупата  $Sp(6, R) \times O(n)$  на  $Sp(6n, R)$  могат да бъдат получени от (19.9) чрез контракция по отношение на индексите  $i$  или  $s$ . За групата  $O(n)$ , инфинитезималните оператори имат [333] добре известната антисиметризирана форма

$$L_{st} = \sum_{i=1}^3 (x_{is}p_{it} - x_{it}p_{is}). \quad (19.10)$$

Групата  $Sp(6, R)$  има  $3(2 \times 3 + 1) = 21$  ермитови генератори [332], [334], [4, 26, 305, 335, 336], които имат следния вид:

$$q_{ij} = \sum_{s=1}^n (x_{is}x_{js}), \quad (19.11)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (x_{is}p_{js} + x_{js}p_{is} + p_{js}x_{is} + p_{is}x_{js}), \quad (19.12)$$

$$T_{ij} = \sum_{s=1}^n (p_{is}p_{js}), \quad (19.13)$$

$$L_{ij} = \sum_{s=1}^n (x_{is}p_{js} - x_{js}p_{is}). \quad (19.14)$$

$L_{ij}$  са генераторите на  $SO(3)$  подгрупата на  $Sp(6, R)$ . Тъй като ние разглеждаме само НП  $[\frac{1}{2}^6]$  или  $[\frac{1}{2}^5 \frac{3}{2}]$  на  $Sp(6n, R)$ , то е ясно, че НП на  $Sp(6, R)$  и  $O(n)$  са взаимно допълнителни [337], т. е. ако фиксираме НП на  $O(n)$ , то това на  $Sp(6, R)$  е също определено и обратно. От разглежданията на слоестия модел, може да се докаже [322], че чрез фиксиране на  $O(n)$  представянето се изолират колективните ефекти на ядрената структура [338]. По този начин  $Sp(6, R)$  може да бъде използвана за решаването на колективната част на многочастичния проблем. Пълен набор от състояния се задава от собствените стойности на хамилтониана

$$H_0 = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^3 H_{is}, \quad H_{is} = \frac{1}{2}(x_{is}^2 + p_{is}^2), \quad (19.15)$$

където  $3n$  операторите  $H_{is}$  са специфична комбинация на генераторите (19.9) на  $Sp(6n, R)$ , които комутират помежду си, т. е.  $[H_{is}, H_{jt}] = 0$  и по този начин определят тегловите оператори [333] на групата. Тъй като  $H_0$  е инвариантен относно пермутацията на  $A = n + 1$  нуклеона, собствените състояния могат да бъдат характеризирани по-нататък чрез неприводимото представяне на симетричната група  $S_{n+1}$  и нейните подгрупи, т. е. чрез разбиването на представянето  $f$  на  $n + 1$  символа на Яманучи.

В този базис могат да бъдат пресметнати матричните елементи на всички генератори (19.11)-(19.14) на групата  $Sp(6, R)$  (и по-общо на генераторите (19.9) на  $Sp(6n, R)$ ). Така, произволен хамилтониан  $H$ , включващ централни сили е в обвиващата алгебра на  $Sp(6, R)$ , тъй като той ще бъде специфична (контракция по  $s$ ) функция на квадратичните изрази (19.9), които са инвариантни относно пространствено отражение, за разлика от линейните  $x_{is}$  и  $p_{is}$ , които не са. Това важи също за другите интегрални на движение, такива като компонентите на пълния ъглов момент (19.10) или функции от тях. Подгрупите на динамичната група  $Sp(6, R)$  ни позволяват да класифицираме по-нататък собствените състояния на  $H_0$ .

Следователно, проблемът е да се дефинира базис, който е означен чрез неприводимите представяния на подходяща верига от подгрупи на  $Sp(6, R)$ . Базис, характеризирани чрез веригата  $Sp(6, R) \supset U(3) \supset SO(3)$ , където  $U(3)$  е групата на квадратуполния момент въведен от Elliott, е добре познат и получен както по абстрактен начин [38], [4, 26, 305, 335, 336, 339], така и като състояния на слоестия модел [39]. При

този подход са получени много успешни приложения при описанието на деформирани ядрени системи. Той е свързан също и с веригата  $U(6) \supset U(3) \supset O(3)$  на модела на взаимодействащите бозони [41].

Друга подходяща редукция за получаване на колективните базисни състояния е веригата  $Sp(6, R) \supset Sp(2, R) \otimes SO(3)$ , разгледана от Мошински и сътрудници от вибрационна гледна точка на колективното ядрено движение [331]. Действително, ако се отчете локалния изоморфизъм на алгебрите  $sp(2, R) \approx su(1, 1)$ , нейната връзка с генериращата спектъра алгебра на ядрената многочастична система с взаимодействие на Davidson става очевидна. Това е причина тази редукция да се разглежда като съответстваща на по-сложен набор от колективни състояния, който действително включва взаимодействие с ротационни степени на свобода.

## 19.2 Динамична симетрия на МВВБ съдържаща шестмерен потенциал на Davidson

На основата на досегашните разглеждания относно удобството от използването на симплектичната геометрия в изследването на ядреното колективно движение, понататъшно развитие на проблема може да бъде постигнато, ако ядрената многочастична система се разгледа като съставена от две взаимодействащи протонна и неутронна подсистеми. Тази мотивация стои зад алгебричното построяване на феноменологичния МВВБ [A18], където  $Sp(12, R)$ – групата на линейни канонични трансформации в 12–мерно фазово пространство [337] възниква като група на динамична симетрия на модела. Нейното конструиране беше подробно разгледано в предходните глави (Глави 15, 16 и 18) и затова няма да бъде разглеждано тук.

### 19.2.1 Редукция на $Sp(12, R)$ през некомпактната $Sp(2, R)$

За да свържем МВВБ със 6–мерния потенциал на Дейвидсон, ние въвеждаме друга възможна редукция [331], [337], [322] на групата  $Sp(12, R)$  чрез нейната некомпактна подгрупа:

$$Sp(12, R) \supset Sp(2, R) \otimes SO(6). \tag{19.16}$$

Тази конструкция очевидно допуска добавянето на потенциал на Davidson, при съответно предефиниране на генераторите на  $sp(2, R) \approx su(1, 1)$ , чието експлицитно представяне не е от съществено значение за бъдещите приложения.

Инфинитезималните оператори

$$F = \sum_{k,m,\alpha} C_{1k1m}^{00} u_k^+(\alpha) u_m^+(\alpha) = 2S^+, \tag{19.17}$$

$$G = \sum_{k,m,\alpha} C_{1k1m}^{00} u_k(\alpha) u_m(\alpha) = 2S^-, \tag{19.18}$$

$$A = \sum_{k,m,\alpha} C_{1k1m}^{00} u_k^+(\alpha) u_m(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} N = 2S^0 - 1, \quad (19.19)$$

на  $sp(2, R)$  алгебрата са получени от генераторите на  $sp(12, R)$  чрез контракция по отношение на двата индекса – пространствените  $m = 0, \pm 1$  и "псевдоспиновите"  $\alpha = p = 1/2, \alpha = n = -1/2$ . Директно се проверява, че операторите  $S^\tau, \tau = 0, \pm$  комутират както генераторите на алгебрата  $su(1, 1)$  [330], което е същественото им алгебрично свойство:

$$[S^0, S^\pm] = S^\pm, [S^+, S^-] = -2S^0, \quad (19.20)$$

така че алгебрите  $sp(2, R)$  и  $su(1, 1)$  са локално изоморфни със следния квадратичен оператор на Казимир  $C_2(SU(1, 1)) = S^0(S^0 - 1) - S^+S^-$ .

Следователно, от конструирането на операторите (19.18) следва, че те са скалари по отношение на 6–мерните ротации и комутират с компонентите на 6– мерните оператори на ъгловия момент [A18],

$$\Lambda_M^L(\alpha, \beta) = A_M^L(\alpha, \beta) - (-1)^L A_M^L(\beta, \alpha), \quad (19.21)$$

които притежават следната симетрия:

$$\Lambda_M^L(\alpha, \beta) = (-1)^L \Lambda_M^L(\beta, \alpha) \quad (19.22)$$

и генерират алгебрата на  $SO(6)$  (вж. (15.22)). Когато гръцките индекси  $\alpha = \beta$  са едновременно фиксирани, тогава от (19.21) се получава

$$\Lambda_M^L(\alpha, \alpha) = A_M^L(\alpha, \alpha) - (-1)^L A_M^L(\alpha, \alpha), \quad (19.23)$$

които са различни от нула само за  $L = 1$ . Следователно, шесте оператори  $A_M^1(p, p)$  и  $A_M^1(n, n)$  от първи ранг относно  $O(3)$  представляват съответно компонентите на ъгловите моменти на системите от  $p$  и  $n$  бозони. В случая  $\alpha \neq \beta$ , операторите (19.21) които са  $5 + 3 + 1$  компоненти на тензори от 2, 1 и 0 ранг съответно и заедно с операторите на ъгловите моменти на  $p$  и  $n$  системите, ние получаваме пълния набор от генератори на  $O(6)$ , които са определени комбинации от  $U(6)$  генераторите (15.6в). По този начин е реализирано прякото произведение на двете групи  $Sp(2, R)$  и  $SO(6)$  в (19.16). Квадратичният инвариант на групата  $SO(6)$  е

$$\Lambda^2 = \sum_{L,\alpha,\beta} (-1)^M \Lambda_M^L(\alpha, \beta) \Lambda_{-M}^L(\beta, \alpha), \quad (19.24)$$

и е свързан с квадратичните инварианти на  $Sp(2, R)$ , тъй като в прякото произведение (19.16) двете групи са взаимно допълнителни [337] и неприводимите представяния на групата  $SO(6)$  определят тези на  $Sp(2, R) \approx SU(1, 1)$  и обратно.

### 19.2.2 Редукция на $SO(6)$ за пълно означаване на базиса

За да дефинираме напълно базиса с динамична симетрия определена от (19.16), която позволява да се включи 6–мерния потенциал на Davidson, разглеждаме по-нататък редукцията на алгебрата на  $SO(6)$  до алгебрата на ъгловия момент на  $SO(3)$  посредством следната верига [A18, 340] (вж. Глава 15, §15.3)

$$SO(6) \supset SU(3) \otimes O(2) \supset SO(3) \\ \omega \quad (\lambda, \mu) \quad \nu \quad L \quad , \quad (19.25)$$

която дефинира  $\gamma$ –нестабилната граница на МВВБ. Единственият инфинитезимален оператор на  $O(2)$  е пропорционален на скаларния оператор  $\Lambda^0(\alpha, \beta)$  (15.25) от генераторите (19.21) на  $SO(6)$ , а генераторите на възникващата в тази граница  $SU(3)$  (означена като  $\overline{SU(3)}$  в [A18]) са дадени в (15.23). Ще отбележим, че тензора от втори ранг  $X_M$  в този случай е квадруполният момент на протон-неутронното взаимодействие. Операторите на Казимир от втори ред на двете групи в прякото произведение на (19.16) могат да бъдат записани като [A18]

$$2C_2(O_2) = M^2 = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta} M_{\beta\alpha}, \quad (19.26)$$

$$C_2(SU(3)) = \sum_M (-1)^M (X_M X_{-M} + Y_M Y_{-M}). \quad (19.27)$$

Тъй като  $SO(6) \subset U(6)$ , симетричното представяне  $[N]_6$  на  $U(6)$  се разлага също на напълно симетрични  $(\omega, 0, 0)_6 \equiv (\omega)_6$  представяния на  $SO(6)$  [290] според следното правило за редукция

$$[N]_6 = \bigoplus_{\omega=N, N-2, \dots, 0(1)} (\omega, 0, 0)_6 = \bigoplus_{i=0}^{<\frac{N}{2}>} (N - 2i)_6, \quad (19.28)$$

където  $<\frac{N}{2}> = \frac{N}{2}$  ако  $N$  е четно и  $\frac{N-1}{2}$  ако  $N$  е нечетно. Между квадратичните оператори на Казимир на  $SU(3) - C_2(SU(3))$  (19.27), на  $O(2) - M^2$  (19.26) и на  $SO(6) - \Lambda^2$  (19.24) съществува следната връзка [341]:

$$\Lambda^2 = 2C_2(SU(3)) - \frac{1}{3}M^2, \quad (19.29)$$

което означава, че редукцията от  $SO(6)$  до ротационната група  $SO(3)$  е осъществена чрез взаимно допълнителните групи  $O(2)$  и  $SU(3)$  [337]. Като следствие, квантовите числа на НП  $[f_1, f_2, 0]_3$  на  $SU(3)$  се определят от квантовото число на представянето  $(\omega)_6$  на  $SO(6)$  и от цялото число  $(\nu)_2$  на асоциираното НП на  $O(2)$ , т. е.

$$(\omega)_6 = \bigoplus [f_1, f_2, 0]_3 \otimes (\nu)_2. \quad (19.30)$$

Използвайки връзката (19.29) между операторите на Казимир, за техните съответни собствени стойности се получава:

$$\omega(\omega + 4) = \frac{4}{3}(f_1^2 + f_2^2 - f_1 f_2 + 3f_1) - \frac{\nu^2}{3}. \quad (19.31)$$

Тогава, ако  $f_2 = 0$  и  $\nu = f_1$  от (19.31) записано във вида  $(f_1 - \omega)(f_1 + \omega + 4) = 0$  следва, че  $f_1 = \omega$ . Ако в (19.31)  $f_2 = i$ , получаваме връзката

$$\nu = \pm(\omega - 2i), \quad i = 0, 1, \dots, \omega. \quad (19.32)$$

Тогава (19.30) може да бъде записано като

$$\begin{aligned} (\omega)_6 &= \bigoplus_{i=0}^{\omega} [\omega, i, 0]_3 \otimes (\omega - 2i)_2 = \\ &\quad \bigoplus_{\nu=\pm\omega, \pm\omega-2, \dots, 0(\pm 1)} [\omega, \frac{\omega - \nu}{2}, 0]_3 \otimes (\nu)_2, \end{aligned}$$

или в означенията  $(\lambda, \mu)$  на Elliott [38]

$$(\omega)_6 = \bigoplus_{\nu=\pm\omega, \pm\omega-2, \dots, 0(\pm 1)} (\bar{\lambda} = \frac{\omega + \nu}{2}, \bar{\mu} = \frac{\omega - \nu}{2}) \otimes (\nu)_2. \quad (19.33)$$

И накрая, удобството на описаната редуционна процедура е и във възможността да се използват стандартните правила на редуция за веригата  $SU(3) \supset SO(3)$  (16.12), дадени в [38] и числото на повторение  $K$  може и тук да се използва за означаване на ивиците в енергетичния спектър на системата, както в ротационната граница на модела.

### 19.2.3 Включване на 6 - мерния потенциал на Davidson в динамичната симетрия определена от $Sp(2, R)$

В колективния модел на Bohr – Mottelson, състоянията се класифицират посредством квантовите числа на веригата [326, 342]

$$SU(1, 1) \otimes SO(5) \supset U(1) \otimes SO(5) \supset SO(3). \quad (19.34)$$

където за сферични ядра,  $SU(1, 1)$  е реализирана така, че  $U(1) \otimes SO(5)$  е подгрупа на  $U(5)$ , докато за деформирани ядра е намерена трансформация [342] на  $SU(1, 1)$ , която дава собствените състояния на потенциала на Davidson. С разширяването на колективния модел до 6 измерения, състоянията му могат да бъдат класифицирани чрез квантовите числа [342], осигурени от редуцията

$$U(3) \supset U(1) \otimes SU(3) \supset SO(3) \quad (19.35)$$

които се явяват собствени състояния на сферичния вибрационен хамилтониан

$$H_0 = h\omega N. \tag{19.36}$$

Подалгебрата на  $U(1) \otimes SU(3)$ , генерираща ротационен спектър, се появява също и във веригата

$$SU(1,1) \otimes SU(3) \supset U(1) \otimes SU(3) \supset SO(3). \tag{19.37}$$

Тогавата е ясно, че може да се направи същата трансформация на  $SU(1,1)$ , както за 5–мерния колективен модел, и да се получат базисните състояния, които са собствени състояния на 6–мерния аналог на потенциала на Davidson. Първата редукиционна верига естествено се съдържа в групово-теоретичната структура на Модела на взаимодрустващи векторни бозони [322, 331, 337]:

$$\begin{array}{ccccccc} Sp(12, R) & \supset & Sp(2, R) & \otimes & SO(6) & & \\ & & N & & \omega & & \\ & & \Downarrow & & \cup & & \\ & & SU(1,1) & \otimes & SU(3) & \otimes & O(2) \supset SO(3), \\ & & N & & (\lambda, \mu) & & \nu \quad K \quad L \end{array} \tag{19.38}$$

където под различните подгрупи са дадени съответните квантови числа, характеризиращи техните неприводими представяния. В последния ред на (19.38) сме отчели, че групата  $Sp(2, R)$  е локално изоморфна на  $SU(1,1)$ . Базисът, означен чрез квантовите числа на веригата от подгрупи (19.38), може да бъде записан като

$$|N\omega; (\lambda, \mu)\nu; K, L\rangle \tag{19.39}$$

където правилата за редукия за получаването на техните конкретни стойности за всяко състояние бяха дадени по-рано. С тяхна помощ, базисните състояния могат да бъдат класифицирани във всяко от двете неприводими представяния на  $Sp(12, R)$ , четното с  $N = 0, 2, 4, \dots$ , и нечетното с  $N = 1, 3, 5, \dots$ , действащи съответно в подпространствата  $H_+$  и  $H_-$ . Илюстрирали сме това в Таблица 19.1 за случая на четното НП, където редовете се задават от стойностите  $N$  и съвкупността от  $\omega$ , съдържащи се в тях (19.28), а стойностите на квантовото число  $\nu$  (19.32) задават колоните.  $SU(3)$  квантовите числа  $(\lambda, \mu)$  задават клетките на Таблица 19.1, тъй като те са получени от  $\omega$  и  $\nu$  (19.33).

Хамилтонианът с динамична симетрия, съответстваща на веригата (19.38), може да се изрази чрез операторите на Казимир от първи и втори ред на различните подгрупи в нея:

$$H = aN + bN^2 + \alpha_6\Lambda^2 + \alpha_2M^2 + \beta_3L^2 \tag{19.40}$$

Таблица 19.1: Класификационна схема на НП  $(\lambda, \mu)$  на  $SU(3)$ , съдържащи се в съответните  $SO(6)$  представяния  $\omega$  (втората колона) за случая на четното НП на  $Sp(12, R)$ .

$N$	$\omega$	$\nu \dots$	6	4	2	0	-2	-4	-6	$\dots$
0	0					(0, 0)				
2	2				(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)			
	0					(0, 0)				
4	4					(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)		
	2		(4, 0)	(3, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)			
	0					(0, 0)				
6	6		(6, 0)	(5, 1)	(4, 2)	(3, 3)	(2, 4)	(1, 5)	(0, 6)	
	4			(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)		
	2				(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)			
	0					(0, 0)				
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	

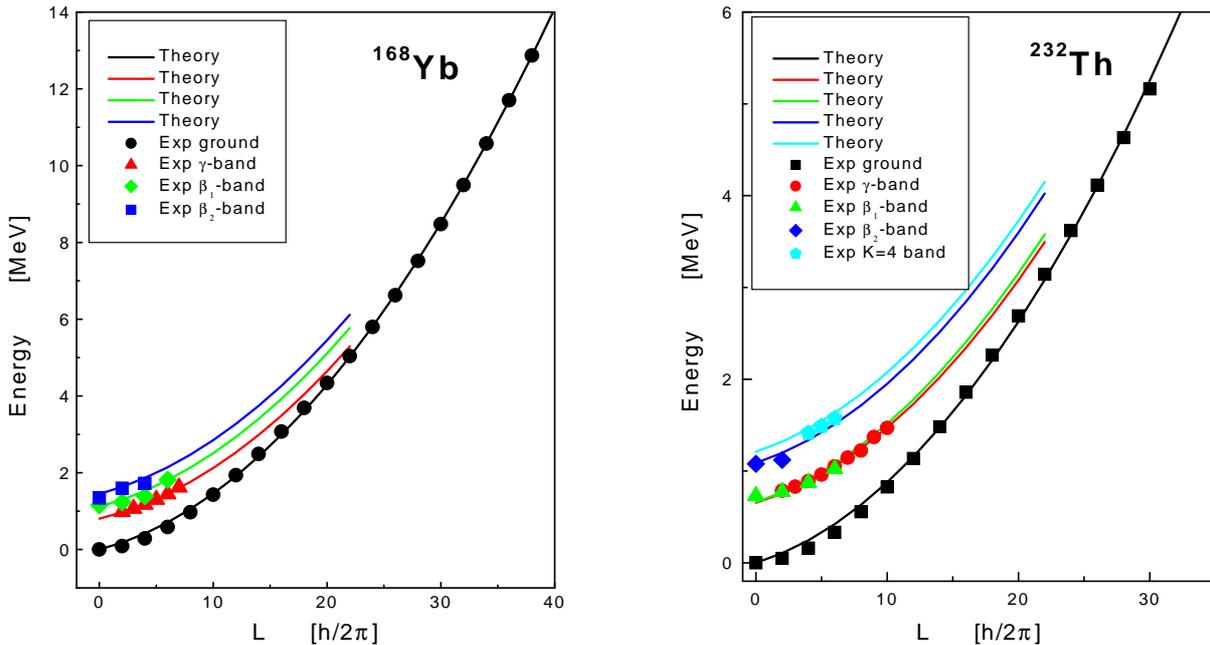
и е очевидно диагонален в базиса (19.39), означен чрез квантовите числа на техните представяния. Квадратичния инвариант на  $SU(3)$  е изпуснат в (19.40), заради неговата линейна зависимост от операторите на Казимир на  $SO(6)$  и  $O(2)$  (19.29). Тогава собствените стойности на хамилтониана (19.40), който поражда спектъра на система, взаимодействаща със 6-мерен потенциал на Davidson са:

$$E(N, \omega, \nu, L) = aN + bN^2 + \alpha_6 \omega(\omega + 4) + \alpha_2 \nu^2 + \beta_3 L(L + 1). \quad (19.41)$$

### 19.3 Приложение към реални ядра и анализ на резултатите

В настоящото приложение на новата динамична симетрия (19.38) на МВВБ към реални ядрени системи, ние използваме отново “алгебричната” дефиниция на “ираст” състояния [A19, B23], както беше въведена в Глава 16. Следователно, като “ираст” ние разглеждаме за всяка стойност на броя на бозоните  $N$ , състоянията с максимална стойност на ъгловия момент  $L$ . Отчитайки това, на състоянията от основната ивица, които са “ираст” състояния на ядрото ние приписваме базисните състояния с  $\omega = N$ ,  $\lambda = \mu = \frac{N}{2}$ , където  $N = 0, 4, 8, \dots$  ( $\Delta N = 4$ ) от  $\nu = 0$  колоната на Таблица 19.1.

Състоянията на възбудените ивици не разглеждаме като “ираст” състояния. Точното разположение на ивиците в спектъра силно зависи от структура на техните глави, и в частност от броя на бозоните  $N = N_{\min}$  (вж. Глава 18), които ги изграждат [A20, B24, B27]. За разглежданите възбудени ивици, ние избираме първо съответното  $N_{\min}$  за състоянието на главата и след това ивиците се изграждат чрез



Фигура 19.1: Сравнение между експерименталните енергии (*Experiment*) и нашите пресмятания (*Theory*), използвайки стойностите на моделните параметри дадени в Таблица 19.2 за основната и възбудени ивици на ядрата  $^{168}\text{Yb}$  (ляво) и  $^{232}\text{Th}$  (дясно).

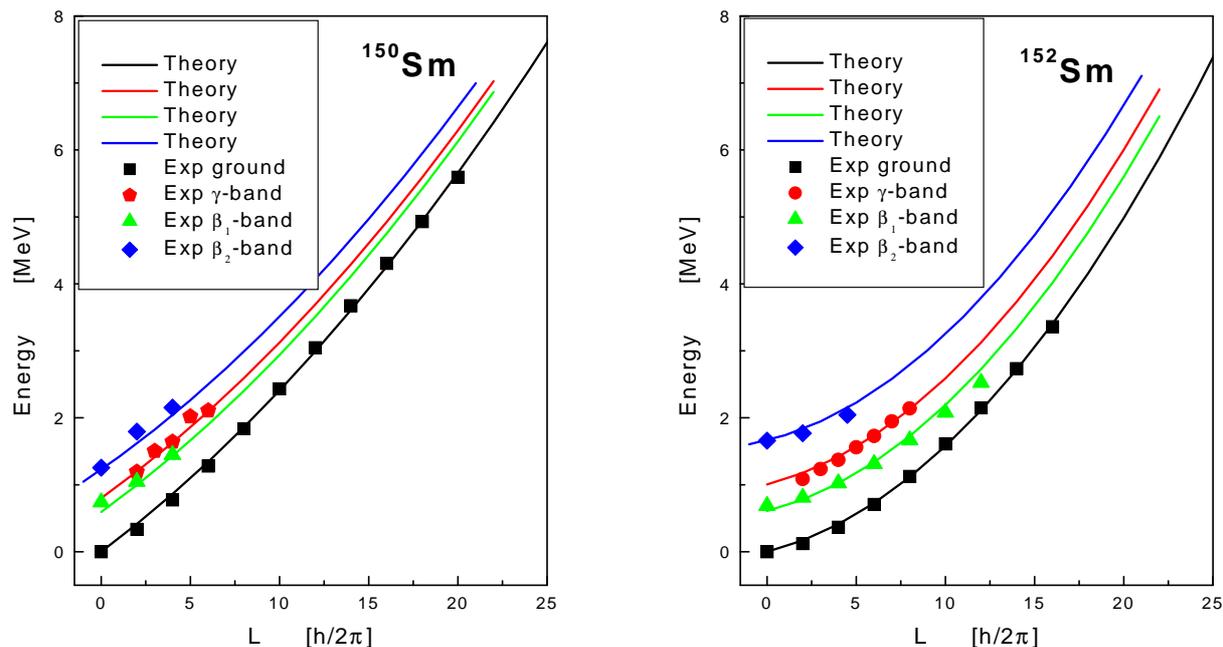
промяната на  $N_{\min}$  с  $\Delta N = 4$  и  $\Delta\omega = 2$ , така че най-ниското  $L$  на главата на ивицата е взето от  $N_{\min}$  мултиплета и  $\Delta L = 2$  за  $\beta_i$ -ивиците с  $K_i^\pi = 0_i^+$  ( $i$  брой  $0^+$  възбудените състояния по реда на нарастване на техните енергии) и  $\Delta L = 1$  за  $K^\pi = L^+$  ( $L \neq 0$ ,  $L = 2, 4, \dots$ ) ( $J \equiv L \neq 0 = 2, 4, \dots$ ), както се предписва от правилата на редукция за веригата  $SU(3) \supset SO(3)$  (16.12). Стойностите за  $(\lambda, \mu)$  на  $su(3)$  мултиплетите, на които съответстват състоянията от възбудените ивици са получени чрез фиксиране на стойността на квантовото число  $\nu$  на  $o(2)$ . Например, състоянията на първите възбудени  $\beta$ - и  $\gamma$ -ивици могат да принадлежат на два различни диагонала ( $(\lambda, \mu = 0)$ ,  $K = 0$  и/или  $(\lambda, \mu = 2)$ ,  $K = 0$  или  $K = 2$ , така че  $\nu = L$  или  $\nu = L - 2$  за четните  $L$  и съответно  $\nu = L - 1$  за нечетните  $L$  и  $\Delta\nu = 2$  за всички съседни  $su(3)$  мултиплети в разглежданата ивица. Това многообразие от възможни избори за състоянията на възбудените ивици дава възможност да се възпроизведе правилното поведение на тези ивици една спрямо друга, което се мени много дори за съседни ядра, заради смесването на вибрационните и ротационните моди [A10].

От (19.41) се вижда, че има 5 свободни параметри, които ние определяме чрез фитиране на теоретичните предсказания за енергиите на основната и на няколко възбудени ивици към експерименталните данни [92], използвайки  $\chi^2$ -процедура. Получените параметри, броят  $m$  на експерименталните състояния,  $\chi^2$ - и  $N_{\min}$ , както и отношението  $R_4 = \frac{E_4}{E_2}$  са дадени в Таблица 19.2 за четири различни ядра.

Таблица 19.2: Таблица с получените от фитирането стойности на моделните параметри.

Ядра	$s$	$N_{\min}$	bands	$\chi^2$	Параметри
$^{168}\text{Yb}$ $R_4 = 3.26$	20	0	ground	0.0047	$a = 0.03493$ $b = 0.00059$
	6	20	$\gamma$	0.0006	$\alpha_6 = 0.00055$
	4	20	$\beta_1$	0.0073	$\alpha_2 = -0.00245$
	3	24	$\beta_2$	0.0125	$\beta_3 = 0.00229$
$^{232}\text{Th}$ $R_4 = 3.28$	15	0	ground	0.0050	$a = 0.01986$ $b = 0.00037$
	9	24	$\gamma$	0.0002	$\alpha_6 = 0.00035$
	4	20	$\beta_1$	0.0022	$\alpha_2 = -0.00096$
	2	28	$\beta_2$	0.0054	$\beta_3 = 0.00145$
	3	38	$K = 4$	0.0020	
$^{150}\text{Sm}$ $R_4 = 2.32$	11	0	ground	0.0057	$a = 0.09705$ $b = 0.00016$
	5	12	$\gamma$	0.0089	$\alpha_6 = 0.00042$
	3	6	$\beta_1$	0.0083	$\alpha_2 = 0.00064$
	3	12	$\beta_2$	0.0198	$\beta_3 = 0.00123$
$^{152}\text{Sm}$ $R_4 = 3.01$	9	0	ground	0.0022	$a = 0.02971$ $b = 0.00057$
	7	24	$\gamma$	0.0023	$\alpha_6 = 0.00056$
	7	14	$\beta_1$	0.0105	$\alpha_2 = 0.00229$
	3	28	$\beta_2$	0.0088	$\beta_3 = 0.00229$

Първите две  $^{168}\text{Yb}$  и  $^{232}\text{Th}$  са добре деформирани ядра от областта на редките земи и леките актиниди. Избрали сме тези ядра, тъй като те имат доста дълги, достигащи до много високи ъглови моменти, основни ивици. От експерименталните отношения  $R_4 = \frac{E_4}{E_2}$  за енергиите на основните ивици, които са  $R_4 = 3.26$  за  $^{168}\text{Yb}$  и  $R_4 = 3.28$  за  $^{232}\text{Th}$ , се вижда че основните ивици на тези две ядра имат поведение много близко до това на типичните ротатори. Стойностите на  $N_{\min}$  за главите, от които започват разглежданите възбудени ивици са доста високи. Доброто съгласие между теорията и експеримента за основната, първите две  $\beta$ - и  $\gamma$ - ивици за  $^{168}\text{Yb}$ , и за основната, първите две  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $K = 4$  ивици за  $^{232}\text{Th}$  може да се види на Фигури 19.1. Получените параметри (вж. Таблица 19.2) в двата случая са от един и същ порядък, но за  $^{168}\text{Yb}$  те имат по-големи стойности. И в двата случая главите  $0^+$  на  $\beta_1$ -ивичите са разположени под главите  $2^+$  за  $\gamma$ - ивицата [A10]. В допълнение, от фигурите може ясно да се види различната степен на израждане на състоянията



Фигура 19.2: Сравнение между експерименталните енергии (*Experiment*) и нашите пресмятания (*Theory*), използвайки стойностите на моделните параметри дадени в Таблица 19.2 за основната и възбудени ивици на ядрата  $^{150}\text{Sm}$  (ляво) и  $^{152}\text{Sm}$  (дясно).

с четни  $L$  на  $\gamma$ - и първите  $\beta$ -ивици, което е типично свойство за добре деформираните ядра. Допълнително в Таблица 19.2 сме дали и резултатите за  $^{150}\text{Sm}$  и  $^{152}\text{Sm}$ , които се разглеждат като преходни ядра. Първото с  $R_4 = 2.32$  е преходно между  $\gamma$ - нестабилните ( $R_4 = 2.5$ ) и вибрационните ( $R_4 = 2.0$ ) ядра, а второто даже е ядро в критична точка на фазов преход или промяна на формата, т. е. с доказана  $X(5)$  симетрия [343]. Както е показано на Фигура 19.2 експерименталните данни са възпроизведени доста добре, в частност за ядрото  $^{152}\text{Sm}$ , където  $\beta_1$ - и  $\gamma$ -ивиците са добре разделени. Стойностите на  $N_{\min}$  за тези две ядра се променят повече и параметърът  $\alpha_2$  си сменя знака. Стойностите на  $\chi^2$  са доста добри в представените примери, което подсказва че такова приложение е подходящо за описанието на доста широк клас от ядра, и най-главното за ядра, в които има смесване на ротационните и вибрационните степени на свобода.

Най-важното от физична гледна точка свойство на настоящото ново приложение на МВВБ, което води до успешното описание на ядрените спектри с различни типове колективност, е разглеждането на двете ядрени подсистеми – протонната и неутронната и взаимодействието между тях. Това е направено в рамките на симплектичната симетрия, която позволява промяната на броя на бозоните от всеки вид.

## 20. Връзка между Модела на взаимодействиящите векторни бозони и различни версии на Модела на взаимодействиящите бозони

В теория на ядрото са предложени много версии на Модела на взаимодействиящите бозони (МВБ) – 1, 2, 3, 4 [86, 275, 344, 345], в които основни строителни блокове са  $s$ - и  $d$ - бозони с различни стойности на изоспина  $T$  ( $F$ -спин) и спина  $S$ .

Модела на взаимодействиящите векторни бозони (МВВБ) [A18, 288], където ядрените състояния се считат като изградени от четен брой  $p$ -бозони с изоспин  $T = \frac{1}{2}$ , е малко по-различен. В някои отношения МВВБ е подобен на стандартния МВБ (например има точно решима  $su(3)$  ротационна граница и т.н.), но съществуват и някои разлики. Следователно естествено възниква въпросът за връзката между МВВБ и съществуващите версии на МВБ. Отговорът на този въпрос се получава, като се проектират бозонните двойки с ъглов момент  $L$  и изоспин  $T$  ( $LT = 01, 21, 10$ ) върху пространството на идеалните  $S$ - и  $D$ - бозони с изоспин  $T = 1$  и  $P$ -бозони и с  $T = 0$ .

Методиката на бозонното проектиране е използвана изключително за микроскопичното обосноваване на МВБ [346], но може да се приложи и за решаването на поставения по горе въпрос. Некомпактната алгебра  $sp(12, R)$  е алгебрата на динамична симетрия на МВВБ. Алгебричната структура на модела позволява използването на редица резултати получени за бозонното проектиране на симплектичните алгебри [7, 347]. От особена важност в случая са векторните кохерентни състояния (ВКС) и смесената бозонна реализация [348]. Теорията на ВКС представлява едно разширение на общата теория на кохерентните състояния [349], което позволява разглеждането на функции с векторни стойности (vector-valued). От пръв поглед този подход изглежда като усложнение на проблема, но всъщност той води до сериозното му упростяване, тъй като позволява разделянето на вътрешните степени на свобода от колективните, като по този начин значително улеснява описанието на последните. Освен това напоследък е усъвършенствана  $\mathbb{K}$  - матричната техника, която води до точното аналитично решаване на отдавна стоящия проблем за трансформирането на Дайсоновото [350] представяне в представяне на Холстейн-Примаков [324]. Нашата цел е да получим бозонна реализация на генераторите на  $sp(2d, R)$  алгебрата, изразени като двойно сферични тензори по отношение на  $SO_L(3) \otimes SU_T(2)$  групата. Подобен проблем се разглежда в редица статии [46, 351], където представянията на компакт-

ната  $sp(2d)$  алгебра се проектират върху бозонно пространство. Предложената в тях методика за получаването на бозонните образи на генераторите на  $sp(2d)$  алгебрата представени като тензори, налага решаването на някои допълнителни уравнения. Освен това този метод е приложим само към вакуумното представяне и не може да се използва за получаване на бозонната реализация в общия случай. Ние използваме различен подход, основан на по-обща методика [7, 347, 348, 352–354], която позволява търсените резултати да се получат директно, без допълнителни изчисления.

Както и в случая на проектиране на фермионното пространство върху бозонното [45, 355], състоянията на МВВБ се проектират само върху част от пространството (физическото подпространство) на МВБ-3.5. Така възниква проблема за отделянето на физическото подпространство и определянето и отстраняването на нефизическите (духовите) състояния. Трябва да се отбележи, че този проблем се обсъжда в детайли при проектирането на фермионните двойки (т.е. при представянията на компактните алгебри) в [355]– [356]. При бозонното проектиране на бозонни двойки, т.е. при представянията на некомпактните алгебри, проблемът за духовите състояния не е бил разглеждан до сега. Като причина за възникването на духови състояния при проектирането на фермионните двойки обикновено се счита отчитането на Принципа на Паули за тях. Нашите изследвания показват, че духови състояния възникват също и в случая на бозон-бозонно проектиране. Метод за идентификацията и отстраняването на духовите състояния от нисколежащата част на енергетичния спектър е предложен от Парк [45]. При разглеждания тук проблем, този метод също е приложим, тъй като е основан на чисто групово теоретичен анализ.

## 20.1 Алгебрична конструкция на $sp(2d, R)$

Алгебрата на динамична симетрия на МВВБ е  $sp(12, R)$ . Генераторите на тази алгебра са построени от операторите на раждане и унищожение  $u_{f\tau}^{lm}, u_{f\tau}^{\dagger lm}$ , удовлетворяващи комутационните съотношения

$$\left[ u_{f\tau}^{lm}, u_{f'\tau'}^{\dagger l'm'} \right] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{ff'} \delta_{\tau\tau'} . \quad (20.1)$$

В разглеждания МВВБ  $l = 1, (-l \leq m \leq l)$  и  $f = \frac{1}{2}, (-f \leq \tau \leq f)$ , т. е. бозоните са тримерни вектори спрямо  $so(3)$  алгебрата. Както беше показано в Глава 15 [A18] генераторите на алгебрата  $sp(12, R)$  могат да се реализират, като двойни тензори с ранг  $L$  по отношение на алгебрата на ъгловия момент  $so_L(3)$  и с ранг  $T$  относно алгебрата на псевдоспина  $su_T(2)$   $F_{Tt}^{LM} = (G_{Tt}^{LM})^\dagger$  и  $A_{Tt}^{LM}$ , дадени с изразите 15.8а) и (15.8б).

В общия случай на алгебрата  $sp(2d, R)$ , където  $d = (2l + 1)(2f + 1)$  се използва същата реализация.

От комутационните съотношения (20.1) се получават комутационните съотношения между мултиполните оператори  $A_{Tt}^{LM}$

$$\begin{aligned} [A_{T_1 t_1}^{L_1 M_1}, A_{T_2 t_2}^{L_2 M_2}] &= \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 \sum_{LT} [(-1)^{L+T} - (-1)^{L_1+L_2+T_1+T_2}] \\ &\times C_{L_1 M_1, L_2 M_2}^{LM} C_{T_1 t_1, T_2 t_2}^{Tt} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} A_{Tt}^{LM}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

В горното уравнение и по-нататък се използва означението  $\hat{L} = \sqrt{2L+1}$ , а с къдрите скоби  $\left\{ \right\}$  са означени  $6-j$  символи. От (20.2) се вижда, че операторите  $A_{Tt}^{LM}$ , които не променят броя на бозоните, генерират максималната компактна подалгебра  $u(d)$  на  $sp(2d, R)$ . Операторът на общия брой бозони

$$N = \sum_{m\tau} u_\tau^\dagger u_\tau^m$$

е свързан с мултиполния оператор  $A_{00}^{00}$  по следния начин

$$N = \sqrt{(2l+1)(2f+1)} A_{00}^{00} = \sqrt{d} A_{00}^{00}.$$

Комутационните съотношения за останалите  $sp(2d, R)$  генератори са

$$\begin{aligned} [A_{T_1 t_1}^{L_1 M_1}, G_{T_2 t_2}^{L_2 M_2}] &= -2\hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 (-1)^{M_1+t_1} \sum_{LT} C_{L_1 M_1, L_2 M_2}^{LM} C_{T_1 t_1, T_2 t_2}^{Tt} \\ &\times \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} G_{Tt}^{LM}, \end{aligned} \quad (20.3)$$

$$\begin{aligned} [G_{T_1 t_1}^{L_1 M_1}, F_{T_2 t_2}^{L_2 M_2}] &= \delta_{L_1 L_2} \delta_{M_1 M_2} \delta_{T_1 T_2} \delta_{t_1 t_2} + 2\hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 (-1)^{M_1+t_1} \\ &\times \sum_{LT} C_{L_1 M_1, L_2 M_2}^{LM} C_{T_1 t_1, T_2 t_2}^{Tt} \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} A_{Tt}^{LM}, \end{aligned} \quad (20.4)$$

$$[F_{T_1 t_1}^{L_1 M_1}, F_{T_2 t_2}^{L_2 M_2}] = [G_{T_1 t_1}^{L_1 M_1}, G_{T_2 t_2}^{L_2 M_2}] = 0. \quad (20.5)$$

Тези комутационни съотношения са подобни на комутационните съотношения между съответните бифермионни оператори [46], като се отличават по знаците пред някои от членовете.

## 20.2 Смесена Дайсонова бозонна реализация на $sp(2d, R)$

За да се намери връзката между МВВБ и стандартните версии на МВБ, алгебрата  $sp(12, R)$  генерирана от операторите  $A_{Tt}^{LM}$ ,  $F_{Tt}^{LM}$ ,  $G_{Tt}^{LM}$  трябва да се изобрази върху пространството на  $S$ ,  $D$ , и  $P$  бозони с изоспинове 1, 1 и 0 съответно. Първо ще

разгледаме общата конструкция на Дайсоновото изображение на  $sp(2d, R)$  алгебрата и след това ще дадем в явен вид изображението на генераторите на  $sp(12, R)$ .

За да се определят векторните кохерентни състояния (ВКС) за групата  $Sp(2d, R)$ , първо се отделя максималната компактна подалгебра  $u(d) \subset sp(2d, R)$ , която съдържа Картановата подалгебра като в резултат се реализира обобщеното Гаусово разложение

$$g = n_- + h + n_+, \quad (20.6)$$

където  $n_-(n_+)$  е нилпотентната подалгебра от понижаващите  $G_{Tt}^{LM}$  (повишаващите  $F_{Tt}^{LM}$ ) оператори, а  $h$  всъщност е  $u(d)$  алгебрата.

Съгласно комутационните съотношения (20.3)–(20.5) операторите  $G_{Tt}^{LM}$  и  $F_{Tt}^{LM}$  са тензори по отношение на  $u(d)$  подалгебрата. Произволно неприводимо представяне  $[\sigma]$  принадлежащо на дискретната положителна серия на  $sp(2d, R)$  алгебрата може да бъде развита като се използват неприводимите представяния  $[\Lambda]$  на  $u(d)$  алгебрата. От всички тези представяния, от особена важност е представянето с най-ниско тегло определено от съотношението

$$G_{Tt}^{LM} |\sigma\Lambda\rangle = 0. \quad (20.7)$$

Съвкупността от състояния  $\{|\sigma\Lambda\rangle\}$  е базис на съответното представяне с най-ниско тегло и  $|\sigma\Lambda\rangle$  е вектора с най-високо (старше) тегло относно  $h$  подалгебрата на  $sp(2d, R)$ .

ВКС се въвеждат като

$$|Z\rangle = \sum_{\lambda} \exp\left(\sum_{LMTt} Z_{Tt}^{*LM} F_{Tt}^{LM}\right) |\sigma\Lambda\rangle, \quad (20.8)$$

където  $Z_{Tt}^{LM}$  са комплексни параметри и  $*$  означава комплексно спрягане.

ВКС представянето на произволно състояние  $|\Psi\rangle$  се дефинира като

$$|\Psi(Z)\rangle = \sum_{\lambda} |\sigma\Lambda\rangle \langle\sigma\Lambda| \exp\left(\sum_{LMTt} Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM}\right) |\Psi\rangle. \quad (20.9)$$

ВКС представянето на оператор  $E$  е

$$\begin{aligned} \Gamma(E)|\Psi(Z)\rangle &= \sum_{\lambda} |\sigma\Lambda\rangle \langle\sigma\Lambda| \exp\left(\sum_{LMTt} Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM}\right) E|\Psi\rangle \\ &= \sum_{\lambda} |\sigma\Lambda\rangle \langle\sigma\Lambda| \sum_n \frac{1}{n!} \left[ Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM}, \dots \left[ Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM}, E \right] \underbrace{\quad}_n \right] \\ &\quad \times \exp\left(\sum_{LMTt} Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM}\right) |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (20.10)$$

е еквивалентно на частен диференциален оператор относно променливата  $Z_{Tt}^{LM}$ .

Тъй като векторите  $|\sigma\Lambda\rangle$  принадлежат на представянето с най-ниско тегло получаваме

$$\sum_{\lambda} |\sigma\Lambda\rangle \langle \sigma\Lambda | F_{Tt}^{LM} \exp \left( \sum_{LMTt} Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM} \right) |\Psi\rangle = 0 . \quad (20.11)$$

Вътрешният оператор  $\mathcal{A}_{Tt}^{LM}$  действа върху базисните вектори  $\{|\sigma\Lambda\rangle\}$  на представянето с най-ниско тегло на  $u(d)$  алгебрата, по стандартен начин

$$\sum_{\lambda} |\sigma\Lambda\rangle \langle \sigma\Lambda | A_{Tt}^{LM} \exp \left( \sum_{LMTt} Z_{Tt}^{LM} G_{Tt}^{LM} \right) |\Psi\rangle = \mathcal{A}_{Tt}^{LM} |\Psi(Z)\rangle . \quad (20.12)$$

Приема се, че операторите  $\mathcal{A}_{Tt}^{LM}$  комутират с  $Z_{Tt}^{LM}$  и  $\partial/\partial Z_{Tt}^{LM}$ .

С помощта на комутационните съотношения (20.3)–(20.5) на  $sp(2d, R)$  алгебрата и формулите (20.10)–(20.12) се получава явния вид на ВКС представянията на генераторите  $G_{Tt}^{LM}$ ,  $F_{Tt}^{LM}$  и  $A_{Tt}^{LM}$ . Това води до Дайсонова бозонна реализация на алгебрата  $sp(2d, R)$  в термините на  $u(d)$ -бозонната алгебра, като се използва изоморфизма

$$Z_{Tt}^{LM} \rightarrow b_{Tt}^{\dagger LM} \quad \frac{\partial}{\partial Z_{Tt}^{LM}} \rightarrow b_{Tt}^{LM} . \quad (20.13)$$

Последната алгебра е пряка сума на  $u(d)$  алгебрата и  $hw(d(d+1)/2)$  алгебрата на Хайзенберг-Вейл.

Идеалните бозонни оператори на раждане и унищожение  $b_{Tt}^{\dagger LM}$  и  $b_{Tt}^{LM}$  с ъглов момент  $L$  и изоспин  $T$  удовлетворяват стандартните бозонни комутационни съотношения

$$\left[ b_{Tt}^{LM}, b_{T't'}^{\dagger L'M'} \right] = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \delta_{TT'} \delta_{tt'} \quad (20.14)$$

$$\tilde{b}_{Tt}^{LM} = (-1)^{L+M} (-1)^{T+t} b_{T-t}^{L-M} . \quad (20.15)$$

В интересувания ни случай на  $sp(12, R)$  алгебрата ще работим с  $S$ - и  $D$ - бозони с изоспин  $T = 1$  и  $P$ -бозон с  $T = 0$  като (20.14) и (20.15) приемат следния вид

$$\begin{aligned} [S_t, S_{t'}^{\dagger}] &= \delta_{tt'} \\ [P^M, P^{\dagger M'}] &= \delta_{MM'} \end{aligned} \quad (20.16)$$

$$\begin{aligned} [D_t^M, D_{t'}^{\dagger M'}] &= \delta_{MM'} \delta_{tt'} \\ \tilde{S}_t &= (-1)^{1+t} S_{-t} \\ \tilde{D}_t^M &= (-1)^{2+M} (-1)^{1+t} D_{-t}^{-M} \\ \tilde{P}^M &= (-1)^{1+M} P^{-M} . \end{aligned} \quad (20.17)$$

Дайсоновите образи на  $G_{Tt}^{LM}$  генераторите приемат следния прост вид:

$$\rho_D(G_{Tt}^{LM}) = b_{Tt}^{LM} . \quad (20.18)$$

Дайсоновите образи на  $A_{Tt}^{LM}$  генераторите

$$\rho_D(A_{Tt}^{LM}) = \mathcal{A}_{Tt}^{LM} + 2(-1)^{L+T} \sum_{L_1 L_2 T_1 T_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} (b_{T_1}^{\dagger L_1} \otimes \tilde{b}_{T_2}^{L_2})_{Tt}^{LM} \quad (20.19)$$

съдържат вътрешните оператори  $\mathcal{A}_{Tt}^{LM}$  на  $u(d)$  алгебрата, които комутират с бозонните оператори на раждане и унищожение  $b_{Tt}^{\dagger LM}, b_{Tt}^{LM}$ . И накрая Дайсоновите образи на  $F_{Tt}^{LM}$  генераторите са определени от изразите

$$\rho_D(F_{Tt}^{LM}) = b_{Tt}^{\dagger LM} + 2 \sum_{L_1 L_2 T_1 T_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} (-1)^{L_2+T_2} \left[ (b_{T_1}^{\dagger L_1} \otimes \mathcal{A}_{T_2}^{L_2})_{Tt}^{LM} + (-1)^{L_2+T_2} \sum_{L_1 L_2 T_1 T_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 \times \begin{Bmatrix} L_3 & L_4 & L_2 \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_3 & T_4 & T_2 \\ f & f & f \end{Bmatrix} \left( (b_{T_1}^{\dagger L_1} \otimes (b_{T_3}^{\dagger L_3} \otimes \tilde{b}_{T_4}^{L_4})_{T_2}^{L_2})_{Tt}^{LM} \right) \right]. \quad (20.20)$$

Последната формула може да се напише по различен начин като се използва друга схема на сдвояване на тензорите в последния член. Съответната трансформация може да се получи като се използва стандартната техника за пресвързване на ъгловите моменти и в резултат получаваме

$$\rho_D(F_{Tt}^{LM}) = b_{Tt}^{\dagger LM} + 2 \sum_{L_1 L_2 T_1 T_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{T}_1 \hat{T}_2 \begin{Bmatrix} L_1 & L_2 & L \\ l & l & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_2 & T \\ f & f & f \end{Bmatrix} \times (-1)^{L_2+T_2} (b_{T_1}^{\dagger L_1} \otimes \mathcal{A}_{T_2}^{L_2})_{Tt}^{LM} + 2 \sum_{L_1 L_3 L_4 L_5 T_1 T_3 T_4 T_5} \hat{L}_1 \hat{L}_3 \hat{L}_4 \hat{L}_5 \hat{T}_1 \hat{T}_3 \hat{T}_4 \hat{T}_5 \times \begin{Bmatrix} L_1 & L_3 & L_5 \\ l & l & L_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 & T_3 & T_5 \\ f & f & T_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & & \\ l & & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T & & \\ f & & T \end{Bmatrix} \left( (b_{T_1}^{\dagger L_1} \otimes b_{T_3}^{\dagger L_3})_{T_5}^{L_5} \otimes \tilde{b}_{T_4}^{L_4} \right)_{Tt}^{LM}. \quad (20.21)$$

Дайсоновите образи на генераторите  $F_{Tt}^{LM}$  могат да се представят и в компактен вид [348]. За да го получим използваме Дайсоновия образ на оператора на Казимир от втори ред за алгебрата  $u(d)$ , който се записва като

$$C_2(u(d)) = \sum_{LT} (-1)^L (-1)^T \hat{L} \hat{T} \left( \rho_D(A_T^L) \otimes \rho_D(A_T^L) \right)_{00}^{00}. \quad (20.22)$$

Удобно е да се раздели  $\rho_D(A_{Tt}^{LM})$  на два члена:

$$\rho_D(A_{Tt}^{LM}) = \mathcal{A}_{Tt}^{LM} + \rho(A_{Tt}^{LM}). \quad (20.23)$$

Нека въведем означението

$$C_2^c(u(d)) = \sum_{LT} (-1)^{L+T} \hat{L}\hat{T} \left( \rho(A_T^L) \otimes \rho(A_T^L) \right)_{00}^{00}. \quad (20.24)$$

Чрез пряко пресмятане може да се покаже, че

$$\rho_D(F_{Tt}^{LM}) = -\frac{d-1}{2} b_{Tt}^{\dagger LM} + \frac{1}{2} \left( C_2(u(d)) - \frac{1}{2} C_2^c(u(d)) b_{Tt}^{\dagger LM} \right). \quad (20.25)$$

Съгласно общия израз (20.19), Дайсоновият образ на първичния оператор  $N$  на броя на  $u$ -бозоните е

$$\rho_D(N) = \mathcal{N} + 2N_b, \quad (20.26)$$

където

$$N_b = \sum_{LT} \hat{L}\hat{T} \left( b_T^{\dagger L} \otimes \tilde{b}_T^L \right)_{00}^{00} \quad (20.27)$$

е оператора на броя на  $b$ -бозоните.

Експлицитният вид на мултиполните генератори  $A_{Tt}^{LM}$  за алгебрата на динамична симетрия  $sp(12, R)$  на МВВБ е

$$\rho_D(A_{00}^{1M}) = \mathcal{A}_{00}^{1M} + \sqrt{\frac{15}{2}} (D^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{1M} + \frac{1}{\sqrt{2}} (P^\dagger \otimes \tilde{P})_{00}^{1M} \quad (20.28a)$$

$$\begin{aligned} \rho_D(A_{00}^{2M}) &= \mathcal{A}_{00}^{2M} + \sqrt{\frac{7}{2}} (D^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{2M} - \frac{1}{\sqrt{2}} (P^\dagger \otimes \tilde{P})_{00}^{2M} \\ &+ \sqrt{2} \left( (S^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{2M} + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_{00}^{2M} \right) \end{aligned} \quad (20.28б)$$

$$\rho_D(A_{1t}^{00}) = \mathcal{A}_{1t}^{00} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( (S^\dagger \otimes \tilde{S})_{1t}^{00} + \sqrt{5} (D^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{00} \right) \quad (20.28в)$$

$$\begin{aligned} \rho_D(A_{1t}^{1M}) &= \mathcal{A}_{1t}^{1M} - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( (S^\dagger \otimes \tilde{P})_{1t}^{1M} + (P^\dagger \otimes \tilde{S})_{1t}^{1M} \right) + \sqrt{5} (D^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{1M} \\ &+ \sqrt{\frac{5}{6}} \left( (D^\dagger \otimes \tilde{P})_{1t}^{1M} + (P^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{1M} \right) \end{aligned} \quad (20.28г)$$

$$\begin{aligned} \rho_D(A_{1t}^{2M}) &= \mathcal{A}_{1t}^{2M} + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( (S^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{2M} + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_{1t}^{2M} \right) + \sqrt{\frac{7}{3}} (D^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{2M} \\ &+ \sqrt{\frac{3}{2}} \left( (S^\dagger \otimes \tilde{D})_{1t}^{2M} + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_{1t}^{2M} \right). \end{aligned} \quad (20.28д)$$

Дайсоновите образи  $\rho_D(A_{Tt}^{LM})$  могат да се използват за построяване на образа на Хамилтониана на модела.

### 20.3 Духови състояния

По нататък ще се ограничим върху изследването само на най-простия вид Дайсоново проектиране, което съответства на вакуумното (скаларното) представяне на  $u(d)$ -бозонната алгебрата, където

$$\mathcal{A}_{Tt}^{LM} = 0 \quad \text{i.e.} \quad A_{Tt}^{LM} |\sigma\Lambda\lambda\rangle = 0. \quad (20.29)$$

Този частен случай на бозонно проектиране е достатъчен за да се изследват връзките на МВВБ с различните версии на МВБ.

Добре известно е [45, 355], че Дайсоновото бозонно проектиране на фермионно пространство върху пространството на идеални бозони поражда духови състояния. От Парк (Park) [45] беше показано, че този проблем може да бъде решен само с чисто алгебричен анализ. В което следва ще покажем, че проектирането на бозонни двойки върху пространството на идеални бозони води до подобен проблем и подходът на Парк може да се прилага и в случая на бозон-бозонно проектиране.

В разглеждания случай, съществуват само два типа неприводими представяния на  $sp(2d, R)$  алгебрата – четни и нечетни, които могат да се конструират от  $d = (2l + 1)(2f + 1)$  оператори на раждане  $u_{f\tau}^{\dagger lm}$  [6]. При редукцията  $sp(2d, R) \supset u(d)$  неприводимите представяния на  $sp(2d, R)$  се разцепват на безкраен брой симетрични неприводими представяния на  $u(d)$  от вида  $[N, 0, \dots, 0]$ , където  $N = 0, 2, 4, \dots$  за четните неприводими представяния на  $sp(2d, R)$  и  $N = 1, 3, 5, \dots$  за нечетните неприводими представяния на  $sp(2d, R)$ . Вълновата функция, съответстваща на определен брой бозони  $N$  принадлежи на симетричното неприводимо представяне  $[N]$  на  $u(d)$  алгебрата и се конструира посредством действието на операторите на раждане  $u_{f\tau}^{\dagger lm}$  върху вакуумното състояние:

$$\prod_{i=1}^N u_{f\tau_i}^{\dagger lm_i} |0\rangle \quad (20.30)$$

където  $|0\rangle$  е  $u$ -бозонния вакуум.

Двубозонните оператори  $F_{Tt}^{LM}$  на некомпактната симплектична алгебра  $sp(2d, R)$  се трансформират по отношение на  $u(d)$  алгебрата като симетрични тензори от ранг [2]. След Дайсоновото проектиране, получените образи  $\rho_D(F_{Tt}^{LM})$  имат същите тензорни свойства спрямо  $u(d)$  алгебрата. Вълновата функция в пространството на идеалните бозони се построява използвайки операторите  $b_{Tt}^{\dagger LM}$ :

$$\prod_{i=1}^{N_b} b_{T_i t_i}^{\dagger L_i M_i} |0\rangle \quad (20.31)$$

където  $|0\rangle$  е  $b$ -бозонния вакуум.

Двубозонните комбинации на новите бозонни оператори

$$b_{Tt}^{\dagger LM} b_{T't'}^{L'M'} \quad (20.32)$$

могат да се разглеждат като генератори на алгебрата  $u(d(d + 1)/2)$  и вълновата функция  $|n\rangle$ , съответстваща на фиксиран брой бозони  $N_b$  принадлежи на симетричното неприводимо представяне  $[N_b]$  на тази алгебра. От своя страна представянето  $[N_b]$  е приводимо относно алгебрата  $u(d)$ . То може да се разложи по неприводимите

представяния на  $u(d)$  алгебрата [322] по следния начин:

$$[N_b]_{U(d(d+1)/2)} = \sum_g [g]_{U(d)} \quad (20.33)$$

където

$$[g] = [g_1, g_2, \dots, g_d] \quad g_1 \geq g_2 \geq \dots \geq g_d \quad \sum_{k=1}^d g_k = 2N_b = N$$

и  $g_k$  са четни положителни цели числа.

Обаче истинските вълнови функции принадлежат само на симетричното неприводимо представяне  $[N]$  на  $u(d)$ . В резултат само частта от пространството на идеалните бозони, която съдържа състоянията с правилни трансформационни свойства по отношение на  $u(d)$  алгебрата ще съответства на истинската вълнова функция. Тези състояния образуват физическото подпространство. В разлеждания проблем симетричното неприводимо представяне  $[N]$  се появява за всяка стойност на  $N_b$  в разлагането (20.33). Така че, истинската (физическата) компонента винаги съществува във вълновата функция, за разлика от случая на проектиране на бифермионни оператори, където принципът на Паули прави духови всички състояния с брой на бозоните  $N_b > d/2$  ( $d$  е броят на едночастичните състояния разрешени за фермионите). Друга разлика във фермионното проектиране е, че двубозонните комбинации генерират  $u(d(d-1)/2)$  алгебра.

Размерността на бозонното пространство съответстващо на симетричното неприводимо представяне  $[N_b]$  на  $u(d(d+1)/2)$  алгебрата е

$$\dim[N_b] = C_{N_b + \frac{d(d+1)}{2} - 1}^{N_b} \quad (20.34)$$

където  $C_m^m$  е биномиален коефициент. От друга страна размерността на физическото подпространство, съответстващо на симетричното неприводимо представяне  $[2N_b]$  на  $u(d)$  алгебрата е

$$\dim[2N_b] = C_{2N_b + d - 1}^{2N_b} \quad (20.35)$$

Следователно колкото по-голям е броят на бозоните  $N_b$ , толкова по-малка част от пространството на идеалните бозони се заема от физическото подпространство.

Като илюстриращ пример представяме случая за алгебричната структура на МВВБ. Разлагането на симетричните неприводими представяния  $[N_b]$  на  $u(21)$  алгебрата образувана от билинейните комбинации на идеалните бозонни оператори  $S_i, S_i^\dagger, P^m$ ,

$P^{\dagger m}$ ,  $D_t^m$ ,  $D_t^{\dagger m}$  в термоните на неприводимите представяния на  $u(6)$  алгебрата е

$U(21)$	$U(6)$
[1]	[2]
[2]	[4]; [22]
[3]	[6]; [42], [222]
[4]	[8]; [62], [44], [422], [2222]
$\vdots$	$\vdots$
[ $N_b$ ]	[ $2N_b$ ]; ...

Аналогично на [45] може да се въведе класификационен оператор  $\hat{S}$  по следния начин

$$\hat{S} = \hat{N}_H^2 - \hat{N}_{HN}^2 \quad (20.36)$$

където

$$\hat{N}_H^2 = \sum_{m_1 m_2 \tau_1 \tau_2} u_{\tau_1}^{\dagger m_1} u_{\tau_1}^{m_1} u_{\tau_2}^{\dagger m_2} u_{\tau_2}^{m_2} \quad (20.37)$$

$$\hat{N}_{HN}^2 = \sum_{m\tau} u_{\tau}^{\dagger m} u_{\tau}^m + \sum_{m_1 m_2 \tau_1 \tau_2} u_{\tau_1}^{\dagger m_1} u_{\tau_2}^{\dagger m_2} u_{\tau_1}^{m_1} u_{\tau_2}^{m_2} . \quad (20.38)$$

По-точно казано операторът  $\hat{S}$  е анулиращ оператор, т. е.  $\hat{S} = 0$ , тъй като  $N_{HN}^2$  е всъщност оператора  $N_H^2$  представен в нормален ред. Неговия Дайсонов образ е

$$S = 4N_b N_b - 2N_b - 2 \sum_{LMTt} \rho(F_{Tt}^{LM}) b_{Tt}^{LM} . \quad (20.39)$$

Той е от типа на операторите на Мајорана, чиито собствени стойности зависят само от  $U(d)$  симетрията. Операторът  $S$  е скалар по отношение на  $u(d)$  алгебрата и съдържа едно- и двучастични бозонни оператори. Следователно той може да се запише също като линейна комбинация на едно и двучастичните оператори на Казимир на  $u(d)$  алгебрата

$$S = N(N + d - 1) - C_2(u(d)) . \quad (20.40)$$

Собствените стойности на оператора на Казимир  $C_2(u(d))$  [357] са

$$C_2(u(d))_{[g]} = \sum_{i=1}^d g_i (g_i + d + 1 - 2i) . \quad (20.41)$$

В частност за симетричното представяне  $[N]$  се получава

$$C_2(u(d))_{[N]} = N(N + d - 1) , \quad (20.42)$$

а за антисиметричното представяне  $[1^N]$  се получава

$$C_2(u(d))_{[1^N]} = N(N - d - 1) . \quad (20.43)$$

Собствените стойности на оператора  $S$  са равни на нула за симетричното неприводимо представяне на  $u(d)$  алгебрата, докато те са положителни за всички други неприводими представяния, които се появяват. В резултат включването в Хамилтониана на  $S$  оператора с подходящо избран коефициент може да отмести всички духови състояния във високолежащата част на енергетичния спектър без това да влияе на физическите собствени стойности и собствени функции. Други начини за отделяне на духовите състояния са дадени в [356, 358]

#### 20.4 Възстановяване на ермитовостта след Дайсоновото проектиране

Главното предимство на Дайсоновото проектиране е, че генераторите на  $sp(2d, R)$  алгебрата се изразяват като крайни бозонни развития и включват само двубозонни членове в случая на  $\rho(A_{Tt}^{LM})$  операторите или едно- и трибозонни членове в случаите на операторите  $\rho(F_{Tt}^{LM})$  и  $\rho(G_{Tt}^{LM})$ . Цената на това предимство е тяхната неермитовост, която се вижда от (20.18) и (20.20)

$$(\rho(G_{Tt}^{LM}))^\dagger \neq \rho(F_{Tt}^{LM}) . \quad (20.44)$$

Но, недостатък може да бъде избегнат чрез извършването на трансформация на подобие [46, 348, 351, 359], която превръща Дайсоновата бозонна реализация в бозонна реализация от типа на Holstein-Primakoff. Тази трансформация прави операторите  $\rho_D(G_{Tt}^{LM})$  и  $\rho_D(F_{Tt}^{LM})$  ермитови без да променя мултиполните оператори  $\rho_D(A_{Tt}^{LM})$ , т. е.

$$K\rho(F_{Tt}^{LM})K^{-1} = \rho_{HP}(F_{Tt}^{LM}) \quad (20.45a)$$

$$K\rho(G_{Tt}^{LM})K^{-1} = \rho_{HP}(G_{Tt}^{LM}) \quad (20.45б)$$

$$K\rho(A_{Tt}^{LM})K^{-1} = \rho_{HP}(A_{Tt}^{LM}) = \rho(A_{Tt}^{LM}) \quad (20.45в)$$

$$(\rho_{HP}(G_{Tt}^{LM}))^\dagger = \rho_{HP}(F_{Tt}^{LM}) . \quad (20.45г)$$

Ако наложим условието  $K^\dagger = K$  да е реално, може да се дефинира оператор  $V$ :

$$V = K^\dagger K = K^2 . \quad (20.46)$$

Да отбележим, че  $V^\dagger \neq V^{-1}$ . От (20.45а)–(20.45г) и (20.46) се получава

$$V^{-1}(\rho(F_{Tt}^{LM}))^\dagger V = \rho(G_{Tt}^{LM}) \quad (20.47a)$$

$$V^{-1}(\rho(G_{Tt}^{LM}))^\dagger V = \rho(F_{Tt}^{LM}) \quad (20.47б)$$

$$V^{-1}\rho(A_{Tt}^{LM})V = (\rho(A_{Tt}^{LM}))^\dagger = \rho(A_{Tt}^{LM}) . \quad (20.47в)$$

От (20.47в) следва, че  $V$  комутира с операторите  $\rho(A_{Tt}^{LM})$  (удовлетворяващи  $(\rho(A_{Tt}^{LM}))^\dagger = \rho(A_{Tt}^{LM})$ ). Това от своя страна означава, че  $V$  и следователно  $S$  са функции на инвариантните оператори на  $u(d)$  алгебрата.

Само във физическото подпространство операторите на Казимир  $C_2(u(d))$  (20.22) могат да се заместят от функции на операторите на броя на бозоните, които се получават от (20.42) при заместване на собствените стойности на операторите със самите оператори на броя на бозоните. Това заместване води до съществено упростиране на (20.25):

$$\rho(F_{Tt}^{LM}) = b_{Tt}^{\dagger LM}(1 + 2N_b) . \quad (20.48)$$

Важно е да се подчертае, че операторите  $F_{Tt}^{LM}$  и  $G_{Tt}^{LM}$ , когато се прилагат към вълновите функции съответстващи на симетричното неприводимо представяне  $[N]$ , ги трансформират във вълнови функции отново съответстващи на симетричното неприводимо представяне  $[N \pm 2]$ . Това позволява ермитовата бозонна реализация да бъде получена в прост аналитичен вид.

Замествайки (20.48) и (20.18) в (20.47б) получаваме

$$V^{-1}b_{Tt}^{\dagger LM}V = b_{Tt}^{\dagger LM}(1 + 2N_b) . \quad (20.49)$$

Нека изберем базис на неприводимото представяне  $[2N_b]$  на  $u(d)$  алгебрата. За целта е достатъчно да означим този базис само със собствената стойност на оператора на броя на бозоните. Операторът  $V$  е диагонален в този базис:

$$V|[2N_b]\rangle = V([2N_b])|[2N_b]\rangle . \quad (20.50)$$

Операторът  $b_{Tt}^{\dagger LM}$  води само до промяна на броя на бозоните във вълновата функция:

$$b_{Tt}^{\dagger LM} |[2N_b]\rangle \sim |[2N_b + 2]\rangle . \quad (20.51)$$

Да отбележим, че за произволна функция  $f(N_b)$  са изпълнени съотношенията

$$f(N_b)b^\dagger = b^\dagger f(N_b + 1) \quad (20.52a)$$

$$f(N_b)b = b f(N_b - 1) . \quad (20.52б)$$

Следователно от (20.49) получаваме

$$V^{-1}([2N_b + 2])V([2N_b]) = (1 + 2N_b) \quad (20.53)$$

$$K^{-1}([2N_b + 2])K([2N_b]) = \sqrt{(1 + 2N_b)} . \quad (20.54)$$

Формула (20.54) може да се използва като рекурентно съотношение за намиране на матричните елементи на оператора  $K$ . Така се получава

$$\begin{aligned} \langle [2N_b] | \rho_{HP}(G_{Tt}^{LM}) | [2N_b + 2] \rangle &= \langle [2N_b] | K \rho(G_{Tt}^{LM}) K^{-1} | [2N_b + 2] \rangle \\ &= \langle [2N_b] | b_{Tt}^{\dagger LM} | [2N_b + 2] \rangle K([2N_b]) K^{-1}([2N_b + 2]) \end{aligned} \quad (20.55)$$

или в операторен вид

$$\rho_{HP}(G_{Tt}^{LM}) = \sqrt{(1 + 2N_b)} b_{Tt}^{LM} \quad (20.56a)$$

$$\rho_{HP}(F_{Tt}^{LM}) = b_{Tt}^{\dagger LM} \sqrt{(1 + 2N_b)} . \quad (20.56b)$$

Тези формули са подобни на добре известната бозонна реализация на  $sp(2, R)$  алгебрата. Всъщност тази аналогия е по-дълбока. Произхода на неермитовостта на Дайсоновото проектиране се дължи на факта, че се проектира изобщо неортогонален базис на неприводимото представяне на Ли алгебра върху ортонормалния базис в пространството на идеалните бозонни [348]. Следователно Дайсоновото проектиране е по дефиниция неунитарно (неермитово). Обаче в случая на четните и нечетни неприводими представяния  $sp(2d, R)$  алгебрата, само които се разглеждат в случая, векторите образуващи базиса в началното  $u$ -бозонно пространство са ортогонални един на друг, но не са нормализирани. В резултат, процедурата на ермитизация се редуцира до пресмятането на необходимите нормировъчни множители за да възстанови нормата на базиса.

## 20.5 Бозонно изображение на хамилтониана на МВВБ

В [A18, 288] се отбелязва, че векторните бозони могат да се считат като кварки или елементарни конструктивни елементи и че  $s$  и  $d$  бозоните на МВБ могат да се разглеждат като свързани състояния на елементарните възбуждания породени от двата векторни бозона. Взаимодействието между тези вторични  $S$ -,  $D$ -, и  $P$ -бозони е предизвикано от взаимодействието между векторните бозони, както нуклеон-нуклеонното взаимодействие се поражда от взаимодействието между кварките. Сравнението на МВВБ със стандартните версии на МВБ е много полезно, защото в някои отношения МВВБ е по-богат от МВБ. На пример двата векторни бозона могат да се куплират до пораждането на състояния с ъглов момент  $L = 1$ , докато в МВБ това е невъзможно. В други аспекти МВВБ е по ограничаващ, тъй като физическото пространство на МВБ 3.5, на който съответства МВВБ заема само част от общото пространство на МВБ 3.5.

Използвайки точната Дайсонова реализация на  $sp(12, R)$  алгебрата получена в §20.2 може да се анализира реализацията на  $S$ -,  $D$ -, и  $P$ -бозонния хамилтониан получен от хамилтониана на МВВБ, който запазва броя на векторните бозони и е инвариантен по отношение на въртенията в пространствата на ъгловия момент  $L$  и изоспина  $T$

$$H = \epsilon_1 N + \epsilon_2 N^2 + \epsilon_3 \mathbf{L}^2 + \epsilon_4 \mathbf{Q}^2 \quad (20.57)$$

където  $Q_M$  са компонентите на квадруполния оператор въведен от Елиот (Elliott)

$$Q_M = 2\sqrt{3} A_{00}^{2M} \quad (20.58)$$

а  $L_M$  са компонентите на ъгловия момент:

$$L_M = 2A_{00}^{1M} . \quad (20.59)$$

Дайсоновият образ на оператора на ъгловия момент

$$\rho_D(L_M) = \sqrt{30}(D^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{1M} + \sqrt{2}(P^\dagger \otimes \tilde{P})_{00}^{1M} \quad (20.60)$$

съдържа заедно със стандартните  $D$ -бозонни членове и допълнителен принос съответстващ на  $P$ -бозонните. Дайсоновият образ на квадруполния оператор

$$\begin{aligned} \rho_D(Q_M) = & \sqrt{42}(D^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{2M} + 2\sqrt{6}\left((S^\dagger \otimes \tilde{D})_{00}^{2M} + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_{00}^{2M}\right) \\ & - \sqrt{6}(P^\dagger \otimes \tilde{P})_{00}^{2M} \end{aligned} \quad (20.61)$$

също съдържа приноси от  $P$ -бозонните.

В резултат Дайсоновият образ на хамилтониана (20.57) има вида

$$\begin{aligned} \rho_D(H) = & 2\epsilon_1(N_S + N_P + N_D) \\ & + 4\epsilon_2(N_S^2 + N_P^2 + N_D^2 + 2N_S N_P + 2N_S N_D + 2N_D N_P) \\ & + \epsilon_3 \left[ 30(D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^1 \cdot (D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^1 + 4\sqrt{15}(D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^1 \cdot (P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^1 \right. \\ & \left. + 2(P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^1 \cdot (P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^1 \right] + \epsilon_4 \left[ 42(D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 \cdot (D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 \right. \\ & + 24((S^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_0^2) \cdot ((S^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_0^2) \\ & + 24\sqrt{7}(D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 \cdot ((S^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_0^2) \\ & + 6(P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^2 \cdot (P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^2 - 6\sqrt{7}(D^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 \cdot (P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^2 \\ & \left. - 12(P^\dagger \otimes \tilde{P})_0^2 \cdot ((S^\dagger \otimes \tilde{D})_0^2 + (D^\dagger \otimes \tilde{S})_0^2) \right] \end{aligned} \quad (20.62)$$

където  $T^k \cdot R^k = \sum_q (-1)^q T^{kq} R^{k-q}$  дефинира скаларното произведение на два тензора.

Този израз съдържа почти всички членове от  $S$ -,  $D$ -, и  $P$ - взаимодействия бозони. В общия случай хамилтонианът с едно- и двубозонно взаимодействие, който запазва общия брой бозони и е инвариантен спрямо въртенията в пространствата на ъгловия момент и изоспина съдържа 23 независими константи на взаимодействието. В ротационната граница [A18, 288] на МВВБ разгледана тук, всички ще цвездат до четерите константи на хамилтониана (20.57).

## 20.6 Заключителни бележки

В тази работа се изследват общите свойства на проектирането на двойки бозони. Общият резултат получен за точното бозонно изображение на  $sp(2d, R)$  алгебрата върху  $u(d)$ -бозонната алгебра след това се прилагат на частния случай на  $sp(12, R)$ ,

която е алгебрата на динамична симетрия на МВВБ. Получено е Дайсоновото бозонно проектиране на хамилтониана на МВВБ и е анализирана неговата връзка със стандартните версии на МВБ. Намерени са точните Дайсонови бозонни изображения на генераторите на  $sp(2d, R)$  алгебрата, изразени като двойно сферични тензори по отношение на  $SO_L(3) \otimes SU_T(2)$  групата. После като се ограничаваме само във вакуумното представяне е разгледан въпросът за възникналите духови състояния. Осъществена е унитаризацията на Дайсоновите представяния чрез трансформация на подобие. Накрая е намерен бозония образ на хамилтониана на МВВБ и е обсъдена неговата връзка със стандартните версии на МВБ.

Подобна ситуация възниква в изоспин инвариантната версия на модела с фермионна динамична симетрия (МФДС) [360, 361], приложен към ядрата от  $sd$ -слоя. Във въпросната версия на МФДС нуклеоните заемащи едночастичните нива:  $2s_{\frac{1}{2}}, d_{\frac{3}{2}}$  и  $d_{\frac{5}{2}}$  се разглеждат като частици с псевдоорбитален ъглов момент  $k = 1$ , псевдоспин  $i = \frac{3}{2}$  и изоспин  $t = \frac{1}{2}$ . В  $k$ -инвариантната версия на МФДС се предполага, че псевдоспиновете на частиците са сдвоени и се отчитат само състояния построени от нуклеонни двойки с  $K = 0, 2; I = 0, J = K; T$ . В съответствие с принципа на Паули такива двойки имат следните възможни комбинации на общия ъглов момент и изоспина:

$$(J, T) = (0, 1), (2, 1), (1, 0).$$

За да се опишат тези състояния в рамките на модела на взаимодействащите бозони е необходимо да се въведат  $S$ -,  $D$ - бозони с изоспин  $T = 1$  и  $P$ - бозон с  $T = 0$ . Този набор от бозони е идентичен с бозоните участващи в направеното тук проектиране на МВВБ. Важно е да се отбележи също, че микроскопичната картина на МФДС, тези бозони се конструират от два  $p$ -обекта, също като  $S, P, D$ - бозоните в МВВБ.

Сходството на  $k$ -активната версия на МФДС и на МВВБ ни дава основания да считаме, че структурата на ядрата от  $sd$ -слоя (или на други средно тежки ядра с  $k = 1$ ) може да се интерпретира в термини на МВВБ, по същия начин както тожа е направено в [362] за ядрата от началото на  $sd$ -слоя в рамките на МВБ-4. Това е едно възможно бъдещо развитие на настоящата работа.

## 21. Заключение

В настоящата дисертация, за да се посрещне предизвикателството към теоретичната ядрена физика, поставено от огромното количество натрупани нови експериментални данни за всички области от ядра, както и за да се предскажат нови прояви на ядрената структура, които се очаква да бъдат намерени при осъществяването на планираните нови експерименти, са изследвани и приложени за описание и систематика на различни ядрени характеристики, бозонните и фермионни реализации на симплектични структури, както и тяхни специално реализирани деформации.

Групово теоретичния-подход, който се използва е мощно средство за преодоляване на трудностите, които стоят пред многочастичния проблем в атомните ядра при ниски енергии. Този подход въвежда принципите на симетрия, като определящи основните ядрени взаимодействия и ограничаващи необозримите пространства от собствените им състояния, което води в повечето случаи до аналитично решими и с ясна физическа интерпретация модели и приложения. Употребата на този подход от своя страна изисква решаването на някои чисто математически проблеми, но същественото за успешното му приложение е намирането на подходящо физическо съответствие между физическите наблюдаеми и операторите генериращи възникващите алгебрични структури.

Основен критерий за качеството на получените резултати е тяхната приложимост към реални ядрени системи, в смисъл на получаване на добро съвпадение на теоретичните предсказания с експеримента, както и на възможността на теорията да предсказва стойности на изследваните ядрени характеристики, които могат да помогнат при интерпретацията на експеримента.

**Основните приноси** в получените в настоящата дисертация резултати могат да се обобщят накратко по-следния начин:

В Част I са събрани изследванията на бозонните и фермионните реализации на симплектичните алгебри  $sp(4, R)$  и  $sp(4)$  съответно, както и на тяхни специфични деформации, получени с цел да бъдат използвани в разгледаните след това проблеми на ядрената структура.

1) Използвайки важни аналогии със стандартните подходи към алгебричните структури в моделите на ядрената физика, включително ролята на съотношенията за влагане, проекционните методи и тензорните оператори са реализирани:

а) квантов аналог  $sp_q(4, R)$  на бозонната  $sp(4, R)$  и подалгебрите ѝ (компактната  $u(2)$  и некомпактната  $u^\varepsilon(1, 1)$  с  $\varepsilon = 0, \pm$ ), които също са деформирани и техните деформирани представяния се съдържат в  $sp_q(4, R)$  [A1, B2, B4];

б) ново деформирано представяне –  $sp_t(4, R)$  с помощта на трансформация на  $q$ -деформирани бозони в  $q$ -тензори ( $q$ -спинори) по отношение на  $su_q(2)$  генераторите [A2, B1].

2) По нестандартен и нов начин е получено и представяне на  $q$ -деформираната  $u(3)$  алгебра в термини на същите  $q$ -тензорни оператори, които имат ясни физически аналози в класическите алгебрични модели. Тази конструкция води по много естествен начин до редукцията  $so(3) \subset u(3)$ , която определя директен начин за приложения, използващи  $q$ -деформирани квадруполни структури [A3, A4, B3]. Като пример в Глава 10 [A11] е създаден  $q$ -аналог на двумерен модел на взаимодействащите бозони, съдържащ ротационна и вибрационна граници.

3) Получена е фермионната реализация на симплектичната  $sp(4)$  алгебра и нейните  $q$ -деформирани версии, които са резултат на специфични деформации на фермионните оператори на раждане и унищожение [A5, B5]. Направено е уникално и нетривиално, поради зависимостта на  $q$ -деформацията от размерността на пространството, обобщение на  $sp_q(4)$  към множество  $j$  слоеве [A6]. И в двата случая са изследвани три важни редукционни редици на  $sp(4)$  алгебрата. Изведени са в аналитичен вид матричните представяния на базисните оператори на  $sp_{(q)}(4)$  в пространството на напълно сдвоените състояния. Получената  $q$ -деформирана  $sp_q(4)$  алгебра, представлява богата теоретическа структура, която може да се прилага към описанието на ядрените системи, без да се пренебрегва запазването на фундаменталните ядрени симетрии.

В Част II на дисертацията, класификацията на четно-четните ядра от главните слоеве служи за основа при систематичното изследване на поведението на важни за ядрената структура тяхни физически характеристики и води до единното им описание и анализ.

4) Като резултат от изследването им в рамките на симплектичната класификационна схема, и наблюдаваното гладко периодично поведение на експерименталните енергии от основните ивици на четно-четните ядра е получено единното им описание [A8, B6, B7, B8], като е определена зависимостта на параметъра на взаимодействието от класификационните квантови числа –  $N$  и  $F_0$ . Самото колективното взаимодействие е обобщено, без да се въвеждат никакви детайли за участващите ядрени сили, като в резултат е получено добро съгласие между пресметнатите теоретични енергии и експерименталните данни за 927 нисколежащи състояния от основните ивици на 271 ядра от пет главни слоя.

5) Получено е просто съотношение между третата проекция на  $F$ -спина и кла-

сификационния параметър  $P$ , което позволява да бъдат определени за всички ядра от областта с  $A = 80$  и  $N = Z = 28 - 50$  полуемпиричните микроскопични маси с помощта на една феноменологична формула с 9 параметъра в първия случай и 6 параметъра във втория [A9, B9]. Получените резултати са сравнени с експеримента и помежду си и могат да бъдат използвани за предсказване на масите на неизвестни още ядра.

6) Резултатът от емпиричното изследване на поведението на енергиите на неирастовите  $K^\pi = 0_2^+$  и  $K^\pi = 2_\gamma^+$  начални състояния на  $\beta$  и  $\gamma$  ивиците в серия от ядра принадлежащи на  $F_0 = 0$  мултиплета от  $sp(4, R)$  класификационната схема на лантанидите, показва за разлика от гладкото поведение на енергиите в основните ивици, изненадващо сложно и променливо поведение, за чиято интерпретация и възпроизвеждане систематично е приложена протон - неутронната версия на псевдо- $SU(3)$  слоевия модел [A10, B10, B11, B12].

В Част III е конструиран алгебричния  $sp(4)$  модел и неговото разширение за включване на многочастични взаимодействия в рамките на  $q$ -деформираната  $sp_q(4)$ .

7) Алгебричният подход води до конструкцията на “класически” хамилтониан, за който симплектичната  $Sp(4)$  група е групата на динамична симетрия, която служи за описание на изовекторните сдвояващи корелации и взаимодействия с по-високо  $J$  (включително диагоналната изоскаларна  $pn$  сила) в ядрата. Установена е връзката между групово теоретичния подход и общия микроскопичен сдвояващ хамилтониан [A12, B13, B14].

8) Теорията се използва за фитиране на пресметнатите енергии към съответните експериментални енергии на  $0^+$  състоянието (енергии на свързване) на ядрата с четно  $A$  с маси  $32 \leq A \leq 164$  в едно  $j$  ниво, а именно  $1d_{3/2}$  и  $1f_{7/2}$ , и в главните  $1f_{5/2}2p_{1/2}2p_{3/2}1g_{9/2}$  и  $1g_{7/2}2d_{5/2}2d_{3/2}3s_{1/2}1h_{11/2}$  слоеве, като получените резултати дават физически валидна оценка на параметрите на силите на взаимодействията. Показано е, че последните осреднено гладко намаляват с  $1/A$  в цялата област, където  $32 \leq A \leq 100$  [A12, A14, B15, B16, B17]. Нещо повече, възпроизведени са твърде добре, без да се подгонват допълнителни параметри, енергиите на по-високо лежащите изовекторно сдвоени  $0^+$  състояния за  $1d_{3/2}$  и  $1f_{7/2}$  слоевете. Модела е използван и за получаването на разумни предсказания на съответните още не измерени енергии на ядрата от протонно богатата област с  $N \approx Z$ , които лежат извън долината на стабилност.

9) Теоретичният модел е по-детайлно проверен чрез приложението на дискретни производни от втори и по-висок порядък на енергиите на най-ниските *изовекторно сдвоени*  $0^+$  състояния от  $Sp(4)$  систематиката, без допълнително вариране на параметри [A12, A13, B18]. Изследването дава и физическа интерпретация на изследваните крайни енергетични разлики и показва, че наблюдаваните ефекти са свързани с

алтернативната промяна на знаците в квантовите числа на старшинството, което е в допълнение на по-големия принос дължащ се на крайните изменения в стойностите на изоспина, свързани със симетричната енергия.

10) Въз основа на тези резултати е изследван и въпроса за нарушаването на изоспиновата инвариантност и смесването на изоспина [A15, A16]. Степента на изоспиновото смесване с  $\Delta\tau = 2$  е пресметната за ядрата от  $1d_{3/2}$  и  $1f_{7/2}$  орбиталите, като извода е, че практически такова няма за  $1d_{3/2}$  и смесването за  $1f_{7/2}$  слоя е много по-малко от  $\Delta\tau = 1$  смесването предизвикано от Кулоновото взаимодействие, което е в съгласие с анализа на експеримента. Изоспиновото смесване намерено в  $1f_{7/2}$  слоя предсказва наблюдаването на забранени  $0^+ \rightarrow 0^+$  неаналогови ( $\Delta\tau = 2$ ) преходи на  $\beta$  разпад.

11) В същото време  $q$ -деформацията на  $sp(4)$  се използва за построяването на  $q$ -деформиран моделен хамилтониан, който също дава точно решение на проблема за собствените стойности в  $q$ -деформирания случай [A8, B6, B7, B8].  $q$ -деформираните теоретични енергии също се фитират към съответните експериментални данни, като в резултат е определена стойността на  $q$  като свободен параметър. Когато го разглеждаме като глобален параметър, един и същи са даден главен слой, неговите стойности не се отличават съществено от “класическата” му граница. Въпреки това  $q$ -деформирания случай дава осреднено по-добри резултати.

12) Като следствие на полученото декуплиране на  $q$ -параметъра от силите на сдвояващите взаимодействия, е показано, че  $q$ -хамилтониана представлява развитие на “класическото” двучастично взаимодействие, което добавя многочастични компоненти от по-висок порядък. Тези резултати [A17, B19, B20, B21, B22] подсказват, че същността на  $q$ -деформацията има локален характер. В същност ние открихме, че получените в резултат на сравнение с експеримента стойности на  $q$ -параметъра имат гладка функционална зависимост от броя на протоните и неутроните на индивидуалните ядра. Многочастичните взаимодействия, както се отчитат от  $q$ -деформацията са пряко свързани с областите на доминиращи сдвояващи корелации.

Резултатите от настоящото изследване показват, че в сравнение с експеримента, развития  $sp(4)$  алгебричен подход възпроизвежда не само глобалното поведение на съответните енергии, но и по-слабите и финни ефекти предизвикани от изовекторните сдвояващи корелации и сдвояващите взаимодействия с по-високо  $J$  между протон-неутронните и тези на еднакви частици сдвояващи взаимодействия. В допълнение към това промените в индивидуалните ядра, дължащи се на многочастичните взаимодействия от по-висок порядък се описват от нелинейния  $q$ -деформиран  $sp_q(4)$  модел с локален  $q$ -параметър, съществено свързан с същността на ядреното взаимодействие.

В Част IV на представения дисертационен труд са изложени новите приложения на симплектичното разширение на МВВБ, мотивирани от множеството нови експериментални данни по колективните спектри на тежките четно-четни атомни ядра.

13) Глава 15 [A18], съдържа формулировката на модела и е мотивирано използването на два типа векторни бозони като негови структурни елементи. Показано е, че най-общата група на динамична симетрия на системата от два вида векторни бозона е  $Sp(12, R)$ . Проблемът за безкрайно мерните ѝ представяния е решен, като хамилтониана се диагонализира във всички крайномерни подпространствата на УНП на максималната ѝ компактна подгрупа  $U(6)$ , принадлежащи на дадено УНП на  $Sp(12, R)$ .

14) Направеното симплектично разширение на  $U(6)$ -групата на динамична симетрия на МВВБ се прилага за описание на основната и първата ивица с отрицателна четност до много високи спинове за голям брой деформирани четно-четни ядра от областта на редките земи и актинидите [A19, B23]. Въведените специфични алгебрични дефиниции на четността на състоянията и на понятието “ираст” състояние дават възможност за описание на ивици с отрицателна четност и определяне на енергиите на състоянията от всяка от разглежданите ивици като функции само на ъгловия им момент  $L$ , като в допълнение към ротационния член и в двете ивици се появява и чисто вибрационна мода, която въвежда и взаимодействие между тях. В резултат се възпроизвежда добре не само на поведението на енергиите в множеството изследвани ядра, но и на някои от фините ефекти като  $\Delta L = 1$  стагеринга между състоянията от тези ивици и биенето в него. Използвайки тензорните свойства на генераторите на  $Sp(12, R)$  по отношение на разглежданата редица са пресметнати аналитично матричните елементи на операторите на E2 преходи между състоянията във всяка от ивиците [A22, B26], които възпроизвеждат добре експериментално наблюдаваното поведение на вероятностите за тези преходи.

15) В Глава 18 въз основа на редукцията на  $Sp(12, R)$  до некомпактното пряко произведение  $Sp(4, R) \otimes SO(3)$ , е осъществено още едно приложение на симплектичното разширение на МВВБ, което се използва за изследване на енергетичните разпределения на серии от състояния с фиксиран ъглов момент, голяма част от които са глави на колективни ивици и играят съществена роля в тяхното формиране [A20, B24, B27].

16) За описание на спектри със смесено ротационно-вибрационни поведение се прилага нова редукционна верига на динамичната група  $Sp(12, R)$  през подгрупата на прякото произведение  $Sp(2, R) \otimes SO(6)$ . В този случай, като се отчете изоморфизма между  $SU(1, 1)$  и  $Sp(2, R)$  се оказва, че генериращата спектър алгебра включва по естествен начин във взаимодействието шестмерен потенциал на Davidson [A21, B25]. Доброто съгласие между теоретичните предсказания и експе-

римента потвърждава приложимостта на МВВБ за широк клас от ядра с вариращи колективни свойства.

17) На края в Глава 20 [A23, A24, B28] е използван метод на бозон-бозонното проектиране за да се изясни връзката между популярния в ядрената физика Модел на взаимодействиящите бозони (МВБ) и построения от нас МВВБ. В резултат е показано, че състоянията на МВВБ с четен брой  $p$ -бозони могат да се проектират точно върху състоянията на една специфична версия на МВБ реализирана с  $S$ - и  $D$ - и  $P$ -бозони, т.е. модел който е между МВБ-3 и МВБ-4 и може условно да се нарече МВБ-3.5.

Успехът на физическите приложения на трите нови динамични симетрии на Модела на взаимодействиящите векторни бозони при описанието на ядрени спектри с различни типове колективност се дължи на симлектичното разширение на модела, което разширява и границите на неговата приложимост. Съществено е и разглеждането на двете ядрени подсистеми - протонната и неутронната - и взаимодействието между тях. Представените в дисертацията резултати не изчерпват възможностите на модела за описание на разнообразни колективни прояви на ядрената структура.

## Приложение



## А. Трансформации на $q$ -подобие

Изследвани са трансформациите на  $q$ -подобие по отношение на симетричните  $q$ -експоненти. Чрез решаване на системи от алгебрични уравнения са получени стойностите на степените на различните  $q$ -комутатори.

Добре известната формула [363]

$$\exp(A)B \exp(-A) = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} C_i, \quad (\text{A.1})$$

където  $C_0 = B$  и  $C_i = [A, C_{i-1}]$  има множество разнообразни приложения. Тя има също добре известен  $q$ -аналог в термини на  $q$ -експонентата на Jackson

$$\exp_q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]!},$$

където  $[i] = (q^i - 1)/(q - 1)$  и  $[i]! = [i - 1]![i]$ . Този  $q$ -аналог е [364–366]

$$\exp_q(A)B (\exp_q(A))^{-1} = B + [A, B] + \frac{1}{[2]!} [A, [A, B]]_q + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{[i]!} C_i,$$

където  $C_0 = B$ ,  $C_1 = [A, B]$  и  $C_i = [A, C_{i-1}]_q$  за  $i = 2, 3, \dots$ . Тук  $[A, B]_q = AB - qBA$ . Трябва да се отбележи, че най-вътрешния комутатор е стандартен класически комутатор, което гарантира, че когато  $A$  и  $B$  комутират  $\exp_q(A)B (\exp_q(A))^{-1} = B$ .

Тъй като симетричните цели  $q$ -числа  $[i]_q = (q^i - q^{-i})/(q - q^{-1})$  образуват базис за формализма асоцииран с квантовите групи, естествено е да се потърси възможен  $q$ -аналог на уравнение (A.1) в термини на тези числа. Така че, в настоящата работа се търси представяне на израза  $\text{Exp}_q(A)B(\text{Exp}_q(A))^{-1}$  в термини на серии от  $q$ -комутатори, на базата на симетричната  $q$ -експонента

$$\text{Exp}_q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{[i]_q!}.$$

За тази цел, първо трябва да изведем израза за  $(\text{Exp}_q(A))^{-1}$ . Ако го запишем по следния начин

$$(\text{Exp}_q(x))^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \zeta_i \frac{x^i}{[i]_q!}, \quad (\text{A.2})$$

и наложим условието  $\text{Exp}_q(x)(\text{Exp}_q(x))^{-1} = 1$  получаваме  $\zeta_0 = 1$  и за  $\ell > 0$

$$\zeta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{j}_q (-1)^{\ell-j-1} \zeta_j . \quad (\text{A.3})$$

Така че

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 1 , \\ \zeta_2 &= 1 + ([2]_q - 2) , \\ \zeta_3 &= 1 + ([2]_q - 2)[3]_q , \\ \zeta_4 &= 1 + ([2]_q - 2)[2]_q([2]_q + 1)([4]_q - 2[3]_q + 3) , \end{aligned}$$

и т.н. Уравнението (A.1) води до

$$\text{Exp}_q(A)B (\text{Exp}_q(A))^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{[\ell]_q!} C_\ell , \quad (\text{A.4})$$

където

$$C_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \zeta_j \binom{\ell}{j}_q A^{\ell-j} B A^j . \quad (\text{A.5})$$

Сега е желателно да представим  $C_\ell$  като многократни комутатори т.е.  $C_0 = B$  и  $C_\ell = [A, [A, [\dots [A, B]]_{Q_1^{(\ell)}} \dots ]_{Q_{\ell-2}^{(\ell)}} ]_{Q_{\ell-1}^{(\ell)}} .$  Уравнение (A.5) дава

$$\begin{aligned} C_1 &= AB - BA = [A, B] , \\ C_2 &= A^2B - [2]_q ABA + (q - 1 + q^{-1})BA^2 = [A, [A, B]]_{q^{-1}+q^{-1}} , \\ C_3 &= A^3B - [3]_q A^2BA + (q - 1 + q^{-1})[3]_q ABA^2 - \zeta_3 BA^3 . \end{aligned}$$

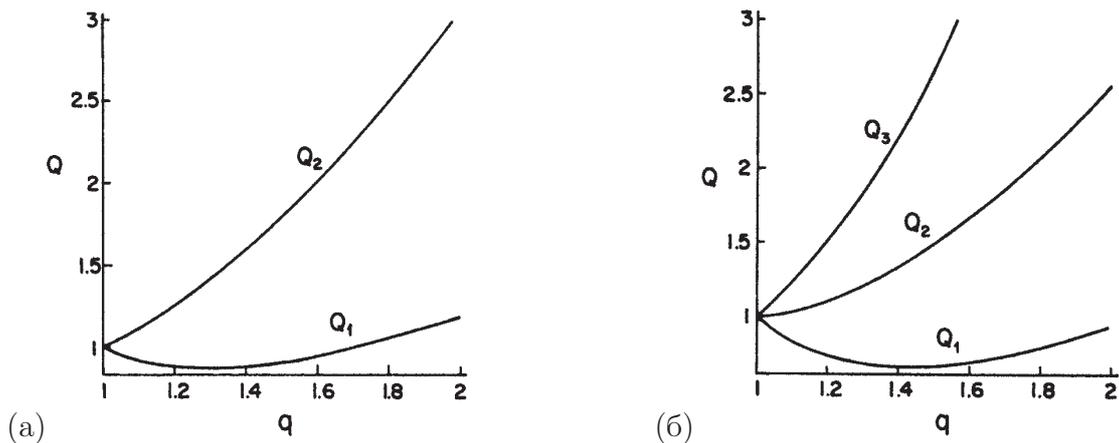
За да представим  $C_3$  във вида

$$\begin{aligned} [A, [A, [A, B]]_{Q_1}]_{Q_2} &= \\ &= A^3B - (1 + Q_1 + Q_2)A^2BA + (Q_1 + Q_2 + Q_1Q_2)ABA^2 - Q_1Q_2BA^3 , \end{aligned}$$

трябва да наложим условията

$$\begin{aligned} 1 + Q_1 + Q_2 &= [3]_q , \\ Q_1 + Q_2 + Q_1Q_2 &= ([2]_q - 1)[3]_q , \\ Q_1Q_2 &= 1 + ([2]_q - 2)[3]_q . \end{aligned}$$

Така получихме набор от три уравнения за две променливи. Тяхната съгласуваност се установява лесно, като се отчете, че третото уравнение е получено като първото



Фигура А.1: (а) Решенията  $Q_1$  и  $Q_2$  за члена от трети порядък;  
(б) Решенията  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  за члена от четвърти порядък.

е извадено от второто. Тези уравнения могат да се решат като се определят  $Q_1$  и  $Q_2$  като функции на  $q$ . Решенията са представени на Фигура А.1(а). Стойностите на  $Q_1$  и  $Q_2$  не са свързани по прост или очевиден начин със стойността  $Q = q - 1 + q^{-1}$  получена за предишния член  $C_2$ . По същия начин  $C_4$  може да се изрази като четворен  $q$ -комутатор  $[A, [A, [A, [A, B]]_{Q_1}]_{Q_2}]_{Q_3}$ . Трите  $Q$ -та удовлетворяват съотношенията

$$\begin{aligned} 1 + Q_1 + Q_2 + Q_3 &= [4]_q, \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 &= ([2]_q - 1)(q^2 + q^{-2})[3]_q, \\ Q_1Q_2 + Q_1Q_3 + Q_2Q_3 + Q_1Q_2Q_3 &= (1 + [3]_q([2]_q - 2))[4]_q, \\ Q_1Q_2Q_3 &= [3]_q[4]_q \left( [2]_q + \frac{1}{[2]_q} - 3 \right) + 2[4]_q - 1, \end{aligned}$$

чията съгласуваност лесно се проверява и чиито решения за  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  в термини на  $q$  са дадени на Фигура А.1(б). Сега вече е лесно да се определи общата схема. Членът  $C_\ell$  може да се запише във вида

$$C_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i (h_{i-1}^{(\ell)} + h_i^{(\ell)}) A^{\ell-i} B A^i, \quad (\text{A.6})$$

където  $h_i^{(\ell)}$  е  $i$ -тата елементарна симетрична функция на  $\ell - 1$  променливи  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\ell-1}$ . Така че

$$h_0^{(\ell)} = 1$$

и

$$h_i^{(\ell)} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} Q_{j_1} Q_{j_2} \dots Q_{j_i},$$

за  $i = 1, 2, \dots, \ell - 1$ . Уравнение (А.6) се доказва лесно по индукция. За  $\ell = 0$  то дава  $C_0 = B$  и изобщо по дефиниция е в сила рекурентното съотношение

$$C_{\ell+1} = [A, C_\ell]_{Q_\ell}.$$

Последното равенство дава

$$C_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{\ell+1} (-1)^i \left( h_{i-1}^{(\ell)} + h_i^{(\ell)} + Q_\ell (h_{i-2}^{(\ell)} + h_{i-1}^{(\ell)}) \right) A^{\ell+1-i} B A^i ,$$

от него лесно се вижда, че коефициентът пред члена  $A^{\ell+1-i} B A^i$  от дясната страна е равен на  $h_{i-1}^{(\ell+1)} + h_i^{(\ell+1)}$ .

От друга страна от (А.5) следва, че коефициентът на  $A^{\ell-i} B A^i$  в развитието на  $C_\ell$  е равен на  $\zeta_i \binom{\ell}{i}_q$ . Така че, в резултат се получава система от  $\ell+1$  свързани уравнения

$$h_{i-1}^{(\ell)} + h_i^{(\ell)} = \zeta_i \binom{\ell}{i}_q , \quad i = 0, 1, \dots, \ell . \quad (\text{А.7})$$

Отбелязвайки, че

$$\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i (h_{i-1}^{(\ell)} + h_i^{(\ell)}) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \zeta_i \binom{\ell}{i}_q = 0 ,$$

второто равенство следва от (А.3), може да се заключи, че получените уравнения са линейно зависими. Тъй като първото от тях отговарящо на  $i = 0$  е тривиално ( $1 = 1$ ), следва че системата от уравнения (А.7) се състои от  $\ell - 1$  независими уравнения за  $\ell - 1$  променливи  $Q_1, Q_2 \dots Q_{\ell-1}$ . От уравнение (А.1) следва, че в границата  $q \rightarrow 1$  тези свързани уравнения имат решение  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{\ell-1} = 1$ .

Тъй като  $Q$ -тата се появяват в симетрични полиноми, следва че техните пермутации ще оставят инвариантни съответните им многократни  $q$ -комутатори. Това свойство на многократните  $q$ -комутатори може да се установи и директно.

Настоящото изследване е мотивирано от опитите да се построят  $q$ -бозонните представяния на  $q$ -деформирани алгебри на Ли [А23], [А2]. Поради естеството на представените по-горе резултати, такива приложения изглеждат възможни, но не следват непосредствено.

## Библиография

- [1] Kristina D. Launey, *Group Theoretical Approach to Pairing and Non-Linear Phenomena in Atomic Nuclei*, Dissertation for ph.d. in physics, Louisiana State University, 2003, <http://etd.lsu.edu/docs/available//etd-1111103-171256/>.
- [2] Хубен Ганев Ганев, *Приложение на нови динамични симетрии от симплектичното разширение на Модела на взаимодействащи векторни бозони за описание на колективни движения в ядрата*, Дисертация за научната степен “Доктор”, Институт за ядрени изследвания и ядрена енергетика, Българска академия на науките, 2005.
- [3] S. Goshen and H. J. Lipkin, *Ann. Phys. (NY)* **6**, 301 (1959).
- [4] G. Rosensteel and D. J. Rowe, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 10 (1977).
- [5] D. R. Peterson and K. T. Hecht, *Nucl. Phys. A* **344**, 361 (1980).
- [6] A. I. Georgieva, M. I. Ivanov, P. P. Raychev, and R. P. Roussev, *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 1181 (1986).
- [7] O. Castanos, E. Chacon, M. Moshinsky, and C. Quesne, *J. Math. Phys.* **26**, 2107 (1985).
- [8] A. Klein and E. R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 375 (1991).
- [9] L. C. Biedenharn and M. A. Lohe, *Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [10] T. Hayashi, *Commun. Math. Phys.* **127**, 129 (1990).
- [11] C. Quesne and N. Vansteenkiste, *Phys. Lett. A*, **240**, 21 (1998); C. Quesne and N. Vansteenkiste, Preprint ULB/229/CQ/99/1, math-ph/0003025.
- [12] A. O. Barut and R. Raszhka, *Theory of Group Representations and Applications*, PWN, Warsaw, 1977.
- [13] Y. Dotan, M. Gell-Mann, and Y. Ne’eman, *Phys. Lett.* **17**, 148 (1956).
- [14] P. P. Kulish and E. V. Damaskinski, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, L415 (1990).

- [15] L. C. Biedenharn, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L873 (1989).
- [16] A. J. Macfarlane, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 4581 (1989).
- [17] C. P. Sun, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 4551 (1987).
- [18] C. P. Sun, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, 5823 (1987).
- [19] R. Floreanini, V. P. Spiridonov, and L. Vinet, Phys. Lett. B **242**, 383 (1990).
- [20] C. P. Sun, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, L1157 (1987).
- [21] L. C. Biedenharn, An overview on quantum groups, Invited Lecture on the 18th Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, (Moscow, 1990).
- [22] L. C. Biedenharn and M. A. Lohe, Induced representations and tensor operators for quantum groups, Talk on the Inaugural conference opening, EulerInt. Math. Inst. (St. Petersburg, 1992).
- [23] Feng Pan, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L803 (1991).
- [24] L. K. Hadjiivanov, R. R. Paunov, and I. T. Todorov, J. Math. Phys. **33**, 1379 (1992).
- [25] J. Van Der Jeugt, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, L213 (1992).
- [26] G. Rosensteel and D. J. Rowe, Ann. Phys. (NY) **126**, 343 (1980).
- [27] D. Bonatsos, *Interacting Boson models of Nuclear Structure*, Clarendon, Oxford, 1988.
- [28] V. A. Groza, I. I. Kachurik, and A. I. Klimyk, J. Math. Phys. **31**, 2769 (1990).
- [29] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy, and Yu. I. Kharitonov, Sov. J. Nucl. Phys. **53**, 593 (1991).
- [30] D. S. Tang, J. Math. Phys. **25**, 2966 (1984).
- [31] M. Charchian, D. Ellinas, and P. Kulish, Phys. Rev. Lett. **65**, 980 (1990).
- [32] Z. Chang, J. X. Wang, and H. Yan, J. Math. Phys. **32**, 3241 (1991).
- [33] P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **16**, L137 (1990).
- [34] R. K. Gupta, J. Cseh, A. Ludu, W. Greiner, and W. Scheid, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **18**, L73 (1992).

- [35] D. Bonatsos, A. Faesler, P. P. Raychev, R. P. Roussev, and Yu. F. Smirnov, J. Phys. A: Math. Gen **25**, L263 (1992).
- [36] A. Del Sol Mesa, A. Loyola, M. Moshinsky, and V. Velázquez, J. Phys. A: Math. Gen **26**, 1147 (1993).
- [37] R. K. Gupta and A. Ludu, Phys. Rev. C **48**, 593 (1993).
- [38] J. P. Elliott, Proc. R. Soc., London, Ser. A **245**, 128, 562 (1958).
- [39] J. P. Draayer, *Algebraic approaches to nuclear structure: Interacting boson and fermion models*, Contemporary Concepts in Physics VI, edited by R. F. Casten, Harwood academic, Chur, Switzerland, (1993) p. 423.
- [40] D. J. Rowe, The nuclear symplectic model, *Nuclear Structure Models: International Workshop at Oak Ridge, Tennessee, 16-25 March, 1992*, eds. R. Bengtson, J. P. Draayer and W. Nazarewicz, (World Scientific, Singapore, 1993).
- [41] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [42] J. Van Der Jeugt, J. Math. Phys. **34**, 1799 (1993).
- [43] C. Quesne, Phys. Lett. B **298**, 344 (1993); **304**, 81 (1993).
- [44] J. Dobaszewski, H. B. Geyer, and F. J. W. Hahne, Phys. Rev. C **44**, 1030 (1991).
- [45] P. Park, Phys. Rev. C **35**, 805 (1987).
- [46] D. P. Menezes, D. M. Brink, and D. Bonatsos, Nucl. Phys. A **494**, 186 (1989).
- [47] D. P. Menezes and D. Bonatsos, Nucl. Phys. A **499**, 29 (1989).
- [48] K. T. Hecht, Nucl. Phys. A **102**, 11 (1967).
- [49] S. Goshen and H. J. Lipkin, “On the application of the group  $Sp(4)$  or  $R(5)$  to nuclear structure”, in *Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics*, edited by F. Bloch, S. G. Cohen, A. De-Shalit, S. Sanibursky, and I. Talmi (Wiley Interscience, New York/North-Holland, Amsterdam, 1968), p. 245.
- [50] W. Pauli, Phys. Rev. **58**, 716 (1940).
- [51] B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A **212**, 248 (1952).
- [52] G. Fiore, J. Math. Phys. **39**, 3437 (1998).

- [53] V. Rittenberg and M. Scheunert, J. Math. Phys. **33**, 436 (1992).
- [54] W. Pusz, Rep. Math. Phys. **27**, 349 (1989).
- [55] G. Fiore, *Clifford algebras and their applications in mathematical physics*, Algebra and Physics, vol. 1, pp. 269-282, ed. R. Ablamovicz and B. Fauser (Basle, Birkhaeuser, 2000).
- [56] B. Abdesselam, D. Arnaudon, and A. Chakrabarti, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 3701 (1995).
- [57] K. T. Hecht, Nucl. Phys. **63**, 177 (1965).
- [58] K. T. Hecht, Phys. Rev. B **139**, 794 (1965).
- [59] J. N. Ginocchio, Nucl. Phys. **74**, 321 (1965).
- [60] J. Engel, K. Langanke, and P. Vogel, Phys. Lett. B **389**, 211 (1996).
- [61] J. Dobes, Phys. Lett. B **413**, 239 (1997).
- [62] A. Kerman, Ann. Phys. (NY) **12**, 300 (1961).
- [63] I. Talmi, *Simple Models of Complex Nuclei: The Shell Model and Interacting Boson Model*, Harwood Academic Publishers GmbH, Switzerland, 1993.
- [64] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10**, 63 (1985); **11**, 247 (1986).
- [65] V. G. Drinfeld, "Quantum Groups", edited by A. Gleason, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, 1986 (American Mathematical Society, Providence, 1987) Vol. 1, 798.
- [66] J. Lukierski, A. Nowicki, and H. Ruegg, Phys. Lett. B **271**, 321 (1991).
- [67] S. Shelly Sharma, Phys. Rev. C **46**, 904 (1992).
- [68] S. Shelly Sharma and N. K. Sharma, Phys. Rev. C **50**, 2323 (1994); Phys. Rev. **C62**, 034314 (2000).
- [69] S. Szpikowski, W. Berej, and L. Prochniak, *Symmetries in Science X*, (Plenum Press, New York, 1997).
- [70] A. K. Kerman, R. D. Lawson, and M. H. Macfarlane, Phys. Rev. **124**, 162 (1961).
- [71] Feng Pan and J. P. Draayer, Phys. Lett. B **442**, 7 (1998).
- [72] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. (NY) **99**, 253 (1976).

- [73] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **111**, 201 (1979).
- [74] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **123**, 468 (1979).
- [75] O. Scholten, F. Iachello, and A. Arima, *Ann. Phys. (NY)* **115**, 325 (1978).
- [76] R. F. Casten and J. A. Cizewski, *Nucl. Phys. A* **309**, 477 (1978).
- [77] D. Bonatsos and A. Klein, *Phys. Rev. C* **29**, 1879 (1984).
- [78] S. Bhattacharya and S. Sen, *Phys. Rev. C* **30**, 1014 (1984).
- [79] R. F. Casten, *Phys. Lett. A* **152**, 145 (1985).
- [80] H. X. Huang, C. S. Wu, and J. J. Zeng, *Phys. Rev. C* **39**, 1617 (1989).
- [81] J. L. Pin, J. Q. Chen, C. L. Wu, and D. H. Feng, *Phys. Rev. C* **43**, 2224 (1991).
- [82] D. Bucurescu, Gh. Cata-Danil, M. Ivascu, and C. A. Ur, *Phys. Rev. C* **48**, R21 (1993).
- [83] R. F. Casten, *Nucl. Phys. A* **443**, 1 (1985).
- [84] D. Bonatsos, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **14**, 351 (1988).
- [85] A. Georgieva, M. Ivanov, P. Raychev, and R. Roussev, *Int. J. Theor. Phys.* **28**, 769 (1989).
- [86] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, and I. Talmi, *Phys. Lett. B* **66**, 205 (1977).
- [87] J. P. Elliott, *Rep. Prog. Phys.* **48**, 171 (1985).
- [88] S. Drenska, A. Georgieva, M. Ivanov, S. Mavrodiev, P. Raychev, and R. Roussev, *Int. J. Mod. Phys. E* **2**, 873 (1993).
- [89] S. Drenska, A. Georgieva, M. Ivanov, S. Mavrodiev, P. Raychev, and R. Roussev, *Int. J. Mod. Phys. E* **4**, 123 (1995).
- [90] D. Bonatsos, L. D. Scouras, and J. Rikovska, *Phys. Rev. C* **43**, 952 (1991).
- [91] R. F. Casten, N. M. Zamfir, and D. S. Brenner, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 227 (1993).
- [92] Mitsuo Sacai, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **31**, 399 (1984); Level Retrieval Parameters, <http://iaeand.iaea.or.at/nudat/levform.html>.
- [93] P. C. Sood, D. M. Headly, and R. K. Sheline, *At. Data and Nucl. Data Tables* **47**, 89 (1991), <http://www.nndc.bnl.gov>.

- [94] L. Alexandrov, *Math. Phys. Comput. Math.* **11**, 36 (1984).
- [95] L. Alexandrov, M. Drenska, D. Karadjov, and P. Morozov, *J. Comput. Phys.* **45**, 291 (1982).
- [96] T. Byrski et al., *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1650 (1990).
- [97] I. Ahmad, M. P. Carpenter, R. R. Chasman, R. V. F. Janssens, and T. L. Khoo, *Phys. Rev. C* **44**, 1204 (1991).
- [98] R. F. Casten, N. M. Zamfir, P. von Brentano, and W. T. Chou, *Phys. Rev. C* **45**, R1413 (1992).
- [99] R. F. Casten, *Nuclear Structure From a Simple Perspective*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [100] H. Harter, P. Von Brentano, A. Gelberg, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **32**, 631 (1985).
- [101] P. Möller and J. R. Nix, *At. Nucl. Data Tables*, **26**, 165 (1981); Report LA-UR-90-1996, Los Alamos National Laboratory, (1980).
- [102] A. H. Wapstra, G. Audy, and R. Hoekstra, Atomic mass evaluation, National Nuclear Data Center, Midstream, Brookhaven National Laboratory, (1986).
- [103] P. E. Haustein, D. S. Brenner, and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **38**, 467 (1988).
- [104] A. Aprahamian, A. Gadala-Maria, and N. Cuka, *Rev. Mex. Fis.* **42**, Sup.1, 1 (1996).
- [105] A. Frank and P. Van Isacker, *Phys. Rev. C* **32**, 1770 (1985).
- [106] F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 679 (1979).
- [107] J. Jolie, P. Van Isacker, K. Heyde, and A. Frank, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1457 (1985).
- [108] R. F. Casten, P. E. Haustein, and D. S. Brenner, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 658 (1987).
- [109] P. E. Garrett, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **27**, R1 (2001).
- [110] R. K. Sheline, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 1 (1960).
- [111] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, volume I, II, Benjamin-Cummings, Reading, MA, 1975.
- [112] R. F. Casten, P. Von Brentano, and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. C* **49**, 1940 (1994).
- [113] S. Drenska, A. Georgieva, and N. Minkov, *Phys. Rev. C* **65**, 054303 (2002).

- [114] J. P. Draayer and K. J. Weeks, *Ann. Phys.* **156**, 41 (1984).
- [115] T. Beuschel, J. G. Hirsch, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **61**, 54307 (2000).
- [116] C. Vargas, J. G. Hirsch, P. O. Hess, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **58**, 1488 (1998).
- [117] Y. Leshber and J. P. Draayer, *Phys. Lett. B* **190**, 1 (1987); O. Castanos, J. P. Draayer, and Y. Leshber, *Z. Phys. A*, **329**, 33 (1988).
- [118] D. G. Burke and P. C. Sood, *Phys. Rev. C* **51**, 3525 (1995).
- [119] A. Aprahamian et al., *Phys. Rev. C* **65**, 031301(R) (2002).
- [120] S. G. Nilsson, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Math. Fys. Medd.* **29**, 1 (1955).
- [121] J. Escher, J. P. Draayer, and A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **586**, 73 (1995).
- [122] C. Bahri and J. P. Draayer, *Comput. Phys. Commun.* **83**, 59 (1994).
- [123] O. Mikoshiba, R. Sheline, T. Udagava, and Shiro Yoshida, *Nucl. Phys. A* **101**, 202 (1967).
- [124] G. Popa, J. G. Hirsch, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. C* **62**, 064313 (2000).
- [125] H. A. Naqvi and J. P. Draayer, *Nucl. Phys. A* **516**, 351 (1990); **536**, 297 (1992).
- [126] Y. Leschber, *Hadronic Journal Supplement* **3**, 1 (1987).
- [127] D. Bhaumik, Subimal Sen, and B. Dutta-Roy, *Am. J. Phys.* **59**, 719 (1991).
- [128] D. Bonatsos et al., *Phys. Let. B.* **251**, 477 (1990).
- [129] J. Cseh and G. Tímár, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 6979 (2006).
- [130] G. Racah, *Phys. Rev.* **62**, 438 (1942).
- [131] G. Racah, *Phys. Rev.* **63**, 367 (1943).
- [132] A. Bohr, B. R. Mottelson, and D. Pines, *Phys. Rev.* **110**, 936 (1958).
- [133] S. T. Belyaev, *Mat. Fys. Medd.* **31**, 11 (1959).
- [134] A. de Shalit and I. Talmi, *Nuclear Shell Theory, Academic Press, New York* (1963).
- [135] A. M. Lane, *Nuclear Theory, W. A. Benjamin, Inc.* (1964).
- [136] K. Langanke, *Nucl. Phys. A* **630**, 368c (1998).

- [137] H. Schatz et al., Phys. Rep. **294**, 167 (1998).
- [138] A. L. Goodman, Adv. Nucl. Phys. **11**, 263 (1979).
- [139] Feng Pan, J. P. Draayer, and W. E. Ormand, Phys. Lett. B **422**, 1 (1998).
- [140] K. Helmers, Nucl. Phys. **23**, 594 (1961).
- [141] J. C. Parikh, Nucl. Phys. **63**, 214 (1965).
- [142] G. G. Dussel et al., Nucl. Phys. A **153**, 469 (1970).
- [143] S. C. Pang, Nucl. Phys. A **128**, 497 (1969).
- [144] J. Engel, S. Pittel, M. Stoitsov, P. Vogel, and J. Dukelsky, Phys. Rev. C **55**, 1781 (1997).
- [145] Yu. V. Palchikov, J. Dobes, and R. V. Jolos, Phys. Rev. C **63**, 034320 (2001).
- [146] P. Van Isacker and D. D. Warner, Phys. Rev. Lett. **78**, 3266 (1997).
- [147] N. Zeldes and S. Lirin, Phys. Lett. B **62**, 12 (1976).
- [148] D. Rudolph et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 376 (1996).
- [149] J. Garces Narro et al., Phys. Rev. C **63**, 044307 (2001).
- [150] O. Civitarese, M. Reboiro, and P. Vogel, Phys. Rev. C **56**, 1840 (1997).
- [151] K. Langanke, D. J. Dean, S. E. Koonin, and P. B. Radha, Nucl. Phys. A **613**, 253 (1997).
- [152] D. J. Dean, S. E. Koonin, K. Langanke, and P. B. Radha, Phys. Lett. B **399**, 1 (1997).
- [153] A. Poves and G. Martinez-Pinedo, Phys. Lett. B **430**, 203 (1998).
- [154] G. Martinez-Pinedo, K. Langanke, and P. Vogel, Nucl. Phys. A **651**, 379 (1999).
- [155] K. Kaneko, M. Hasegawa, and J. Zhang, Phys. Rev. C **59**, 740 (1999).
- [156] A. O. Macchiavelli et al., Phys. Lett. B **480**, 1 (2000).
- [157] A. O. Macchiavelli et al., Phys. Rev. C **61**, 041303(R) (2000).
- [158] P. Vogel, Nucl. Phys. A **662**, 148 (2000).
- [159] W. Satula and R. Wyss, Phys. Lett. B **393**, 1 (1997); Nucl. Phys. A **676**, 120 (2000).

- [160] W. Satula, D. J. Dean, J. Gary, S. Mizutori, and W. Nazarewicz, *Phys. Lett. B* **407**, 103 (1997).
- [161] M. Hasegawa and K. Kaneko, *Phys. Rev. C* **59**, 1449 (1999).
- [162] K. L. G. Heyde, *The Nuclear Shell Model, Springer Series in Nuclear and Particle Physics* (1990); W. Greiner and J. A. Maruhn, *Nuclear Models, Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (1996).
- [163] D. Bonatsos, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, L101 (1992).
- [164] I. Talmi and R. Thieberger, *Phys. Rev.* **103**, 718 (1956).
- [165] T. S. Sandhu and M. L. Rustgi, *Phys. Rev. C* **12**, 666 (1975).
- [166] P. Möller, J. R. Nix, and K.-L. Kratz, *LA-UR-94-3898* (1994); *At. Data Nucl. Data Tables* **66**, 131 (1997).
- [167] S. M. Vincent et al., *Phys. Lett. B* **437**, 264 (1998).
- [168] D. J. Dean et al., *Phys. Lett. B* **399**, 1 (1997).
- [169] G. Martinez-Pinedo, K. Langanke, and P. Vogel, *Nucl. Phys. A* **651**, 379 (1999).
- [170] E. Hagberg et al., *Phys. Rev. Lett.* **73**, 396 (1994).
- [171] W. E. Ormand and B. A. Brown, *Phys. Rev. C* **52**, 2455 (1995).
- [172] A. F. Lisetskiy et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 012502 (2002).
- [173] K. Kaneko and M. Hasegawa, *Phys. Rev. C* **60**, 024301 (1999).
- [174] J. Jänecke and H. Behrens, *Phys. Rev. C* **9**, 1276 (1974).
- [175] J. Duflo and A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* **52**, R23 (1995).
- [176] E. Wigner, *Phys. Rev.* **51**, 106 (1937).
- [177] C. F. von Weizsäcker, *Z. Physik* **96**, 431 (1935).
- [178] H. A. Bethe and R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8**, 82 (1936).
- [179] J. Retamosa, E. Caurier, F. Nowacki, and A. Poves, *Phys. Rev. C* **55**, 1266 (1997).
- [180] P. Van Isacker, *Rep. Prog. Phys.* **62**, 1661 (1999).
- [181] G. Audi and A. H. Wapstra, *Nucl. Phys. A* **595**, 409 (1995).

- [182] R. B. Firestone and C. M. Baglin, *Table of Isotopes* (8th Edition), John Wiley & Sons (1998).
- [183] S. G. Nilsson and O. Prior, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **32**, No.16 (1961).
- [184] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [185] L. S. Kisslinger and R. A. Sorensen, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 853 (1963).
- [186] A. M. Lane, *Nuclear Theory*, Benjamin, New York, 1964.
- [187] J. Dudek, A. Majhofer, and J. Skalski, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **6**, 447 (1980).
- [188] P. Möller, J. R. Nix, and K.-L. Kratz, *LA-UR-94-3898* (1994); *At. Data Nucl. Data Tables* **66**, 131 (1997).
- [189] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys. A* **601**, 141 (1996).
- [190] M. Hasegawa and K. Kaneko, *Phys. Rev. C* **61**, 037306 (2000).
- [191] Y. K. Gambhir, P. Ring, and P. Schuck, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1235 (1983).
- [192] G. Röpke, A. Schnell, P. Schuck, and P. Nozieres, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3177 (1998).
- [193] G. Röpke, A. Schnell, P. Schuck, and U. Lombardo, *Phys. Rev. C* **61**, 024306 (2000).
- [194] E. A. Stefanova, *Phys. Rev. C* **67**, 054319 (2003).
- [195] W. R. Phillips et al., *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3257 (1986).
- [196] W.-T. Chou, R. F. Casten, and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. C* **45**, R2545 (1992).
- [197] N. Minkov, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev, and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **63**, 044305 (2001).
- [198] S. Flibotte et al., *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4299 (1993).
- [199] T. Hamamoto and B. R. Mottelson, *Phys. Lett. B* **333**, 294 (1994).
- [200] D. S. Haslip, S. Flibotte, C. E. Svensson, and J. C. Waddington, *Phys. Rev. C* **58**, R1893 (1994).
- [201] H. Toki and L. A. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2006 (1997).
- [202] N. Minkov, S. B. Drenska, P. P. Raychev, R. P. Roussev, and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **61**, 064301 (2000).

- [203] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, S. B. Drenska, G. A. Lalazissis, N. Minkov, P. P. Raychev, and R. P. Roussev, *Phys. Rev. A* **54**, R2533 (1996).
- [204] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **78**, 156 (1932).
- [205] W. A. de Heer, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 611 (1993).
- [206] S. Neukermans et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 033401 (2003).
- [207] D. G. Madland and J. R. Nix, *Nucl. Phys. A* **476**, 1 (1988); P. Möller and J. R. Nix, *Nucl. Phys. A* **536**, 20 (1992).
- [208] W. Satula, J. Dobaczewski, and W. Nazarewicz, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3599 (1998).
- [209] Y. Alhassid, S. Liu, and H. Nakada, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4265 (1999).
- [210] M. Bender, K. Rutz, P.-G. Reinhard, and J. A. Maruhn, *Eur. Phys. J. A* **8**, 59 (2000).
- [211] J. Dobaczewski, P. Magierski, W. Nazarewicz, W. Satula, and Z. Szymański, *Phys. Rev. C* **63**, 024308 (2001).
- [212] T. Duguet, P. Bonche, P.-H. Heenen, and J. Meyer, *Phys. Rev. C* **65**, 014311 (2001).
- [213] V. Velázquez and A. P. Zuker, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 072502 (2002).
- [214] W. J. Tomlinson III and H. H. Stroke, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 436 (1962).
- [215] E. Caurier, K. Langanke, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, and P. Vogel, *Phys. Lett. B* **522**, 240 (2001).
- [216] D. H. E. Gross and M. C. Nemes, *Phys. Lett. B* **130**, 131 (1983).
- [217] J.-Y. Zhang, R. F. Casten, and D. S. Brenner, *Phys. Lett. B* **227**, 1 (1989).
- [218] N. V. Zamfir and R. F. Casten, *Phys. Rev. C* **43**, 2879 (1991).
- [219] R. Smolańczuk and J. Dobaczewski, *Phys. Rev. C* **48**, R2166 (1993).
- [220] W. E. Ormand, *Phys. Rev. C* **55**, 2407 (1997).
- [221] P. Möller, J. R. Nix, and K.-L. Kratz, *LA-UR-94-3898* (1994); *At. Data Nucl. Data Tables* **66**, 131 (1997).
- [222] B. A. Brown, R. R. C. Clement, H. Schatz, and A. Volya, *Phys. Rev. C* **65**, 045802 (2002).

- [223] D. S. Brenner, C. Wesselborg, R. F. Casten, D. D. Warner, and J.-Y. Zhang, *Phys. Lett. B* **243**, 1 (1990).
- [224] J. Ekman et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 132502 (2004).
- [225] T. Barnes, F. E. Close, and H. J. Lipkin, *Phys. Rev. D* **68**, 054006 (2003).
- [226] E. P. Wigner, *Proceedings of the Robert A. Welch Foundation Conference on Chemical Research* (R. A. Welch Foundation, Houston, Texas, 1957), Vol. 1, p. 67.
- [227] H. T. Chen and A. Goswami, *Nucl. Phys.* **88**, 208 (1966).
- [228] N. Auerbach, J. Hufner, A. K. Kerman, and C. M. Shakin, *Rev. Mod. Phys.* **44**, 48 (1972).
- [229] G. F. Bertsch and B. H. Wildenthal, *Phys. Rev. C* **8**, 1023 (1973).
- [230] I. S. Towner, J. C. Hardy, and M. Harvey, *Nucl. Phys. A* **284**, 269 (1977).
- [231] R. D. Lawson, *Phys. Rev. C* **19**, 2359 (1979).
- [232] W. Benenson and E. Kashy, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 527 (1979).
- [233] J. Dobaczewski and I. Hamamoto, *Phys. Lett. B* **345**, 181 (1995).
- [234] W. E. Ormand and B. A. Brown, *Nucl. Phys. A* **440**, 274 (1985).
- [235] H. Sagawa, Nhuyen Van Giai, and Toshio Suzuki, *Phys. Rev. C* **53**, 2163 (1996).
- [236] P. Navratil, B. R. Barrett, and W. E. Ormand, *Phys. Rev. C* **56**, 2542 (1997).
- [237] J. C. Hardy and I. S. Towner, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 252501 (2002).
- [238] D. R. Bes and O. Civitarese, *Nucl. Phys. A* **741**, 60 (2004).
- [239] S. Aberg, A. Heine, G. E. Mitchell, and A. Richter, *Phys. Lett. B* **598**, 42 (2004).
- [240] N. Michel, W. Nazarewicz, , and M. Ploszajczak, *Phys. Rev. C* **70**, 064313 (2004).
- [241] A. Petrovici, K.W. Schmid, O. Radu, and A. Faessler, *Nucl. Phys. A* **747**, 44 (2005).
- [242] R. Álvarez-Rodríguez, E. Moya de Guerra, and P. Sarriguren, *Phys. Rev. C* **71**, 044308 (2005).
- [243] G. Savard et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1521 (1995).
- [244] P. D. Cottle et al., *Phys. Rev. C* **60**, 031301 (1999).

- [245] P. E. Garrett et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 132502 (2001).
- [246] A. Piechaczek et al., Phys. Rev. C **67**, 051305(R) (2003).
- [247] E. Farnea et al., Phys. Lett. B **551**, 56 (2003).
- [248] E. M. Henley, in *Isobaric Spin in Nuclear Physics*, ed. J. D. Fox and D. Robson (Academic, New York), 3 (1966).
- [249] E. Baumgartner, H. E. Conzett, E. Shield, and R. J. Slobodrian, Phys. Rev. Lett. **16**, 105 (1966).
- [250] P. Navratil, J. P. Vary, and B. R. Barrett, Phys. Rev. C **62**, 054311 (2000).
- [251] R. Machleidt and H. Mütter, Phys. Rev. C **63**, 034005 (2001).
- [252] S. C. Pieper, V. R. Pandharipande, R. B. Wiringa, and J. Carlson, Phys. Rev. C **64**, 014001 (2001); S. C. Pieper and R. B. Wiringa, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51**, 53 (2001).
- [253] P. Navratil and E. Caurier, Phys. Rev. C **69**, 014311 (2004).
- [254] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
- [255] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, and R. Schiavilla, Phys. Rev. C **51**, 38 (1995).
- [256] R. Machleidt, F. Sammarruca, and Y. Song, Phys. Rev. C **53** R1483 (1996); R. Machleidt, Phys. Rev. C **63** 024001 (2001).
- [257] D. R. Entem and R. Machleidt, Phys. Rev. C **68**, 041001 (2003).
- [258] A. P. Zuker, S. M. Lenzi, G. Martinez-Pinedo, and A. Poves, Phys. Rev. Lett. **89**, 142502 (2002).
- [259] I. S. Towner and J. C. Hardy, Phys. Rev. C **66**, 035501 (2002).
- [260] N. Cabbibo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963); M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [261] I. S. Towner and J. C. Hardy, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **29**, 197 (2003).
- [262] K. D. Sviratcheva, J. P. Draayer, and J. P. Vary, Phys. Rev. C **73**, 034324 (2006).
- [263] S. Popescu, S. Stoica, J. P. Vary, and P. Navratil, to be published.

- [264] M. Honma, T. Otsuka, B. A. Brown, and T. Mizusaki, *Phys. Rev. C* **69**, 034335 (2004).
- [265] A. Pape and M. S. Antony, *At. Data Nucl. Data Tables* **39** (1988).
- [266] I. Hamamoto and H. Sagawa, *Phys. Rev. C* **48**, R960 (1993).
- [267] J. B. Gerhart, *Phys. Rev.* **95**, 288 (1954); *Phys. Rev.* **109**, 897 (1958).
- [268] P. Navrátil and B. R. Barrett, *Phys. Rev. C* **59**, 1906 (1999); P. Navrátil and W. E. Ormand, *Phys. Rev. C* **68**, 034305 (2003); Feng Pan, V. G. Gueorguiev, and J. P. Draayer, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 112503 (2004).
- [269] A. de Shalit and M. Goldhaber, *Phys. Rev.* **92**, 1211 (1953).
- [270] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Theory*, Vol. I (North-Holland, Amsterdam, 1970).
- [271] R. F. Dashen and M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **17**, 142 (1965).
- [272] P. Raychev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **16**, 1171 (1972).
- [273] P. Raychev and R. Roussev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **27**, 1501 (1978).
- [274] D. Karadjov, J. Piperova, P. Raychev, and R. Roussev, *JINR Communication P4-11670* (1978); D. Karadjov, P. Raychev, and R. Roussev, *JINR Communication P4-11671* (1978).
- [275] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1069 (1975).
- [276] O. Castanos, E. Chacon, A. Frank, and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* **20**, 35 (1961).
- [277] V. Vanagas, E. Nadjakov, and P. Raychev, *Preprint IC/75/40*(ICTP, Trieste, 1975).
- [278] H. Lipkin, *Nucl. Phys. A* **350**, 16 (1980).
- [279] V. Bargmann and M. Moshinsky, *Nucl. Phys.* **23**, 177 (1961).
- [280] G. Rosensteel and D. J. Rowe, *Int. J. Theor. Phys.* **16**, 63 (1977).
- [281] P. Raychev, *Comp. Rend. Bulg. Acad. Sci.* **25**, 1503 (1972).
- [282] R. M. Asherova, V. A. Knir, Yu. F. Smirnov, and V. N. Tolstoy, *Sov. J. Nucl. Phys.* **21**, 1126 (1975).

- [283] R. M. Asherova, D. M. Fursa, A. I. Georgieva, and Yu. F. Smirnov, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **19**, 1887 (1993).
- [284] M. Moshinsky and C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12**, 1791 (1971).
- [285] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Hersonsky, *Quantum Theory of the Angular Momentum*, Nauka, Leningrad, 1975.
- [286] P. Raychev and R. Roussev, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **7**, 1227 (1981).
- [287] N. Minkov, S. Drenska, P. Raychev, R. Roussev, and Dennis Bonatsos, *Phys. Rev. C* **55**, 2345 (1997).
- [288] A. Georgieva, P. Raychev, and R. Roussev, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **9**, 521 (1983).
- [289] A. Georgieva, P. Raychev, and R. Roussev, *Bulg. J. Phys.* **12**, 147 (1985).
- [290] V. V. Vanagas, *Algebraic methods of microscopic nuclear theory*, Mintis, Vilnius, 1971, (in Russian).
- [291] C. Quesne, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2675 (1985).
- [292] P. A. Butler and W. Nazarewicz, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 349 (1996).
- [293] J. Engel and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1126 (1985); *Nucl. Phys.* **A472**, 61 (1987); N. V. Zamfir and D. Kusnezov, *Phys. Rev. C* **63**, 054306 (2001).
- [294] C. E. Alonso et al., *Nucl. Phys. A* **586**, 100 (1995).
- [295] A. A. Raduta and D. Ionescu, *Phys. Rev. C* **67**, 044312 (2003).
- [296] N. Minkov and S. Drenska, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **146**, 597 (2002).
- [297] Y. S. Chen and Z. C. Gao, *Phys. Rev. C* **63**, 014314 (2001).
- [298] H. J. Daley and F. Iachello, *Ann. Phys. (NY)* **167**, 73 (1986).
- [299] B. Buck, A. C. Merchant, and S. M. Perez, *Phys. Rev. C* **57**, R2095 (1997).
- [300] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, S. Drenska, N. Karoussos, N. Minkov, P. Raychev, and R. Roussev, *Phys. Rev. C* **62**, 024301 (2000).
- [301] G. Racah, *Phys. Rev.* **76**, 1352 (1949).
- [302] S. Alisauskas, A. Georgieva, P. Raychev, and R. Roussev, *Bulg. J. Phys.* **11**, 150 (1984).

- [303] G. Rosensteel and D. Rowe, J. Math. Phys. **24**, 2461 (1983).
- [304] D. J. Rowe, B. G. Wybourne, and P. H. Butler, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 939 (1985).
- [305] D. J. Rowe, Rep. Prog. Phys. **48**, 1419 (1985).
- [306] G. Rosensteel, Phys. Rev. C **41**, 730 (1990).
- [307] D. Vergados, Nucl. Phys. A **111**, 681 (1968).
- [308] K. T. Hecht, Nucl. Phys. **62**, 1 (1965).
- [309] D. J. Rowe and C. Bahri, J. Math. Phys. **41**, 6544 (2000).
- [310] J. P. Draayer and Y. Akiyama, J. Math. Phys. **14**, 1904 (1973).
- [311] Y. Akiyama and J. P. Draayer, Comput. Phys. Commun. **5**, 405 (1973).
- [312] C. Bahri, D. J. Rowe, and J. P. Draayer, Comput. Phys. Commun. **159**, 121 (2004).
- [313] J. F. C. Cocks et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 2920 (1997).
- [314] R. F. Casten and N. V. Zamfir, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **22**, 1521 (1996).
- [315] S. R. Leshner et al., Phys. Rev. C **66**, 051305(R) (2004).
- [316] S. S. M. Wong and J. B. French, Nucl. Phys. A **198**, 188 (1972); J. B. French and S. S. M. Wong, Phys. Lett. B **35**, 5 (1971).
- [317] V. G. Soloviev, A. V. Sushkov, and N. Yu. Shirikova, Progr. Part. Nucl. Phys. **27**, 667 (1996); Phys. Rev. C **51**, 551 (1995).
- [318] O. Castanos and J. P. Draayer, Nucl. Phys. A **491**, 349 (1989).
- [319] J. P. Draayer and J. Rosensteel, Phys. Lett. **124B**, 281 (1983); G. Rosensteel and J. P. Draayer, Nucl. Phys. A **436**, 445 (1985).
- [320] V. Garistov, *Rearrangement of the Experimental Data of Low Lying Collective Excited States*, Proceedings of the XXII International Workshop on Nuclear Theory, ed. V. Nikolaev, Heron Press Science Series, Sofia (2003) 305.
- [321] V. Garistov, *On Description of the Yrast Lines in IBM-1*, Proceedings of the XXI International Workshop on Nuclear Theory, ed. V. Nikolaev, Heron Press Science Series, Sofia (2002) 77.

- [322] V. V. Vanagas, *Algebraic foundations of microscopic nuclear theory*, Nauka, Moscow, 1988, (in Russian).
- [323] J. Escher and A. Leviatan, Phys. Rev. Lett. **84**, 1866 (2000).
- [324] T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
- [325] P. M. Davidson, Proc. Roy. Soc. A **135**, 459 (1932).
- [326] D. J. Rowe, J. Math. Phys. **35**, 3178 (1994); D. J. Rowe and C. Bahri, J. Phys. A: Math. Gen **31**, 4947 (1998).
- [327] L. Wilets and M. Jean, Phys. Rev. **102**, 788 (1956).
- [328] J. P. Elliott, J. A. Evans, and P. Park, Phys. Lett. B **169**, 309 (1986); J. P. Elliott, P. Park, and J. A. Evans, Phys. Lett. B **171**, 145 (1986).
- [329] D. J. Rowe and K. T. Hecht, J. Math. Phys. **36**, 223 (1981).
- [330] Feng Pan and J. P. Draayer, Nucl. Phys. A **636**, 156 (1998).
- [331] M. Moshinsky, J. Math. Phys. **25**, 1555 (1984).
- [332] M. Moshinsky, SIAM, J. Appl. Math. **25**, 193 (1973).
- [333] M. Moshinsky, *Group Theory and the Many Body Problem*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [334] G. N. Afanas'ev, I. N. Mikhailov, and P. Raychev, Yad. Fiz. **14**, 734 (1971). [Sov. J. Nucl. Phys. ]; P. P. Raychev, Yad. Fiz. **16**, 1171 (1972). [Sov. J. Nucl. Phys.].
- [335] G. Rosensteel, J. Math. Phys. **21**, 924 (1980).
- [336] G. Rosensteel and D. J. Rowe, Phys. Rev. Lett. **47**, 223 (1981).
- [337] M. Moshinsky and C. Quesne, J. Math. Phys. **11**, 1631 (1970); J. Math. Phys. **12**, 1772 (1971).
- [338] A. Ya. Dzyublik, V. I. Ovcharenko, A. I. Steshenko, and G. F. Filippov, Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 487 (1972).
- [339] O. Castanos, E. Chacon, and M. Moshinsky, J. Math. Phys. **25**, 1211 (1984).
- [340] E. Chacon, O. Castanos, and A. Frank, J. Math. Phys. **25**, 1442 (1984).
- [341] A. J. Dragt, J. Math. Phys. **6**, 533 (1965).

- [342] D. J. Rowe, Prog. Part. Nucl. Phys. **37**, 4711 (1995).
- [343] R. F. Casten and N. V. Zamfir, Phys. Rev. Lett, **85**, 3584 (2000); M. A. Caprio, Experiments on critical point nuclei - Mapping the Triangle, AIP Conference proceedings, **638**, eds; A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, 17 (2002).
- [344] J. P. Elliott and J. A. Evans, Phys. Lett. B **101**, 216 (1981).
- [345] J. P. Elliott and A. P. White, Phys. Lett. B **97**, 169 (1980).
- [346] F. Iachello and I. Talmi, Rev. Mod. Phys. **59**, 339 (1987).
- [347] D. J. Rowe, G. Rosensteel, and R. Carr, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, L399 (1984); J. Deenen and C. Quesne, J. Math. Phys. **23**, 878 (1982).
- [348] D. J. Rowe, J. Math. Phys. **27**, 2662 (1984); K. T. Hecht, *Lecture Notes in Physics* Vol. 290, Springer, Berlin, 1987.
- [349] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Berlin, 1986.
- [350] F. J. Dayson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
- [351] D. Bonatsos and A. Klein, Phys. Rev. C **31**, 992 (1985); D. Bonatsos, A. Klein, and Q. Y. Zhang, Phys. Lett. B **175**, 249 (1986); D. P. Menezes and D. Bonatsos, Nucl. Phys. A **499**, 29 (1989).
- [352] J. Dobaczewski, Nucl. Phys. A **369**, 213 (1981); Nucl. Phys. A **369**, 237 (1981); Nucl. Phys. A **380**, 1 (1982).
- [353] Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy, A. A. Saharuk, M. Havlihceh, and C. Burdic, *Group Theory Methods in Physics*, ed. M. A. Markov, v.2, p.517 (Nauka, Moscow, 1983).
- [354] Yu. F. Smirnov and V. N. Tolstoy, *Symmetries and Nuclear Structure*, ed. R. A. Meyer and V. Paar, p.24, (New York, Harwood, 1987).
- [355] D. Janssen, F. Dönau, S. Frauendorf, and R. V. Jolos, Nucl. Phys. A **172**, 145 (1971).
- [356] J. Dobeš, S. P. Ivanova, R. V. Jolos, and R. Pedrosa, Phys. Rev. C **41**, 1840 (1990).
- [357] A. M. Perelomov and V. S. Popov, Sov. J. Nucl. Phys. **5**, 489 (1967).
- [358] H. B. Geyer, C. A. Engelbrecht, and F. J. W. Hahne, Phys. Rev. C **33**, 1041 (1986).

- 
- [359] E. Marshalek and A. Klein, *Z. Phys. A* **329**, 44 (1989).
- [360] Cheng-Li Wu et al., *Phys. Rev. C* **36**, 1157 (1987).
- [361] P. Halse and Z. Y. Pan, *Phys. Rev. C* **36**, 1212 (1987).
- [362] P. Halse, J. P. Elliott, and J. A. Evans, *Nucl. Phys. A* **417**, 301 (1984).
- [363] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.* **8**, 962 (1967).
- [364] A. K. Agarwal, E. G. Kalnins, and W. Miller, *SIAM J. Math. Anal.* **18**, 1519 (1987).
- [365] M. R. Ubriaco, *Phys. Lett. A* **163**, 1 (1992).
- [366] W. S. Chung, *Mod. Phys. Lett. A* **8**, 2569 (1993).

## Списък на публикациите, на които се основава дисертацията

### A. Статии в научни списания

- [A1] J. P. Draayer, A. I. Georgieva, and M. I. Ivanov,  
*Deformations of the boson  $sp(4, R)$  representation and its subalgebras*,  
J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 2999-3014 (2001).
- [A2] A. Georgieva and Ts. Dankova,  
*Tensorial structure of a  $q$ -deformed  $sp(4, R)$  superalgebra*,  
J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 1251-1260 (1994);  
A. Georgieva, *Tensorial Structure of a  $q$ -deformed  $sp(4, R)$  superalgebra*,  
Preprint **IC/93/50**, ICTP, Trieste (1993).
- [A3] A. I. Georgieva, J. D. Goleminov, M. I. Ivanov, and H. B. Geyer,  
*A mapping construction for the  $q$ -deformed  $so(3) \subset u(3)$  embedding*,  
J. Phys. A: Math. Gen. **32** 2403-2413 (1999).
- [A4] A. I. Georgieva, J. D. Goleminov, and R. D. Ginin,  
*Mapping Method for Generating a  $Q$ -Deformed Version of the Algebraic  $su(3) \supset so(3)$  Chain*,  
Physics of Atomic Nuclei (Yadernaya fizika) **61**, No. 11, 1830 (1998).
- [A5] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, V. G. Gueorguiev, J. P. Draayer, and M. I. Ivanov,  
*Deformations of the fermion realization of the  $sp(4)$  algebra and its subalgebras*,  
J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 8365-8382 (2001).
- [A6] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Generalized  $q$ -deformed symplectic  $sp(4)$  algebra for multi-shell applications*,  
J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 7579-7587 (2003).
- [A7] Jacob Katriel and A. I. Georgieva,  
 *$q$ -similarity transformations*,  
Phys. Lett. A **280**, 246-248 (2001).

- [A8] S. Drenska, A. Georgieva, V. Gueorguiev, R. Roussev, and P. Raychev,  
*Unified description of the low lying states of the ground bands of even-even nuclei*,  
Phys. Rev. C **52**, 1853-1863 (1995).
- [A9] A. Teymurazyan, A. Aprahamian, and A. Georgieva,  
*Prediction of Nuclear Masses as Functions of  $P$  and  $F$ -spin in the shell  $Z=28-50$ ,  
 $N=28-50$* ,  
BgNS Transactions, Vol. 9, No 1, 165-172 (2004).
- [A10] G. Popa, A. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Systematics in the structure of low-lying, nonyrast bandhead configurations of  
strongly deformed nuclei*, Phys. Rev. C **69**, 064307 (2004) [7 pages].
- [A11] A. I. Georgieva, M. I. Ivanov, K. D. Sviratcheva, V. G. Gueorguiev, and J.P.  
Draayer,  
*A deformed  $Sp(4, R)$  algebra and possible applications*,  
Revista Mexicana De Fisica **46**, Suplemento 1, 60 (2000).
- [A12] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*An algebraic pairing model with  $Sp(4)$  symmetry and its deformation*,  
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **29**, 1281-1297 (2003).
- [A13] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Staggering behavior of  $0^+$  state energies in the  $Sp(4)$  pairing model*,  
Phys. Rev. C **69**, 024313 (2004) [11 pages].
- [A14] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Dynamical symmetry of isobaric analog  $0^+$  states in medium mass nuclei*,  
Phys. Rev. C **70**, 064302 (2004) [6 pages].
- [A15] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Isospin symmetry breaking in an algebraic pairing  $Sp(4)$  model*,  
Phys. Rev. C **72**, 054302 (2005) [7 pages].
- [A16] K.D. Sviratcheva, A.I. Georgieva, J.P. Draayer,  
*Microscopic Description of Isospin Mixing Pairing Correlations in the Framework  
of an Algebraic  $Sp(4)$  Model*, Bulg. J. Phys. **32**, 159-174 (2005).
- [A17] K. D. Sviratcheva, C. Bahri, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Physical Significance of  $q$  Deformation and Many-Body Interactions in Nuclei*,  
Phys. Rev. Lett. **93**, 152501 (2004) [4 pages].

- [A18] A. Georgieva, P. Raychev, and R. Roussev,  
*Interacting two-vector-boson model of collective motions in nuclei*,  
J. Phys. G: Nucl. Phys. **8**, 1377-1389 (1982).
- [A19] H. Ganev, V. P. Garistov, and A. I. Georgieva,  
*Description of the ground and octupole bands in the symplectic extension of the interacting vector boson model*, Phys. Rev. C **69**, 014305 (2004) [7 pages].
- [A20] H. G. Ganev, V. P. Garistov, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Energy systematics of low-lying collective states within the framework of the interacting vector boson model*, Phys. Rev. C **70**, 054317 (2004) [8 pages].
- [A21] H. G. Ganev, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  
*Six-dimensional Davidson potential as a dynamical symmetry of the symplectic interacting vector boson model*, Phys. Rev. C **72**, 014314 (2005) [9 pages].
- [A22] H. G. Ganev, A. I. Georgieva, V. P. Garistov,  
*Analytic Formulae for the Matrix Elements of Analytic Formulae for the Matrix Elements of the Transition Operators in the Symplectic Model*, Bulg. J. Phys. **32**, 124-135 (2005).
- [A23] R. M. Asherova, D. V. Fursa, A. Georgieva, and Y. F. Smirnov,  
*Interacting vector boson model and of other versions of interacting boson approximations*,  
J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **19**, 1887-1901 (1993).
- [A24] Р. М. Ашерова, А. Георгиева, Ю. Ф. Смирнов, Д. В. Фурса,  
*Векторная модель взаимодействующих бозонов и другие варианты МВБ*,  
Известия Академии Наук СССР, Серия Физическая, **56**, 129-136 (1992).

## В. Доклади на научни конференции

- [B1] A. Georgieva and Ts. Dankova, *Tensorial Structure of a  $q$ -Deformed  $sp(4, R)$  Superalgebra*, Proceedings of International Workshop "Symmetry Methods in Physics", Dubna, Russia, July 6–10, 1993, Eds. A. N. Sissakian, G. S. Pogosyan, S. I. Vinitsky, Vol. 1, 123–128 (1994).
- [B2] A. Georgieva, H. B. Geyer, M. I. Ivanov, and K. D. Sviratcheva, *Applications in Nuclear Structure of a Family of  $Q$ -Deformed Algebras*, Proceedings of the International Conference "The Nucleus, New physics for the New Millennium",

- January 18–22, 1999, Faure, South Africa, Eds. F. D. Smit, R. Lindsay and S. V. Förtsch, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 205-211 (1999).
- [B3] A. I. Georgieva, H. B. Geyer, M. I. Ivanov, and R. D. Ginin, *Q-mapping of a deformed  $Sp(4, R)$  algebra preserving tensorial properties of its generators*, Proceedings of the Sixth International Wigner Symposium, 16–22 August, 1999, Istanbul, Turkey, Ed. Engin Arik, Bogazici Universitesi Press, Istanbul, Vol. 1, 675–684 (2002).
- [B4] A. I. Georgieva, M. I. Ivanov, J. P. Draayer, K. D. Sviratcheva and V. G. Gueorguiev, *Deformations of the Boson and Fermion representations of  $sp(4, R)$  and  $sp(4)$* , Proceedings of the IX International Conference on Symmetry Methods in Physics, July 3-8, 2001, Yerevan, Armenia Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (PEPAN) **33**, No. 7 (2002) 129-143.
- [B5] A. I. Georgieva, K. D. Sviratcheva, V. G. Gueorguiev, and J. P. Draayer, *Deformed Fermion Realization of  $sp(4)$  and Its Reductions*, Proceedings of the Wigner Centennial Conference (8-12 July, Pecs, Hungary), eds. A. Gabris and M. Koniorczyk, Acta Physica Hungarica A) Heavy Ion Physics, **19**, 227–231 (2004).
- [B6] S. Drenska, A. Georgieva, V. Gueorguiev, R. Roussev, and P. Raychev, *Unified Description of the Low Lying States of the Ground Bands of the Even-Even Nuclei*, Proceedings of the 5th International Spring Seminar on Nuclear Physics “New Perspectives in Nuclear Structure”, Ravello, Italy, May 22–26, 1995, Ed. A. Covello, World Scientific, 327–335 (1995).
- [B7] S. Drenska, A. Georgieva, V. Gueorguiev, R. Roussev, and P. Raychev, *Unified description of the low lying states of the ground bands of the even-even nuclei in a symplectic classification scheme*, Proceedings of VII International Conference “Symmetry Methods in Physics”, Dubna, Russia, July 10–16, 1995, Eds. A. N. Sissakian, G. S. Pogosyan, Vol. 1, 173–181 (1996).
- [B8] A. I. Georgieva, Tz. Venkova, and Ani Aprahamian, *Systematics of Nuclei with Critical Point Symmetries in the Rare-Earth Region*, Proceedings of the XXIII International Workshop on Nuclear Theory, June 14–19, 2004, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. S. Dimitrova, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 281–292 (2004).
- [B9] A. Teymurazyan, A. Aprahamian, and A. Georgieva, *Prediction of Nuclear Masses in the  $A=80$  Region of Nuclei as a Function of  $P$  and  $F$ -Spin*, Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure, “Mapping the Triangle”, Wyoming, May 22–25, 2002, Eds. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, AIP Conference Proceedings, Vol. 638, 271–272 (2002).

- [B10] A. Georgieva, G. Popa, and J. P. Draayer, *Microscopic Interpretation of  $K^\pi = 0_2^+, 2_\gamma^+$  Bands in Strongly Deformed Nuclei*, Proceedings of the XXII International Workshop on Nuclear Theory, June 16–22, 2003, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. V. Nikolaev, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 224–232 (2003).
- [B11] G. Popa, A. Georgieva, J. P. Draayer, *Microscopic Interpretation of the  $K^\pi = 0_2^+$  and  $2_\gamma^+$  Bands of Deformed Nuclei within the Framework of the Pseudo-SU(3) Shell Model*, Computational and Group Theoretical Methods in Nuclear Physics: Proceedings of the Symposium to Honor the 60th Birthday of Jerry P. Draayer (February 18–21, 2003, Playa del Carmen, Mexico), eds. J. Escher et al., p. 239–241, World Scientific, 2004.
- [B12] Gabriela Popa, Ani Aprahamian, Ana Georgieva, Jerry P. Draayer, *Systematics in the structure of low-lying, non-yrast band-head configurations of strongly deformed nuclei*, Proceedings of The Fourth International Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses ENAM'04, (September 12-16, 2004, Callaway Gardens, Pine Mountain, Georgia), Eur. Phys. J. A **25**, s01, 451–452 (2005).
- [B13] A. I. Georgieva, K. D. Sviratcheva, V. G. Gueorguiev, and J.P. Draayer, *Deformed Fermion Realization of the  $sp(4)$  Algebra and its Application*, Proceedings of the XXI International Workshop on Nuclear Theory, June 10–15, 2002, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. V. Nikolaev, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 349–357 (2002).
- [B14] A. I. Georgieva and K. D. Sviratcheva and J. P. Draayer *A Deformed  $Sp(4)$  Model for studying pairing correlations in atomic nuclei*, XIV International School on Nuclear Physics, Neutron Physics and Nuclear Energy (September 25 – 30, 2001, Varna, Bulgaria), BgNS Transactions, Vol. 7, No 1, 173–180 (2002).
- [B15] A. I. Georgieva, K. D. Sviratcheva, and J. P. Draayer, *Algebraic Approach to Pairing Correlations in Exotic  $Z \geq N$  Nuclei*, Proceedings of the Eleventh International Symposium “Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics”, CGS11, September 2–6, 2002, in Pruhonice near Prague, Czech Republic, Eds. J. Kvasil, P. Cejnar and M. Krtička, World Scientific, 668–671 (2003).
- [B16] K. D. Sviratcheva, C. Bahri, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer,  *$Sp(4)$  dynamical symmetry for pairing correlations and higher-order interactions in atomic nuclei*, Computational and Group Theoretical Methods in Nuclear Physics: Proceedings of the Symposium to Honor the 60th Birthday of Jerry P. Draayer (February 18–21, 2003, Playa del Carmen, Mexico), eds. J. Escher et al., p. 242–244, World Scientific, 2004.

- [B17] K. D. Sviratcheva, J. P. Draayer and A. I. Georgieva, *Applications of deformed fermion realizations of  $Sp(4)$* , Proceedings of the IX International Conference on Symmetry Methods in Physics, July 3-8, 2001, Yerevan, Armenia, Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei (PEPAN) **33**, No. 7, 162-173 (2002).
- [B18] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, C. Bahri, and J. P. Draayer, *Algebraic  $sp(4)$  Pairing Model and its Non-Linear Extension*, Proceedings of the Eleventh International Symposium "Capture Gamma-Ray Spectroscopy and Related Topics", CGS11, September 2-6, 2002, in Pruhonice near Prague, Czech Republic, Eds. J. Kvasil, P. Cejnar and M. Krtička, World Scientific, 833-836 (2003).
- [B19] K. D. Sviratcheva, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer, *Staggering behavior of isovector  $0^+$  state energies in even-even and odd-odd nuclei classified according to even representations of  $sp(4)$* , Proceedings of the International Conference on Nuclear Structure, "Mapping the Triangle", Wyoming, May 22-25, 2002, Eds. A. Aprahamian, J. A. Cizewski, S. Pittel, and N. V. Zamfir, AIP Conference Proceedings, Vol. 638, 263-265 (2002).
- [B20] K. D. Sviratcheva, C. Bahri, J.P. Draayer, and A. I. Georgieva, *On the role of  $q$ -deformation in isovector pairing interactions in nuclei*, Proceedings of the XXIV International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, "GROUP 24, Physical and Mathematical Aspects of Symmetries", July 15-20, 2002, Paris, France, Eds. J.-P. Gazeau et al., IOP Conference Series 173, 347-350 (2003).
- [B21] K. D. Sviratcheva, C. Bahri, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer, *A  $q$ -Deformed Symplectic  $sp(4)$  Algebra: How Free Is the Additional Degree of Freedom?*, Proceedings of the XXII International Workshop on Nuclear Theory, June 16-22, 2003, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. V. Nikolaev, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 212-223 (2003).
- [B22] A. I. Georgieva, K. D. Sviratcheva, C. Bahri and J.P.Draayer, *Analytical Modeling of Significant Many-Body Nuclear Interactions in the Framework of the Traditional "Two-Body"  $q$ -Deformed Approach*, Proceedings of the IV International Symposium, Varna, Bulgaria, 15 - 21 August 2005, "Quantum Theory and Symmetries - QTS-4", ed. V. K. Dobrev, suppl. to Bulg. J. Phys. vol.33 s1b, p. 925-933, Heron Press, Sofia, 2006.
- [B23] H. Ganev, V. P. Garistov, and A. I. Georgieva, *Description of the Ground and Octupole Bands as Yrast Bands in the Symplectic Extension of the Interacting Vector Boson Model*, Proceedings of the XXII International Workshop on Nuclear

- Theory, June 16–22, 2003, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. V. Nikolaev, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 246–255 (2003).
- [B24] H. Ganev, V. P. Garistov, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer, *Symplectic Classification of Collective States with Fixed Angular Momentum in Interacting Vector Boson Model*, Proceedings of the XXIII International Workshop on Nuclear Theory, June 14–19, 2004, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. S. Dimitrova, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 216–227 (2004).
- [B25] H. G. Ganev, A. I. Georgieva, and J. P. Draayer, *Transitional Nuclear Spectra within the Framework of Interacting Vector Boson Model with 6-dimensional Davidson Potential*, Proceedings of the XXIV International Workshop on Nuclear Theory, June 20–25, 2005, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. S. Dimitrova, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 259–271 (2004).
- [B26] H. G. Ganev, A. I. Georgieva, and V. P. Garistov, *Electromagnetic Transitions in the Symplectic Extension of the Rotational Limit of the Interacting Vector Boson Model*, Proceedings of the XXIV International Workshop on Nuclear Theory, June 20–25, 2005, Rila Mountains, Bulgaria, Ed. S. Dimitrova, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 272–279 (2004).
- [B27] A. I. Georgieva, V. P. Garistov, H. Ganev, and J. P. Draayer, *Energy Distribution of Collective States within the Framework of Symplectic Symmetries*, Proceedings of the 8th International Spring Seminar on Nuclear Physics, Key Topics in Nuclear Structure, Paestum, Italy, 23–27 May, 2004, Ed. Aldo Covello, World Scientific, 379–388 (2005).
- [B28] R. M. Asherova, D. V. Fursa, A. Georgieva, Yu. F. Smirnov, *Interacting Vector Boson Model and Other Versions of Interacting Boson Approximations*, Proceedings of the Fifth Workshop “Symmetry Methods in Physics”, (Obinsk, July, 1991), eds. Prof. Yu. F. Smirnov and Dr. R. M. Asherova, p. 140–153, Institute of Physics and Power Engineering, Obinsk, 1992.